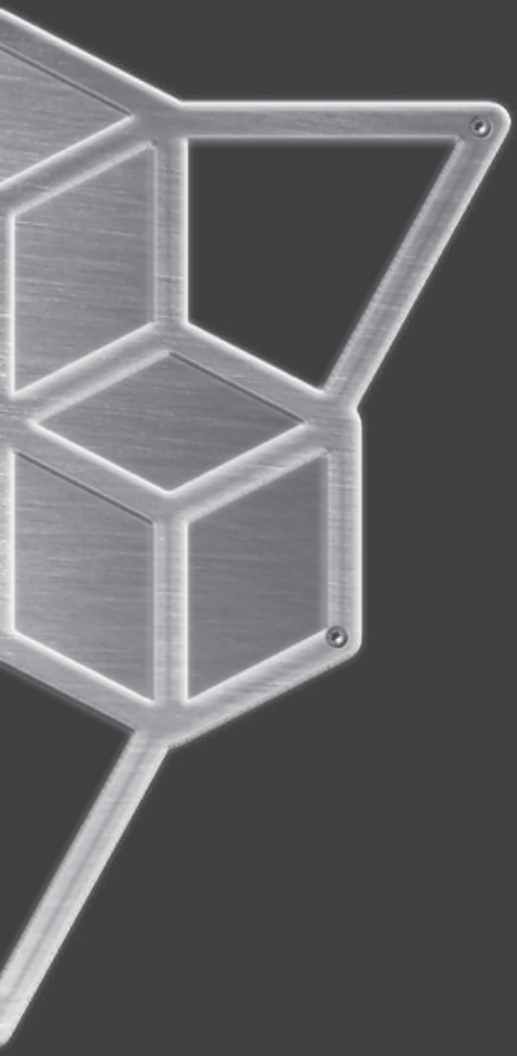
Rutas de la Educación Matemática



- Alicia Avila (coordinadora)
- Carmen Batanero
- Lorenzo J. Blanco y Janeth A. Cárdenas
- David Block Sevilla
- Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry
- Luis Carlos Contreras y José Carrillo
- Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño
- Alfinio Flores Peñafiel
- Juan D. Godino y Salvador Llinares
- Fernando Hitt
- Gelsa Knijnik
- Luis Moreno-Armella
- Núria Planas y Kaouthar Boukafri
- Luis Radford
- Teresa Rojano
- Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón
- Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar
- María Trigueros y Sonia Ursini

30 años de investigación en la revista *Educación Matemática*

Rutas de la Educación Matemática

- Alicia Avila (coordinadora)
- Carmen Batanero
- Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo
- David Block Sevilla
- Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry
- Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez
- Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla
- Alfinio Flores Peñafiel
- Juan D. Godino y Salvador Llinares
- Fernando Hitt
- Gelsa Knijnik
- Luis Moreno-Armella
- Núria Planas y Kaouthar Boukafri
- Luis Radford
- Teresa Rojano
- Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón
- Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón
- María Trigueros y Sonia Ursini

Sociedad Mexicana de Investigación y
Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

30 años de investigación en la revista Educación Matemática

Rutas de la Educación Matemática. Primera edición. 2018

D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., SOMIDEM, 2018
Domicilio: Guty Cárdenas 121-B
Guadalupe Inn,
01020, Alvaro Obregón, Cd. De México

Alicia Ávila, Coordinadora

D.R. © Alicia Ávila, Carmen Batanero; Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo; David Block Sevilla; Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry; Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez; Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla; Alfinio Flores Peñafiel; Juan D. Godino y Salvador Llinares; Fernando Hitt; Gelsa Knijnik; Luis Moreno-Armella; Núria Planas y Kaouthar Boukafri; Luis Radford; Teresa Rojano; Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón; Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón; María Trigueros y Sonia Ursini

Cuidado de la edición: Susana Moreno
Diseño de portada: Fabiano Durand
Corrección de estilo: Rosa María Rodríguez
Diagramación: Moisés Arroyo

Página web: www.revista-educacion-matematica.org.mx

Esta obra es propiedad intelectual de su(s) autor(es) y los derechos de publicación han sido legalmente transferidos a la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM, por lo que se encuentra protegida por la Ley Federal del Derecho de Autor, su Reglamento y las leyes internacionales sobre la materia. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier forma o medio sin la autorización previa y por escrito de SOMIDEM.

ISBN: 978-607-98263-1-4

Índice

Introducción 7

PRIMERA PARTE
Educación matemática con enfoque socio-cultural

Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una "mirada profesional". Aportes desde el interaccionismo simbólico
Juan D. Godino y Salvador Llinares *19*

Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático
Núria Planas y Kaouthar Boukafri *37*

¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas, 21 años después
Gelsa Knijnik *52*

Relectura crítica de un artículo publicado en 2000: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas?
Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla *63*

Pautas para repensar el sujeto y el objeto desde una epistemología de solidaridad, en tiempos de una educación para el mercado y el consumo
Luis Radford *83*

SEGUNDA PARTE
Conocimiento, resolución de problemas y tecnología

De un marco teórico constructivista del aprendizaje de las matemáticas a otro sociocultural en ambientes tecnológicos
Fernando Hitt *101*

De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental
Luis Moreno-Armella *126*

Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital
Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón *148*

Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría
Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry *168*

Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos
Carmen Batanero *186*

La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas
Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo *200*

El esquivo dominio del conocimiento del profesor de matemáticas
Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez *219*

Tercera parte
Investigación, currículum y práctica educativa

La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente
Teresa Rojano *238*

La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra
María Trigueros y Sonia Ursini *253*

Nuevos elementos de respuesta a la problemática del álgebra elemental desde la teoría antropológica de lo didáctico
Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón *273*

La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después
David Block Sevilla *293*

Venturas y desventuras de la investigación sobre saberes no escolares y educación matemática de jóvenes y adultos
Alicia Avila *312*

***La feria de Pitágoras* en su segundo cuarto de siglo**
Alfinio Flores Peñafiel *330*

Comité evaluador **363**

Introducción

1. ORIGEN Y ORIENTACIÓN DEL LIBRO

Este libro ofrece a sus lectores 18 rutas de investigación trazadas por otros tantos investigadores esenciales de la educación matemática que se ha difundido en español. En él se analizan trayectorias iniciadas en la revista *Educación Matemática*, primera revista en lengua hispana dedicada a este tema. Estas rutas fueron construidas a lo largo de años de trabajo desde distintas regiones y desembocan en lo que hacen actualmente sus creadores. Recontadas en primera persona, ofrecen elementos valiosísimos para comprender el desarrollo y la actualidad de la educación matemática generada en Iberoamérica.

Se trata de un libro de celebración, de festejo por los 30 años de publicación ininterrumpida de *Educación Matemática*, importante vehículo de comunicación de la investigación en educación matemática que se difunde en habla hispana.

La idea que se expresa en el libro comenzó a tomar forma en una reunión del *Comité Editorial de la Revista* organizada para discutir el contenido de la publicación. Una sugerencia de nuestro colega José Luis Cortina nos decidió a orientarlo hacia la forma que finalmente adquirió. Fue una decisión acertada considerando el contenido final del texto, configurado a partir de una invitación a colegas que publicaron algún trabajo en los primeros 15 años de la revista, cuando era distribuida por Editorial Iberoamérica.

La solicitud planteada tenía como objetivo *Mostrar los inicios y el desarrollo de la educación matemática en Iberoamérica desde la perspectiva actual de los constructores del campo*. En función de tal objetivo, se les pidió discutir algún artículo de su propia autoría publicado en *Educación Matemática* entre 1989 y 2003.

A partir de los artículos iniciales, los diferentes autores exponen y analizan las rutas trazadas y los avances en educación matemática logrados. En este ejercicio de reflexión, es posible mirar el contexto académico en que se iniciaron los trabajos, los puntos de inflexión y las lecturas y conceptos que determinaron giros en las trayectorias de investigación. Todos los autores dejan ver la validez actual (a veces total, a veces parcial) de aquellas ideas iniciales miradas con las lentes del presente.

De este modo, el libro aporta un panorama de algunos aspectos de lo que es el campo hoy, con sus logros, inflexiones teóricas y metodológicas, fortalezas y tareas pendientes. Por supuesto, la educación matemática es un campo en movimiento y trans-

formación, por eso, en lo que aquí se lee hay también señales de nuevos horizontes de nuestra disciplina.

2. CONTENIDO DEL LIBRO

Es cierto que delimitar geográficamente las fronteras de la investigación es inexacto, puesto que algunos de los autores hoy forman parte de la comunidad anglo-sajona o la francófona, ya sea por su lugar de residencia, o por la relevancia que en esas comunidades han alcanzado sus trabajos. Sin embargo, con tal delimitación se quiere enfatizar la existencia de una comunidad de habla hispana interesada en la educación matemática desde las últimas décadas del siglo XX y a la cual debemos aportes importantes para la comprensión de los fenómenos a que da lugar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro contexto.

Las rutas descritas son múltiples y diversas, tanto en sus objetivos como en sus fundamentos teóricos y sus aproximaciones metodológicas. Sus raíces se hunden en la matemática, la psicología, la pedagogía, la sociología, la antropología, la semiótica, la filosofía o la lingüística... Los diferentes capítulos del libro muestran el desarrollo y la autonomía lograda respecto de estas fuentes originales. Dicha autonomía hoy conduce a diversos planos y nuevos horizontes, incluso a los linderos de la filosofía de la educación matemática, orientación que observo en los trabajos de Radford y su culminación en la teoría de la objetivación.

Una riqueza y un reto de la investigación en educación matemática, como han señalado ya algunos investigadores –Lerman, (2010), Prediger, Bikner-Ahsbahs, y Arzarello, (2008), o Godino y Llinares (en este volumen)–, es la pluralidad en sus enfoques y objetivos. En el conjunto de las rutas descritas en este libro se observan sin embargo rasgos que permiten identificar algunas vertientes de la educación matemática. Una de ellas tiene como rasgo principal su orientación socio-cultural. Esta vertiente asume ideas amplias sobre el conocimiento matemático: el sentido y los objetivos de la educación matemática (Radford), las relaciones que se entablan entre aprendientes y enseñantes, la relevancia de la interacción en la construcción del conocimiento (Godino y Llinares) y las normas socio-matemáticas que regulan la actividad en las aulas (Planas y Boukafri). También se incluyen aquí cuestionamientos a las políticas globales que privilegian la evaluación del aprendizaje de las matemáticas a través de pruebas estandarizadas (Knijnik). En estos trabajos interesados por lo social, la cultura y los contextos, se realizan además balances sobre lo que hace 20 años se suponía sería el desarrollo de la educación matemática y los avances reales logrados por la investigación (Damore y Fandiño).

Otra manera de indagar de larga data, y que ha generado una vertiente fundamental de la educación matemática, es la que da prevalencia al análisis de los procesos de aprendizaje desde un punto de vista cognitivo. Esta tarea se realiza hoy mediante

acercamientos lejanos de aquellos que dieron forma inicial al campo y que luego serían cuestionados porque –se decía– consideraban al sujeto aislado, como si aprendiera en solitario, en la interacción con los objetos matemáticos y de manera relativamente independiente de las condiciones didácticas que le rodeaban. En este tipo de trabajos sobresalen el papel de la computadora y los programas de geometría dinámica en el aprendizaje.

La vertiente constituida por las investigaciones de este tipo es transversal a los tópicos y procesos matemáticos. En geometría se consideran distintos temas y aproximaciones –los fractales, la geometría euclidiana, la geometría dinámica y la demostración– también se incluyen la resolución de problemas, la covariación y la inferencia estadística. El interés renovado por la cognición sin duda fue impulsado por el impacto de la tecnología sobre los procesos cognitivos en algunas áreas de la matemática y el desarrollo de ideas teóricas como la mediación instrumental. Como enfatiza Moreno-Armella (1994), las computadoras en la educación matemática son un instrumento que no solo permite "ver mejor lo que ya podíamos ver", sino que permite "ver algo nuevo" gracias a las posibilidades gráficas del artefacto. Esta idea es reiterada por Camargo, Perry y Samper (en este volumen), quienes ven a los programas de geometría dinámica como "poderosas herramientas de reorganización cognitiva". Para Batanero (también en este volumen) la potencia de la simulación, facilitada por la tecnología, ha proporcionado otras posibilidades didácticas para la estadística, lo que ha llevado a algunos autores a recomendar la sustitución de la metodología frecuencial por el re-muestreo.

Otra vertiente de la educación matemática tiene que ver con la resolución de problemas existiendo una estrecha vinculación de los trabajos anteriores con esta noción. Esta actividad tradicionalmente ha sido reconocida como la esencia del quehacer matemático (Santos y Aguilar, en este volumen) y el conjunto de los investigadores la considera en sus trabajos, aunque sea implícitamente. Santos Trigo y Aguilar abordan esta noción en tres ejes que no permiten duda sobre su centralidad en la educación matemática: el trabajo de los matemáticos que –como se dijo– identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial de esta disciplina; los desarrollos en la educación matemática que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales (especialmente los sistemas de geometría dinámica) y su influencia en las formas de razonar, de formular y de resolver problemas.

La resolución de problemas se vincula también con los profesores pues, en palabras de Blanco y Cárdenas (en este volumen), es una tarea esencial a la vez que un desafío en la formación y la acción de estos profesionales. Desde los años noventa, Blanco (1996) colocó la resolución de problemas en el centro de la formación de los docentes, eje que ha guiado su ruta de indagación hasta hoy día.

Otra vertiente de la educación matemática desarrollada ampliamente en este siglo también trata de los profesores; implica el escrutinio de su conocimiento, pero en tér-

minos más amplios: el conocimiento que el profesor necesita y pone en práctica para enseñar adecuadamente esta disciplina en sus clases (Blanco y Cárdenas, en este volumen). Es lo que Ball y sus colegas (Ball, Hill, y Bass, 2005) llamaron *Conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), formulación que –nacida en la Pedagogía gracias a L. Shulman (1987)– vendría a romper la idea arraigada por mucho tiempo de que, para enseñar bien matemáticas, basta con saber matemáticas. En este libro, Contreras y Carrillo hacen un amplio recorrido sobre el tema. Los trabajos de estos autores –en su examen de los conocimientos necesarios para la enseñanza– parten en los años noventa de la idea de "concepciones de los docentes" (tema muy estudiado en esa época) y sus desarrollos concluyen en una propuesta cuyo objetivo es ajustar el modelo de Ball en algunos de sus rubros.

George Steinner, en un artículo auto-biográfico (Steiner, 1998), recurre al Executive Committee del ICMI, para caracterizar a la educación matemática como "un campo de estudio y práctica" (p. 232). En un sentido similar, Lerman ha descrito la naturaleza de la investigación en educación (y en educación matemática), utilizando la metáfora siguiente: "Tiene una cara mirando hacia la teoría y otra mirando hacia la práctica" (Lerman, 2010, p. 107). Esta doble naturaleza está presente en distintos grados y desde distintos ángulos en las rutas delineadas en este libro: en cada investigación, en cada tema, son constantes y cada vez más las referencias a las aulas, a los estudiantes, a los profesores y al cómo éstos pueden integrar las situaciones e ideas novedosas producto de la investigación en su trabajo; también hay reflexiones y expresiones de preocupación referidas a cómo puede prepararseles para que lo hagan exitosamente.

Todos los escritos incluidos en el libro muestran interés sobre la práctica de la educación matemática, pero en algunos este interés es esencial: los que hacen referencias específicas o abordan la docencia, elaboran planteamientos curriculares, examinan la puesta en práctica de innovaciones y reformas educativas, o se orientan a la elaboración de recursos para la enseñanza, todo ello con el soporte de la investigación.

Al respecto, es interesante la forma en que Carmen Batanero reconoce el vínculo teoría-práctica. Lo hace refiriendo la utilidad de dicho vínculo en tanto que investigadora, pues considera su trabajo de docencia como una fuente de identificación de dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos y la relevancia de ciertos temas, todo lo cual originó sus preocupaciones y proyectos iniciales de investigación.

Otras rutas de la educación matemática que forman parte de este libro desembocan en un vínculo directo con la acción educativa mediante propuestas curriculares. Son los desarrollos de la investigación sobre la comprensión del álgebra, tema que tradicionalmente ha ofrecido grandes dificultades a los estudiantes y, por lo mismo, ha constituido preocupación de muchos colegas desde los inicios de la indagación en educación matemática. Las rutas sobre el tema trazadas en este libro se iniciaron mediante estudios diagnósticos realizados por Trigueros y Ursini y por Rojano en la década de 1990. Rojano comenzó sus trabajos al reconocer las dificultades que los alumnos enfrentan

en el paso de la aritmética al álgebra reportadas por muchos investigadores en la década de 1980. Tal reconocimiento la llevó a proponer la ampliación del espacio curricular para esta área de la matemática escolar e iniciar su estudio más tempranamente. En el cierre de su escrito, esta autora ofrece elementos explicativos de la propuesta curricular que hoy entra en vigor en México donde, dice, se buscó equilibrio entre el aprendizaje de conceptos, métodos y técnicas, y se incluyeron elementos de pensamiento algebraico (álgebra temprana) en la educación primaria.

Por su parte, Ursini y Trigueros orientan sus análisis y sus acciones a la educación secundaria y niveles educativos subsecuentes. Desde sus primeros trabajos, estas autoras ponen de relieve el papel que juega el "carácter multifacético" de la variable en la comprensión del álgebra. Enfatizan el desarrollo de un modelo teórico (3UV) en el que se precisan los usos de la variable y aquellos aspectos que intervienen en su comprensión y aplicación en la resolución de problemas. Adentrándose en la práctica educativa, Trigueros y Ursini ofrecen evidencia del potencial del modelo 3UV como herramienta de análisis en la investigación y de diseño en la didáctica.

Distinto es el acercamiento al álgebra iniciado por Bosch y Gascón con su artículo "Cómo se construyen los problemas en matemática educativa" (Gascón, Bosch y Bolea, 2001). En él plantean las que consideran limitaciones del enfoque cognitivo y proponen un acercamiento a partir de un *enfoque epistemológico* que constituye una ruptura con el enfoque cognitivo, al tomar la actividad matemática como objeto primario de investigación. En continuación de tal orientación teórica, en el escrito incluido en este libro (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón) se delinea una propuesta para la enseñanza del álgebra ubicada en *el programa epistemológico* el cual postula la necesidad de modelizar explícitamente los diferentes ámbitos de la actividad matemática mediante los modelos epistemológicos de referencia (MER). Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón ven en este dispositivo un instrumento fundamental para rebasar ideas arraigadas en las escuelas que limitan los problemas que se plantean en el álgebra escolar.

Muchos de los autores de este libro han contribuido a diseñar propuestas educativas en matemáticas. Pero la investigación ha ido más allá y se han desarrollado rutas que analizan las formas que han tomado en la práctica reformas curriculares de gran escala nacidas con el fundamento de la investigación en didáctica (Block) o que, a falta de ella (Ávila), impulsaron la indagación sobre los aspectos implicados en la innovación y su puesta en marcha.

Como se ve, la educación matemática es un mosaico de contenidos y metodologías en el que también se incluye un trayecto sobre el teorema de Pitágoras y la funcionalidad, uso y evolución que los recursos elaborados para promover su comprensión han tenido durante 25 años de experimentación (Flores-Peñafiel). Esta ruta nos recuerda que la educación matemática, además de mirar hacia la práctica, también tiene por objetivo generar y experimentar recursos y situaciones de aprendizaje y enseñanza para mejorar esa práctica al favorecer una mejor comprensión de los temas en los estudiantes.

3. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, UN CAMPO EN EVOLUCIÓN

La educación matemática, como todas las disciplinas científicas vivas, es un campo en movimiento y transformación. Lo que este libro ha captado es un punto de corte en 18 rutas de trabajo iniciadas durante las últimas décadas del siglo XX y los albores del XXI en la revista *Educación Matemática*. Su movimiento, su transformación, se reflejan en las fuentes consultadas, en el abandono de algunas teorías, en la acotación de la validez de otras, en la ratificación de su valor, o en la adopción y creación de nuevos discursos, incluso en el retorno reflexivo a los orígenes. Ejemplos de cómo esta evolución teórica y metodológica se expresa a lo largo del libro los tenemos en los trabajos de Hitt, de Camargo y sus colegas o de Planas y Boukafri. Hitt nos dice:

> La redacción del presente escrito me ha hecho reflexionar sobre lo expresado en aquel de 1998. He podido darme cuenta de que al tomar el marco teórico de Duval y relacionarlo con la tecnología, hacía una separación estricta entre ésta y las producciones en lápiz y papel, considerando como erróneas aquellas representaciones espontáneas que no eran representaciones institucionales, sin reflexionar sobre la importancia de dotar a los estudiantes de herramientas para su evolución.

Hoy Hitt propone un acercamiento bajo la teoría de la actividad, una teoría socio-cultural –que le proporciona un soporte para la ideación de un método de enseñanza (ACODESA)– y una teoría local sobre representaciones funcionales-espontáneas y grupales, que en sus trabajos originales no consideraba.

Similar en su tránsito hacia lo socio-cultural en el contexto de la tecnología es la ruta que exponen Camargo, Perry y Samper en torno a la demostración en geometría. Estas autoras, asumiendo en los inicios de sus trabajos los planteamientos de De Villiers –para quien la demostración es un medio para descubrir, explicar, validar, comunicar y sistematizar resultados–, arriban a un punto en el que Vigotsky provee los fundamentos y la demostración se estudia desde una perspectiva socio-cultural, donde la interacción y la construcción social de los conocimientos se consideran fundamentales.

Una evolución muy visible en el foco de la indagación y la teorización que la sustenta es la que se observa en el escrito de Planas y Boukafri, quienes señalan que centrar una pregunta en la idea de obstáculo –como Planas hizo al iniciar este trayecto investigativo con el artículo "Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación" (Planas, 2002)– es una opción ideológicamente distinta a pensar en la idea de "oportunidad" o bien en la relación entre oportunidad y obstáculo, cuestiones que dichas autoras desarrollan en este volumen, ensanchando de manera importante su perspectiva inicial.

Otro acercamiento renovado con el paso del tiempo es el análisis que Knijnik ofrece sobre la resolución de problemas por mediación de Wittgenstein. En este caso, la evolu-

ción fue impulsada por la lectura del "Segundo Wittgenstein" y sus "juegos de lenguaje". Las nociones del filósofo –dice la autora– "se constituyeron en importantes fuentes para impulsar mi pensamiento, para pensar de otro modo lo que antes enunciara sobre los problemas de la 'vida real' en las matemáticas escolares" (Knijnik, en este volumen).

4. LA DIVERSIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La educación matemática se ha construido con base en una amplia pluralidad de enfoques, objetivos, fundamentos y metodologías que responden a preocupaciones específicas variadas. Como ya otros investigadores han señalado (p. ej. Lerman, 2010), un mediano conocimiento del campo cura contra la sorpresa que pudiese causar tal diversidad.

Es cierto que, en cualquier campo de investigación, el conjunto de teorías produce una gran variedad de formas de ver los fenómenos y de reportar los resultados, pues las teorías son lentes que enfocan y delimitan lo que se observa. Pero esto no resta validez a los señalamientos de Prediger *et al.* (2008), para quienes: "entre más diversos y desconectados sean los marcos de referencia utilizados en la investigación en educación matemática, más difícil parece ser para los no-especialistas percibirla como un campo de investigación coherente" (p. 169).

Entre sus argumentos estos autores exponen que la riqueza y pluralidad solo pueden volverse fructíferas cuando diferentes aproximaciones y tradiciones entran en interacción. Por eso sostienen: "Debemos explotar la diversidad de aproximaciones teóricas buscando 'estrategias de articulación'" (Prediger *et al.*, 2008, p. 169).

La articulación entre los diversos enfoques y teorías fue señalada hace tiempo por Kuhn (1971) como elemento indispensable para el desarrollo del conocimiento científico. Es obvio que en educación matemática el objetivo de articular no sería llegar a una única teoría, pero tampoco es adecuado crear y utilizar teorías de manera aislada.

Prediger *et al.* (2008) sugieren formas de reconocer y establecer interconexión entre las teorías, consistentes en: combinarlas, contrastarlas, compararlas, coordinarlas. En el desarrollo de las rutas de investigación mostradas en este libro, se observan acercamientos analíticos a las teorías, abandonos, contrastes, cuestionamientos, combinaciones y complementaciones que dan cuenta de la evolución teórica experimentada por cada uno de los autores. Pero es imposible negar que falta más articulación entre los distintos enfoques teóricos y las producciones resultantes de cada una de las rutas delineadas. En este sentido, el ejercicio de reflexión realizado por los autores sobre su propia ruta de investigación podría agregarse a las estrategias propuestas por Prediger y sus colegas, con miras a la articulación del campo de la educación matemática.

5. LA PLURALIDAD Y LA ORGANIZACIÓN DE ESTE LIBRO

Cómo organizar la pluralidad no es pregunta nueva en el campo de la educación matemática; es una cuestión que ha provocado diferentes reacciones y respuestas por parte de investigadores de este campo. Es también una pregunta que hube de enfrentar para organizar y dar estructura al libro.

Como ya se dijo, Prediger y sus colegas consideran que la riqueza que guarda la pluralidad sólo resulta productiva si hay interlocución entre las teorías. Siguiendo esta línea de pensamiento, en opinión de Godino y Llinares (en este volumen), la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática, puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como campo científico. En mi consideración, avanzar en la articulación de las distintas orientaciones permitirá establecer una identidad más nítida para la educación matemática y enriquecer los diversos acercamientos teóricos. Es una aspiración que este libro y su contenido puedan ser útiles para avanzar en esa tarea.

Ahora bien, es de mi interés señalar la dificultad para organizar las partes constitutivas del libro conforme a objetivos, marcos teóricos o metodologías debido a la diversidad de las rutas de indagación delineadas en los textos. Resultaba inútil tratar de disponerlos conforme a los objetivos, o al tema matemático abordado, o al sujeto o sujetos de la investigación, como hemos hecho en otros trabajos respecto de la investigación mexicana.

Finalmente, fue la idea de "semejanzas de familia" de Wittgenstein la que me inspiró para buscar de manera distinta las posibilidades de coherencia y legibilidad del texto. Como resultado de una disquisición donde analiza las semejanzas y diferencias entre juegos (usos) de lenguaje, Wittgenstein (2017) dice:

> En vez de indicar algo que sea común a todo lo que llamamos lenguaje, digo que no hay nada en absoluto común a estos fenómenos por lo cual empleamos la misma palabra para todos –sino que están emparentados entre sí de muchas maneras diferentes. Y a causa de este parentesco o estos parentescos les llamamos a todos "lenguaje". (Wittgenstein, § 65)

Y el autor prosigue. Jugando juegos de lenguaje con la palabra "juegos", nos dice:

> Considera, por ejemplo, los procesos que llamamos "juegos" [...] si los miras no verás por cierto algo que sea común a todos, sino que verás semejanzas, parentescos y por cierto toda una serie de ellos. Mira, [...] desaparecen muchos rasgos comunes y se presentan otros. [...] continúan manteniéndose varias cosas comunes pero muchas se pierden [...] cuántos de los otros rasgos característicos han desaparecido!

> Y podemos recorrer así los muchos otros grupos de juegos. Podemos ver cómo los parecidos surgen y desaparecen. (Wittgenstein, § 66)

> No puedo caracterizar mejor esos parecidos que con la expresión "parecidos de familia". (Wittgensteing, § 67)

Con el apoyo de esta idea, la agrupación de los escritos se dio por semejanzas que luego desaparecían, pero hacían presencia otros rasgos de los que surgían nuevos parecidos. Es decir que de alguna manera la agrupación tiene los límites borrosos, incluso algunos textos podrían ser puentes entre agrupaciones o pertenecer a más de una, pero al ser la educación matemática un campo de gran pluralidad no del todo articulada, llegué a la conclusión de que no podía ser de otro modo. Finalmente, el libro quedó organizado por "semejanzas de familia", en el sentido de Wittgensteing, en las siguientes tres partes:

Primera parte: Educación matemática con enfoque socio-cultural
Segunda parte: Conocimiento, resolución de problemas y tecnología
Tercera parte: Investigación, currículum y práctica educativa

El orden dado a estas agrupaciones no guarda relación con la importancia de los textos, sino con la menor o mayor cercanía entre las afirmaciones que contienen y los sucesos de aula. Espero que lo hasta aquí dicho ofrezca al lector una hoja de ruta para navegar por los trayectos trazados a lo largo de 18 historias de indagación.

Agrego unas notas más sobre las vertientes representadas en el libro. Como Lerman afirma, los enfoques socio-culturales han permitido identificar la desigualdad y la inequidad en la educación matemática que se realiza en el mundo de las escuelas, cuestión que otras orientaciones no enfocan. Comparto plenamente esta afirmación. Sin embargo –en cuanto al desarrollo de la educación matemática como campo científico–, considero que estos enfoques presentan un reto: el de evitar el generalismo pedagógico (Gascón); es decir, el de no perder la especificidad de la educación matemática como campo autónomo de conocimiento, claramente distinguible de otros, con objetivos, lenguaje y conceptos particulares.

Me refiero ahora al conjunto de trabajos que han permanecido más apegados al análisis de la cognición y su vínculo con lo didáctico y que ahora se han visto renovados con el ingreso de la tecnología. Es necesario continuar la indagación en esta vertiente. También lo es avanzar en aquellas rutas que han dedicado sus afanes a hacer propuestas educativas y ponderar su impacto en la realidad de las escuelas. Lerman ha dicho con claridad: si bien llegó Vigotsky, eso no quiere decir que Piaget deba ser sustituido o eliminado (Lerman, 2010). Esta idea, tomada metafóricamente, nos previene contra la tentación de abandonar teorías cuyo poder explicativo no se ha eclipsado por

la aparición de otras consideradas más pertinentes o más actuales. D'Amore y Fandiño (en este volumen) se refieren a este punto con contundencia:

> Un hecho que nos asombra en relación con esta historia, es la culpable superficialidad y la evidente ignorancia de quienes se consideran con derecho de crear nuevas teorías, sin tener en cuenta las teorías precedentes, acusando con arrogancia a las teorías iniciales, en particular a la teoría de situaciones, de ser "una teoría superada, del pasado".

Creo con estos autores que debemos mucho a ciertas teorías fundadoras y que ignorarlas no es útil para el desarrollo de la educación matemática. Con un ánimo contrario (y teniendo como referente un escrito publicado hace 18 años en *Educación Matemática*), Godino y Llinares muestran en este volumen cómo el interaccionismo simbólico –importante apoyo de la educación matemática en sus inicios– aún tiene reflejos en sus líneas de investigación actuales y en las de otros investigadores.

Una cuestión que constituye un reto de la investigación en este campo, es identificar las condiciones necesarias para que la práctica educativa incorpore los aportes que –conforme a nuestras hipótesis– podrían mejorarla. Todos sabemos que esto es indispensable; es incluso condición de legitimidad social de la investigación que realizamos. Algunos autores han incursionado en ese ámbito, pero el escepticismo es expresado con frecuencia: el mundo de la práctica, las más de las veces, no muestra interés en los beneficios que la investigación promete.

Si aceptamos que la educación matemática ha de mirar hacia la teoría y hacia la práctica, este es un reto mayor que hemos de enfrentar con energía. Hace 23 años, Michèle Artigue (1995) precisó que la didáctica de las matemáticas se desarrollaba como área de investigación "con la ambición de comprender el funcionamiento de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje [...] haciendo explícita, al mismo tiempo, la necesidad de distanciar la voluntad de acción inmediata sobre el sistema educativo" (Artigue, 1995, p. 8). Se entiende bien el sentido de tal afirmación. No obstante, creo que es momento de volver a la práctica con ánimo de mejorarla, aplicando en ello toda la capacidad desarrollada en estas décadas.

Cierro esta introducción con una disrupción indispensable: la expresión de mi agradecimiento a quienes hicieron posible que *Educación Matemática* llegara a su 30 aniversario, y a quienes aceptaron escribir esta historia.

Alicia Ávila

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. En: Pedro Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 7-25). Bogotá, Colombia: Una empresa docente/Iberoamérica.

Ball, D., Hill, H., y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. *American Educator.* Fall 2005, 14-22 y 43-46.

Blanco, L. (1996). Resolución de problemas aritméticos y formación práctica de los maestros. *Educación Matemática, 8*(1), 53-64.

Gascón, J., Bosch, M., y Bolea, P. (2001). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática, 13*(3), 22-63.

Godino, J.D., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 90-92.

Kuhn, T. (1971). *Estructura de las revoluciones científicas.* Ciudad de México, México: Fondo de Cultura Económica.

Lerman, S. (2010). Theories of Mathematics Education: Is Plurality a Problem? En: B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Educatio*n (pp. 99-109). Germany, Heilderberg: Springer-Verlag.

Moreno-Armella, L. (1994). La Geometría del Desorden y un Nuevo Diseño Curricular. *Educación Matemática, 6*(3), 52-64.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165-178.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard University Review, 57*(1), 1-21.

Steiner, H.G. (1998). Didactics of mathematics as a scientific discipline: A sketch of its development from a personal (autobiographic) point of view. *ZDM, 98*(6), 224-233.

Wittgenstein, L. (2017). *Investigaciones filosóficas.* México, Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México-Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Primera parte

Educación matemática con enfoque socio-cultural

Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una "mirada profesional". Aportes desde el interaccionismo simbólico

Juan D. Godino
Universidad de Granada, España
Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España

Resumen: Se realiza una síntesis y valoración del artículo "El interaccionismo simbólico en educación matemática" (Godino y Llinares, 2000), publicado en *Educación Matemática* en el año 2000. Adoptar esta perspectiva nos permite caracterizar la transición de los aportes del interaccionismo simbólico, desde ser foco de reflexión didáctica a ser referente en nuevas agendas de investigación en educación matemática. Dos de las agendas actuales que desarrollan aspectos sobre la competencia docente del profesor consideran ideas que pueden estar enraizadas en los aportes iniciales del interaccionismo simbólico. Una de estas agendas se centra en el análisis de procesos instructivos aplicando herramientas del enfoque ontosemiótico; la segunda agenda se centra en los procesos por los cuales los profesores aprenden a dotar de sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje, como una evidencia de la competencia docente "mirar profesionalmente".

1. INTRODUCCIÓN

El artículo de Godino y Llinares (2000) fue una aportación de tipo *survey* en la que presentamos una síntesis de las principales características del enfoque de investigación conocido como Interaccionismo Simbólico (en adelante IS). Los focos de interés fueron el posicionamiento del IS en relación con la noción de significado y formas de conocer las matemáticas, que postulaba el carácter discursivo del conocimiento; la manera de entender el lenguaje en el aprendizaje, y el papel desempeñado por la negociación de los significados matemáticos (ambigüedad e interpretación). En ese trabajo dábamos cuenta de algunos constructos teóricos utilizados por el programa interaccionista para describir y explicar los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: dominios de experiencia subjetiva, patrones de interacción y normas sociales y sociomatemáticas, y cómo se constituían en el aula. Además, identificábamos ciertas similitudes entre algunos de los constructos teóricos del IS y de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2002), situando el programa interaccionista entre el individualismo y el colectivismo en el intento por explicar el aprendizaje matemático.

Los trabajos revisados sobre IS correspondieron a la década de 1990, cuando la investigación en educación matemática se consolidaba progresivamente con la aplicación de herramientas teóricas procedentes de campos afines, como la psicología, la antropología, la semiótica y, de manera especial, la sociología. El artículo de Godino y Llinares (2000) respondió a la necesidad de presentar una síntesis de las principales ideas y aportaciones del IS, marco teórico proveniente de la sociología, que se estaba aplicando en investigaciones de educación matemática realizadas en Alemania y en Estados Unidos. En él se ponía el foco sobre la discusión de algunos tipos de patrones de interacción descritos por la escuela alemana de didáctica de la matemática (Bauersfeld, 1994; Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988) y la escuela francesa (Brousseau, 2002).

En este escrito volvemos a considerar formas en las que los resultados de las investigaciones derivadas del programa interaccionista, centradas en comprender las características de las interacciones en el aprendizaje de las matemáticas, han empezado a ser consideradas en agendas de investigación desarrolladas en la actualidad, y en particular en nuestras propias agendas de investigación: el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) y sobre el desarrollo de una mirada profesional del docente (Llinares, 2012; 2013; Ivars, Buforn y Llinares, 2017; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018). Esta forma de proceder permite evidenciar y comprender cómo los resultados obtenidos desde las investigaciones en el ámbito de las ciencias sociales aumentan nuestra comprensión de los fenómenos educativos en educación matemática y proporcionan referencias para nuevas cuestiones de investigación. Para poder identificar con claridad la proyección del IS en nuestras agendas de investigación, consideramos necesario profundizar en los principios que lo caracterizan.

2. INTERACCIONISMO SIMBÓLICO

No es una tarea fácil delimitar el alcance que un marco teórico como el IS ha tenido en el campo de investigación de las ciencias sociales y en áreas específicas como la educación matemática. Esto se debe principalmente a dos razones: el IS no es un sistema teórico uniforme, bien delimitado y ajeno a controversias; y la diversidad de teorías que compiten por explicar los mismos fenómenos educativos con frecuencia no explicitan con claridad los supuestos en que se basan.

En principio, la cuestión del papel de la interacción en el aula para la construcción del conocimiento podría ser un tema que llevara a reconocer las investigaciones que usan el IS como soporte teórico y metodológico. Pero no es el caso, ya que dichas interacciones se pueden estudiar desde diferentes planteamientos teóricos. Hay diversas concepciones sobre la interacción y sobre el papel que se le atribuye para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La monografía de Schwarz, Dreyfus

y Hershkowitz (2009), *Transformation of knowledge through classroom interaction*, incluye 19 capítulos; ninguno de ellos refiere de manera explícita al IS. Esto no quiere decir que el IS ha dejado de tener interés, al menos en el campo de la sociología, como se pone de manifiesto en la publicación de la revista específica *Symbolic Interaction*[1] y en la creación de una Sociedad cuyo objetivo es el estudio del IS, *Society for the Study of Symbolic Interaction.*[2]

Los principios conceptuales y metodológicos del IS, cuya elaboración inicial se atribuye a Blumer (1969), quien introdujo el término, fueron aplicados inicialmente en el campo de la sociología, pero progresivamente se extendieron a otras áreas de conocimiento, en particular a la educación. En el campo de la educación matemática fue adoptado como marco de referencia, principalmente para el estudio de las interacciones en el aula. Supuso un cambio importante en la manera de conceptualizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, al asumir como un elemento clave para la construcción del conocimiento, por parte de los estudiantes, las interacciones sociales que tienen lugar en la clase.

Los principales autores que incorporan la perspectiva del is en las décadas de 1980 y 1990 fueron Bauersfeld (1994), Voigt (1985) en Alemania, Cobb y sus colaboradores (Yackel y Cobb, 1996) en Estados Unidos, y también la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2002), aunque no se hace una referencia directa al mismo. Todos ellos llamaron la atención sobre la importancia de la interacción en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El foco común de estas iniciativas era intentar dar cuenta de la complejidad del aprendizaje de las matemáticas en las situaciones de aula, intentando compaginar el aspecto interactivo y social de la actividad matemática (perspectiva sociológica) y las perspectivas que tratan el aprendizaje de las matemáticas como un proceso individual de construcción conceptual (perspectiva psicológica) (Cobb y Bauersfeld, 1995). La complementariedad de estas aproximaciones permitió abordar la cuestión relativa a considerar las interpretaciones matemáticas de los estudiantes individuales como socialmente situadas.

Para reconocer la proyección del IS en el panorama de la investigación en las ciencias sociales, y de manera especial en educación matemática, explicitamos a continuación los principios o supuestos básicos en que se basa. La mayoría de los autores hace referencia a tres principios básicos, formulados inicialmente por Blumer (1969, p. 2):

1) que las personas actúan hacia las cosas, incluso con las otras personas, sobre la base de los significados que tienen sobre las mismas;
2) que los significados son derivados a partir de la interacción social con los demás;
3) que los significados son gestionados y transformados mediante un proceso interpretativo que las personas usan para dar sentido a los objetos y para manipular los objetos que constituyen sus mundos sociales.

[1] http://onlinelibrary.wiley.com/journal/10.1002/(ISSN)1533-8665

[2] https://sites.google.com/site/sssinteraction

Snow (2001) considera que los tres principios resaltados por Blumer vinculan al IS de manera estrecha con la cuestión del significado y la interpretación, pero pasa por alto otros principios. Propone incluir otros cuatro principios orientadores más inclusivos, que están implicados en la conceptualización de Blumer, pero que no articula de manera completa: los principios de la determinación interactiva, de simbolización, de emergencia y de la acción humana.

El *principio de la determinación interactiva* requiere considerar los contextos interactivos o las redes de relaciones en las que los sujetos están atrapados e inmersos. Para cualquier propósito práctico, ni el individuo o la sociedad, ni el yo o el otro, son ontológicamente previos, sino que existen solamente en relación de uno con el otro; solo se les puede comprender completamente a través de su interacción, sea de hecho, virtual o imaginada.

El *principio de simbolización* resalta los procesos mediante los cuales los sucesos y condiciones, artefactos y edificios, personas y agregaciones, y otras características del entorno asumen significados particulares, convirtiéndose en objetos de orientación que provocan sentimientos y acciones especificables. Este principio está en el núcleo de la conceptualización del IS de Blumer y es la preocupación central de la perspectiva. Sin embargo, fijarse demasiado en la generación de significados y en los procesos interpretativos asociados puede llevar a dos supuestos erróneos: 1) la socialización es una cuestión continuamente problemática para los actores sociales; 2) estamos, por tanto, continuamente comprometidos con el trabajo interpretativo de dar sentido al mundo social cuando nos lo encontramos y negociamos a lo largo de la vida diaria. Estos supuestos fallan en reconocer la medida en que tales símbolos y los significados que transmiten están, a menudo, quizá rutinariamente, inmersos en, y son reflejos de contextos organizativos y sistemas de significados culturales existentes (Snow, 2001, p. 371).

El *principio de emergencia* abarca procesos a partir de los cuales surgen nuevas o revitalizadas entidades sociales, estados cognitivos y emocionales que constituyen puntos de partida, desafíos y clarificaciones o transformaciones de las rutinas, prácticas o perspectivas de cada día. Este principio llama la atención sobre el lado no convertido en hábito de la vida social y su carácter dinámico y, por tanto, sobre el potencial para el cambio, no solo en la organización y textura de la vida social, sino también en los significados y sentimientos asociados (Snow, 2001, p. 372).

El *principio de la acción humana* resalta el carácter activo y deliberado de los actores humanos. Los seres humanos son considerados no como robots que responden de manera mecánica a directivas o códigos internos, ni como actores sociales pasivos que se comportan meramente de acuerdo con directivas y restricciones estructurales y culturales existentes. Los factores biológicos, estructurales y culturales no son descartados en la determinación y explicación de la conducta. Más bien, el IS considera estos factores como predisposiciones o restricciones sobre la acción, sin que determinen de manera automática o necesaria el carácter de esa acción (Snow, 2001, p. 373).

3. SIGNIFICADO E INTERPRETACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: INTERACCIONES EN EL AULA Y EL PAPEL DEL PROFESOR

De acuerdo con Radford (2011), el estudio de la interacción es uno de los temas que revela muy bien diferencias teóricas y cambios paradigmáticos recientes en educación matemática. Supone un cambio significativo en la educación matemática hacia una perspectiva social de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y por tanto una reconceptualización del papel de los estudiantes y del profesor. Además, implica un cambio en la manera de entender el significado como algo estable que refiere a las estructuras y la sintaxis de las matemáticas, para asumir la perspectiva social de que el significado es relativo y construido en los procesos de comunicación e interacción.

En el campo de la educación matemática también ha habido cierta preocupación por estudiar los procesos a través de los cuales las personas generan significados en los contextos sociales. Algunos de estos ámbitos son los intentos por comprender el papel que desempeñan las interacciones en el aula para el aprendizaje de las matemáticas (Chronaki y Christiansen, 2005; Schwarz *et al.,* 2009); la aproximación metodológica del enactivismo (Reid, Brown, Coles y Lozano, 2015), y los procesos a través de los cuales los profesores aprenden el conocimiento necesario para enseñar y desarrollan formas de usarlo para realizar las tareas profesionales vinculadas a enseñar matemáticas (Llinares y Olivero, 2008).

Las diferentes aproximaciones adoptadas en las investigaciones sobre la comunicación y la interacción en educación matemática reflejan distintas perspectivas. Éstas consideran la comunicación como registro, representaciones y contextos, enfatizando la interacción social y la actividad en el aula, así como la comunicación como una práctica (Chronaki y Christiansen, 2005). Además, desde el enactivismo se enfatiza la manera en que la cognición da forma, o es formada, por el entorno en el que debe actuar (Reid *et al.,* 2015). El foco sobre la comunicación en el aula enfatiza no solo lo que sucede (lo que es dicho por los participantes), sino también los significados y valores sobre cómo se considera el aprendizaje. También se subraya la manera en que los participantes (profesores y alumnos) dan sentido a sus experiencias en el aula como miembros de una comunidad de práctica, y el modo en que el uso ritualizado del lenguaje permite caracterizar los sucesos en el aula (Coles, 2015).

El foco sobre la manera en que los profesores y estudiantes para profesor dotan de significado e interpretan las situaciones en las que se encuentran, como una referencia para su aprendizaje y desarrollo profesional, es evidenciado desde diversas perspectivas. Las aproximaciones sobre el aprendizaje situado (Lave y Wenger, 1991; Wenger, 1998) o sobre el carácter discursivo del conocimiento (Wells, 1999), usadas para entender el aprendizaje y desarrollo de los profesores de matemáticas, manifiestan diferentes posturas que el foco sobre el lenguaje, el conocimiento y los procesos de negociar los significados ha adoptado en educación matemática.

Un aspecto que está recibiendo atención en las investigaciones interesadas en el

papel de las interacciones en el aula para la construcción y transformación del conocimiento (Schwarz *et al.,* 2009) es el rol del profesor como uno de los agentes implicados. Radford (2011) llama la atención sobre si la mera interacción en el seno de los grupos de trabajo, con el profesor como gestor de las situaciones, puede ser suficiente para que los estudiantes se apropien de los contenidos curriculares y las formas complejas de la cultura que incorporan. ¿Cuál debería ser el papel del profesor en un modelo didáctico que concede un papel clave a la interacción social en el aprendizaje? ¿En qué medida el estudiante puede aprender de manera autónoma con una mínima guía por parte del profesor? ¿Qué relación debe existir entre el diálogo y la comunicación y el conocimiento disciplinar? Esta problemática ha sido abordada por Godino, Batanero, Cañadas y Contreras (2016), aportando razones a favor de un modelo de instrucción de tipo mixto en el que la indagación y la resolución de problemas por parte de los estudiantes tienen un papel protagonista, pero también lo tiene el profesor como transmisor y gestor de los conocimientos de la cultura matemática cuyo aprendizaje se pretende.

Para Radford, la importancia de la interacción sobrepasa los límites de ser un mero instrumento para facilitar el aprendizaje de los contenidos disciplinares, incluso de ser un medio para hacer ciudadanos críticos con las estructuras de poder existentes. La interacción es esencial para la constitución del propio yo como personas; "la interacción es el proceso fundador del yo, el proceso constitutivo mediante el cual yo llego a ser una entidad transformada y continuamente en transformación en la cadena histórica y cultural del Ser" (Radford, 2011, p. 113).

4. PROYECCIÓN DEL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO EN EL DESARROLLO DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En esta sección incluimos reflexiones que se refieren a la línea de investigación sobre el desarrollo y aplicación del EOS del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino *et al.,* 2007). Como ya se ha indicado, además de la interacción son centrales en el IS las nociones de significado, interpretación, simbolización, emergencia, así como la relatividad y dependencia de los significados respecto de los contextos sociales donde tiene lugar la actividad humana. A continuación, intentaremos mostrar el uso de estas nociones desde el EOS, que son centrales no solo en el componente instruccional del EOS, sino también en el componente epistémico (significados institucionales, entendidos bajo supuestos pragmatistas-antropológicos) y ecológico.

4.1. Significados institucionales y personales

La distinción entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos y su interpretación en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas (Godino

y Batanero, 1994; Godino *et al.,* 2007; Font *et al.,* 2013) tiene una fuerte conexión con los principios del IS. Se asume como principio básico que el conocimiento matemático tiene una doble realidad: personal o cognitiva, y también institucional o social.

En el EOS se asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, por lo que la actividad de resolución de problemas se considera elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión epistemológica se hace operativa con la noción de *práctica matemática* y asumiendo su relatividad institucional y personal. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. El conocimiento, como es propio de las aproximaciones socioculturales, se considera inmerso en formas culturales de pensamiento imbricadas con una realidad simbólica y material que proporciona la base para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos y los conceptos e ideas que se forman de ellas.

4.2. La noción de objeto y emergencia

La matemática es una actividad y es también un sistema lógicamente organizado de objetos. En Font *et al.* (2013) se propone una ontología para el análisis de la actividad matemática, cuyo punto de partida es la noción general de objeto propuesta en el IS.

Inicialmente usamos la expresión "objeto matemático" como sinónimo de *concepto matemático*. Más adelante extendemos su uso para indicar cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática. Este uso general o débil de objeto es el que se hace también en el interaccionismo simbólico. No obstante, para el análisis detallado de la actividad matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el EOS ha elaborado una tipología explícita de objetos matemáticos y de los respectivos procesos de los cuales emergen (Font *et al.,* 2013).

4.3. Modelización de las interacciones en el aula

El artículo de Godino y Llinares (2000) sirvió de base para profundizar en el desarrollo del sistema teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática iniciado en Godino y Batanero (1994), en su componente instruccional, esto es, el diseño y gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En Godino, Contreras y Font (2006) se proponen herramientas específicas para el análisis de los procesos

instruccionales, en particular la noción de configuración didáctica y sus tipos teóricos básicos.

El modelo de instrucción (relación entre enseñanza y aprendizaje de un contenido específico) que se asume está basado en los principios de la psicología cultural/discursiva (Lerman, 2001; Radford, 2008), la cual atribuye un papel clave a la noción de "zona de desarrollo potencial" (Vigotsky, 1986). En particular, se comparte el principio de aprendizaje formulado por Radford (2008, p. 10):

> El aprendizaje es el logro de una pieza de conocimiento culturalmente objetiva que los estudiantes consiguen mediante un proceso social de objetivación mediado por signos, lenguaje, artefactos e interacción social a medida que los estudiantes se implican en formas culturales de reflexión y acción.

En el enunciado de este principio se hace referencia a la interacción social y al papel mediador de los signos, lo que lleva a pensar en su estrecha relación con el IS.

Para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción, la noción de *configuración didáctica* constituye la principal herramienta metodológica introducida en el EOS (Godino *et al.,* 2006). Dicha noción tiene en cuenta la trama de acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar una situación-problema. La secuencia de configuraciones didácticas constituye una *trayectoria didáctica* mediante la cual se aborda el análisis de la instrucción a nivel macro.

4.4. Dimensión normativa

Las normas que regulan el proceso de enseñanza-aprendizaje han sido objeto de investigación en didáctica de las matemáticas, principalmente por los autores que basan sus trabajos de manera más o menos explícita en el IS e introducen nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995). Así mismo, la noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau (2002) y constituye una pieza clave en la teoría de situaciones didácticas. En todo caso se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como "micro-sociedad", que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. El foco de atención en estas aproximaciones ha sido principalmente el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos.

Desde el "contrato interaccionista" y el "brouseauniano", la perspectiva del EOS considera necesario responder a las cuestiones:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo establece las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

En Godino, Font, Wilhelmi y de Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos, teniendo en cuenta el conjunto de normas que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.
- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los procesos de estudio, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

4.5. Desarrollo de la competencia docente de análisis de procesos instructivos

El EOS se ha interesado, en una primera fase de su desarrollo, en abordar problemas de fundamentación de la investigación en educación matemática que se refieren esencialmente a aspectos epistemológicos, semióticos y cognitivos implicados en la misma. Recientemente, los supuestos y herramientas teóricas desarrolladas se están aplicando en la construcción de un sistema de categorías de conocimientos y competencias que oriente la formación de profesores de matemática (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) (Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, CCDM). Se considera que la perspectiva pragmática sobre el significado, complementada con la tipología de objetos matemáticos que propone el EOS, así como las herramientas para el análisis de los procesos instructivos (configuraciones didácticas, dimensión normativa e idoneidad didáctica), pueden ser útiles para que los profesores comprendan los procesos de enseñanza y aprendizaje, y sean capaces de diseñar, gestionar y evaluar dichos procesos.

5. PROYECCIÓN DEL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR PROFESIONALMENTE"

Las reflexiones sobre el papel del lenguaje en el aprendizaje, la noción de significado y las relaciones entre el conocimiento y el discurso derivadas de la perspectiva del IS

subrayan las facetas interdependientes de toda actividad, asumiendo la complementariedad entre la cultura como reflejo de lo social, y lo personal, construido sobre una perspectiva vigostkiana (Wells, 1999). Un aspecto relevante de esta perspectiva en educación matemática es el papel del discurso en la construcción del conocimiento en el ámbito particular de la formación de profesores (Ivars y Fernández, 2018; Llinares y Olivero, 2008). El desarrollo de agendas de investigación específicas, centradas en el aprendizaje del profesor de matemáticas que subrayan esta relación, permite reconocer perspectivas socioculturales en la conceptualización del proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas. Tales perspectivas subrayan la relación entre lo social y lo personal en la producción y representación de la práctica de enseñar matemáticas.

5.1. Producir y usar representaciones de la práctica como una forma de conocimiento profesional

En las agendas de investigación centradas en el aprendizaje del profesor es posible rastrear una herencia de la perspectiva interaccionista en las referencias sobre los procesos a través de los cuales los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento para describir e interpretar las situaciones de enseñanza y justificar las decisiones de acción. Teniendo en cuenta que la enseñanza de las matemáticas es una práctica, manejar el discurso de la práctica es un aspecto central del proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas, estableciéndose relaciones entre el discurso profesional y llegar a conocer, cuando el aprendizaje ocurre en actividades específicas. Aquí, un aspecto relevante es cómo caracterizar los procesos de construcción del conocimiento sobre la práctica de enseñar matemáticas por parte de los estudiantes para profesor (Llinares y Valls, 2009). En este contexto, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesor se relacionan con otras dimensiones que definen la calidad del discurso producido. Esta situación genera cuestiones específicas que intentan aportar una explicación del aprendizaje de los estudiantes para profesor, y en particular de los procesos de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Desde un punto de vista conceptual, Wells (1999) indica que es en la descripción de los fenómenos observados donde se puede producir progreso, en el sentido de que compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional a esta hipótesis, esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un "artefacto del conocimiento" sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar (Llinares y Olivero, 2008).

Este planteamiento subraya el papel del discurso generado para describir y explicar la práctica de enseñar matemáticas en el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por

ejemplo, cuando los estudiantes para maestro que están observando una clase de matemáticas tienen que *identificar* aspectos relevantes de la situación desde la perspectiva del aprendizaje matemático y deben *interpretarlos* para dotarlos de sentido y poder generar una explicación de lo que observan más allá de los aspectos superficiales. Este proceso a través del cual los estudiantes para profesor de matemáticas se implican en dotar de sentido a la práctica de enseñar matemáticas, es una manifestación de la competencia docente que permite generar un esquema interpretativo que puede guiarles en su acción futura. En este proceso, el estudiante para profesor debe usar el conocimiento disponible (recursos de información) e instrumentos para representar el conocimiento (por ejemplo, mediante el uso de casos para ilustrar alguna característica relevante de la enseñanza de las matemáticas). De esta manera, podemos entender que el proceso de dotar de sentido a través del uso del discurso (lenguaje) para describir y explicar es un proceso de razonamiento basado en el conocimiento de las diversas facetas que caracterizan los procesos de enseñanza-aprendizaje, en especial de las interacciones en el aula y del uso de medios de expresión y comunicación.

5.2. Conceptualización de la competencia docente "mirar profesionalmente"

Mason (2002) indica que la competencia docente "mirar profesionalmente" *(the discipline of noticing)* permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional, a diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Mason indica algunas características que pueden ayudar a desarrollar un proceso de observar con sentido, de manera efectiva *(disciplined noticing)*. Estas características son:

1) desarrollar la sensibilidad y mirar con sentido, que se vincula a la identificación de lo que puede ser considerado relevante, teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación *(intentional noticing);*
2) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios *(marking and recording);*
3) reconocer posibles alternativas de acción *(recognizing choices)*, y
4) validar lo observado, intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido *(validating with others)*.

Por su parte, Van Es y Sherin (2002) y Sherin (2001) caracterizan la competencia docente "mirar profesionalmente" considerando tres destrezas:

- *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza;
- *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula;

- realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje.

Esta forma de plantear la relación entre las acciones cognitivas de identificar, registrar e interpretar hace más explícita la necesidad de considerar el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para guiar la observación y la interpretación de los hechos identificados y descritos, es decir, producir y usar una representación de la práctica. Sherin y sus colegas introducen en esta forma de entender el desarrollo de la competencia docente de manera general, la necesidad de que en el proceso de producir y usar una representación de la práctica (interpretar el registro de la práctica) se explicite la relación entre las evidencias y las "ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje".

De este modo, la conceptualización de la competencia docente "mirar profesionalmente" pone de manifiesto la necesidad de particularizarse, considerando lo específico del conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en determinados ámbitos curriculares. Así, se definen dos dimensiones (lo cognitivo y lo matemático), cuya interrelación permite entender la coordinación de los procesos cognitivos de identificar lo relevante e interpretarlo, estableciendo relaciones con la teoría como una manera de justificar las decisiones de acción como formas de producir y usar representaciones de la práctica.

Entonces, la relación entre el discurso generado para producir y usar representaciones de la práctica y el conocimiento permite asumir que el proceso de llegar a ser un profesor puede ser visto en términos de una mayor "expertise" en el discurso profesional y en la manera en que la evolución en el lenguaje permite problematizar las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Es decir: adoptar una perspectiva sociocultural (Wells, 1999) para entender y explicar el aprendizaje de los estudiantes para profesor recoge ideas derivadas del IS en el sentido de que aprender la práctica de enseñar matemáticas se ve como un proceso intencional que usa y produce representaciones de los registros de la práctica (descripciones de interacciones en el aula, respuestas de alumnos para resolver problemas específicos, etcétera).

5.3. Dotar de sentido a la enseñanza para actuar: proceso de razonamiento basado en el conocimiento

La perspectiva de considerar la competencia docente "mirar profesionalmente" como un proceso de razonamiento basado en el conocimiento incide en subrayar la influencia del conocimiento específico (de matemáticas y sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas) para dar forma a los aspectos relevantes en una situación de enseñanza que es posible atender *(selective attention and intentional noticing),* y a la manera en que se dota de significado *(knowledge-based reasoning)* para justificar las nuevas pro-

puestas de enseñanza. La competencia "mirar profesionalmente" como un proceso de razonamiento basado en el conocimiento que permite producir y usar representaciones de la práctica subraya la habilidad para analizar ciertos aspectos de una situación (por ejemplo, las características que puede adoptar el discurso matemático en el aula o características de la comprensión matemática de los estudiantes) y vincularlos a principios teóricos o conocimiento como una manera de interpretarlos *(disciplined noticing and recognizing choices)* (Mason, 2002).

Roig, Llinares y Penalva (2011) analizan la manera en que estudiantes para profesor reconocen, en una situación de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, oportunidades para que los alumnos exploren ideas desde diferentes perspectivas, al permitirles compartir lo que piensan y realizar conexiones entre sus procesos de resolución de problemas, esto es, la manera en que los estudiantes para profesor reconocen patrones de interacción considerando las regularidades interactivas constituidas entre el profesor y los estudiantes como oportunidades de aprendizaje matemático.

En la década de 1990, el IS subrayó la relevancia de los patrones de interacción como regularidades que el observador describe y que permiten estabilizar los procesos de negociación de los significados. Actualmente, la agenda de investigación dirigida a conceptualizar y describir el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" centra su atención en el modo en que los estudiantes para profesor aprenden a identificar la relevancia de los patrones de interacción como un proceso de negociación de significados de las prácticas matemáticas en el aula, es decir, las ideas sobre la comunicación matemática sintetizadas desde perspectivas como el IS, y consideradas conocimiento generado en el ámbito de la educación matemática, como instrumentos para ayudar al profesor a dar sentido a la enseñanza de las matemáticas.

6. APORTES ADICIONALES

La oportunidad brindada para reflexionar sobre nuestro artículo (Godino y Llinares, 2000), en el que presentamos una caracterización de algunas investigaciones en educación matemática basadas en el IS, nos ha permitido profundizar en los principios de esta perspectiva sociológica de investigación y su reflejo en el campo de la investigación educativa, en particular en la definición de nuevas perspectivas teóricas y sobre la formación de profesores de matemáticas. El análisis y la síntesis realizados nos permiten explorar futuras direcciones y referentes de la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas.

Hemos podido apreciar que en educación matemática siguen recibiendo gran atención las perspectivas que complementan las aproximaciones sociales e individuales del aprendizaje. Esta atención se refleja en los estudios de las interacciones en aula, el papel del lenguaje en la construcción social del conocimiento, la importancia del discurso, de los diversos medios de representación y del significado en los procesos de enseñanza y

aprendizaje. Además, también permite generar referencias teóricas para describir y explicar el aprendizaje y desarrollo profesional de los profesores. Sin embargo, en la revisión de la bibliografía más reciente en educación matemática observamos que apenas se hace referencia explícita al IS; se aplican otros marcos teóricos, aparentemente desconectados del IS, lo cual puede suponer un enriquecimiento de las herramientas teóricas usadas para comprender los procesos de investigación y formación de profesores, pero al mismo tiempo puede introducir confusión ante la profusión de teorías desconectadas unas de otras.

Consideramos que la articulación de teorías *(networking theories)* (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014) abre el camino a la posibilidad de estudiar las conexiones entre diferentes teorías socioculturales usadas en educación matemática y el IS. Desde la *articulación de teorías* (Prediger *et al.,* 2008) se considera que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como campo científico. Dentro de esta problemática, la reflexión sobre el IS realizada en este trabajo permite pensar en la potencial utilidad de estudiar las relaciones en los fundamentos de los dos focos de investigación sobre formación de profesores que hemos descrito: la competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza y el CCDM como referencia para que el profesor pueda analizar, representar y valorar la práctica de enseñar matemáticas. Indagar sobre el papel que perspectivas sociológicas como el IS desempeñan en ambos focos de investigación puede ser una estrategia metodológica para pensar en las concordancias y complementariedades de las mismas, lo cual constituye un problema abierto a futuros desarrollos.

Los intentos de explorar la complementariedad de los focos de las investigaciones pueden poner de manifiesto los fundamentos sociológicos comunes relativos a la relación entre conocimiento y discurso, y la manera de entender los procesos de llegar a conocer. Denzin (1992) presenta el IS incluido en una perspectiva más amplia de los estudios culturales, resaltando el papel crucial de la comunicación. "Un término olvidado conecta las palabras 'simbólico' e 'interacción'. Ese término es 'comunicación'. Tradicionalmente está incluido en la palabra 'simbólico', ya que todos los interaccionistas simbólicos saben que los seres humanos se comunican mediante el uso del lenguaje y los símbolos" (p. 96).

El estudio de la cultura también se podría llamar el estudio de la comunicación, y ésta es el proceso que produce símbolos significantes. Según esta perspectiva ampliada del IS, muchas de las investigaciones en educación matemática están interesadas en las cuestiones socioculturales (Roth y Radford, 2011; Jablonka, Wagner y Walshaw, 2013). No obstante, identificar en estas investigaciones en qué medida se asumen los presupuestos específicos del IS descritos en la sección 2 es un tema abierto que requiere más investigación.

Los interaccionistas simbólicos no están interesados en la construcción de teorías

generales o totalizadoras de lo social. Prefieren escribir narrativas locales sobre cómo las personas hacen las cosas juntas. Estas narrativas son usualmente etnografías realizadas a pequeña escala, historias de aula, entrevistas en profundidad, estudios de laboratorio, análisis históricos, etcétera. "Los interaccionistas no creen en preguntar cuestiones sobre 'por qué'. Se plantean, en su lugar, cuestiones sobre 'cómo'. Por ejemplo, ¿cómo se estructura, vive y se da significado a un segmento dado de experiencia?" (Denzin, 1992, p. 24). Este énfasis básicamente descriptivo del IS puede suponer una limitación para abordar las cuestiones de tipo predictivo, e incluso normativo, a las cuales debe atender una disciplina tecnocientífica como es la educación matemática, y en general las ciencias de la educación.

Posiblemente el IS deba ser complementado con otros desarrollos para comprender la complejidad del fenómeno de aprendizaje de las matemáticas, y en general del conocimiento científico, debido a la naturaleza abstracta de los objetos y procesos cuyo aprendizaje se pretende.

> La investigación interpretativa en educación matemática no puede dilucidar directamente los procesos de comprensión emergentes en la interacción matemática real simplemente mediante la mera observación. La comprensión basada en la investigación de los procesos de comprensión en la interacción matemática requiere métodos de investigación y teorías como nexo científico y racional, para integrar las observaciones empíricas de la interacción matemática en un marco teórico coherente. (Steinbring, 2015, p. 281)

Si la matemática es más bien un proceso, una actividad, que un producto, entonces la mera interacción simbólica y la comunicación pueden no ser suficientes para comprender cómo se aprenden las matemáticas y cómo aprende el profesor.

RECONOCIMIENTOS

La participación de S. Llinares en este trabajo ha sido apoyada por el Proyecto I+D+i EDU2017-87411-R del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, Agencia Estatal de Investigación, España, y del proyecto Prometeo 2017/135 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana. La participación de J. D. Godino se realiza en el marco del proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. En R. Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 133-146). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. En H. G. Steiner y A. Vermandel (Eds.), *Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)* (pp. 174-168). Antwerp, The Netherlands: Proceedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Berlin, Germany: Springer.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. New York, USA: Kluwer.

Chronaki, A. y Christiansen, I. M. (2005). *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. Charlotte, North Carolina, USA: IAP.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*. Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Coles, A. (2015). On enactivism and language: Towards a methodology for studying talk in mathematics classrooms. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 47*(2), 235-246.

Denzin, N. K. (1992). *Symbolic interactionism and cultural studies: The politics of interpretation*. Oxford, United Kingdom: Blackwell Publishing.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 90-92.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2016). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae, 18*(4), 29-47.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematics Education of Pre-service Elementary Teachers. ICME-13, Monograph* (245-259). London, England: Springer.

Ivars, P., Buforn, A. y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (Comp.), *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo XXI* (pp. 65-88). Caracas, Venezuela: CIE-Universidad Central de Venezuela.

Jablonka, E., Wagner, D. y Walshaw, M. (2013). Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. En M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 41-67). London, England: Springer.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 87-113.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53-70.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. y Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers: Technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 155-180). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37,* 247-271.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing.* London, United Kingdom: Routledge-Falmer.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods

for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. The notion and role of theory in mathematics education research*. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/253274896

Radford, L. (2011). Book review: classroom interaction: Why is it good, really? *Educational Studies in Mathematics, 76*, 101-115.

Reid, D., Brown, K., Coles, A. y Lozano, M. (Eds.) (2015). Enactivism methodology in mathematics education research [Special Issue]. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 47*(2).

Roig, A. I., Llinares, S. y Penalva, M. C. (2011). Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea. *Educación Matemática, 23*(3), 39-65.

Roth, W. y Radford, L. (2011). *A cultural–historical perspective on mathematics teaching and learning*. London, United Kingdom: Springer.

Schwarz, B., Dreyfus, T. y Hershkowitz, R. (Eds.). (2009). *Transformation of knowledge through classroom interaction*. New York, USA: Routledge.

Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T. Wood, B. Scott Nelson y J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Mahwah, New Jersey, USA: Erlbaum.

Snow, D. A. (2001). Extending and broadening Blumer's conceptualization of symbolic interactionism. *Symbolic Interaction, 24*(3), 367-377.

Steinbring, H. (2015). Mathematical interaction shaped by communication, epistemological constraint and enactivism. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 47*(2), 281-293.

Van Es, E. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry. Toward a sociocultural practice and theory of education*. New York, USA: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. New York, USA: Cambridge University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático

Núria Planas y Kaouthar Boukafri
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Resumen: Tras décadas de investigación sobre el papel de las normas sociomatemáticas en educación matemática, en este capítulo revisamos el momento histórico de esta línea de estudio e introducimos la noción de *norma fundamental*. Mientras que las normas sociomatemáticas aportan criterios prescriptivos para valorar la adecuación de prácticas matemáticas de aula, hay una norma de orden superior que fundamenta y unifica el conjunto de prácticas a modo de sistema cultural. Si esta norma se pudiera expresar por escrito, simplemente diría que *el alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas*. Este es el punto de partida de la lectura renovada del caso de Khadija, documentado en Planas (2002). Reconocemos la fuerte influencia en nuestro pensamiento actual de las teorías sociales, culturales y políticas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas.

1. UN NUEVO CONTEXTO PARA LA NORMA SOCIOMATEMÁTICA

Preguntarse qué genera un obstáculo en el aprendizaje tiene dos primeras lecturas, según si se toma el obstáculo como agente –¿qué genera, cómo y por qué?– o como resultado –¿por qué, dónde y cómo se genera? Ambas interpretaciones son posibles, además de complementarias, puesto que sitúan cualquier obstáculo a la vez como proceso y producto de un complejo "estado de cosas" con influencia en el aprendizaje. Estudios recientes (Planas y Valero, 2016) abogan por la existencia de un denominador común social, cultural y político en las condiciones que preparan, sostienen y suceden a un obstáculo, pero sobre todo problematizan la lógica misma de la identificación de obstáculos.

Centrar una pregunta en la idea de obstáculo es una opción de estudio ideológicamente distinta a pensar en la idea de oportunidad o bien en la relación entre oportunidad y obstáculo. En este capítulo examinamos aspectos de la generación de oportunidades en el aprendizaje matemático, con atención a la tensión dialéctica entre obstáculos y oportunidades. Complementamos así, y matizamos, contenidos del artículo "Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación" (Planas, 2002), publicado en *Educación Matemática*. Ahí todavía no se consideró el doble potencial investigador y pedagógico de las "oportunidades de aprendizaje", a

pesar de que otros autores cercanos ya sugerían avanzar en esta dirección (véase, por ejemplo, otro artículo en *Educación Matemática*, Godino y Llinares, 2000, p. 83).

El propósito de Planas (2002) era señalar consecuencias de la experiencia de obstáculos en la participación matemática de los alumnos, con interés incipiente por indagar aspectos sociales, culturales e históricos ligados a la cultura normativa del aula de matemáticas:

> En este artículo, se señalan aspectos de las interacciones sociales del aula que parecen estar vinculados con obstáculos en la participación de aquellos alumnos que no se ajustan a las normas de actuación representadas por los grupos dominantes. [...] Las múltiples formas de legitimar unas normas y, a su vez, de excluir otras tienen claras implicaciones sobre aspectos de equidad en tanto que afectan las condiciones de participación de ciertos grupos de alumnos. (p. 6)

Ese artículo resultó de un trabajo de tesis doctoral (Planas, 2001) influenciado por la concepción constructivista e interaccionista de norma sociomatemática (Bowers, Cobb y McClain, 1999; Yackel y Cobb, 1996). Se adoptaba el supuesto de que el aprendizaje matemático requiere el aprendizaje de reglas subyacentes a formas culturalmente establecidas de participar en la escuela y en la práctica de aula. Desde entonces, en el marco del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM), con sede en la Universitat Autònoma de Barcelona, hemos refinado el análisis de interacciones en clase y hemos comprendido que dicho análisis puede utilizarse para detectar obstáculos e interrupciones, pero también oportunidades de aprendizaje y continuidades en la participación. Llevamos a cabo una agenda de investigación sobre la producción y distribución de oportunidades de aprendizaje matemático, con énfasis en la naturaleza, el papel y el cuestionamiento de lo normativo. El planteamiento de fondo es que el estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático implica el de la construcción de las normas del aula de matemáticas. Nuestra tesis central es la prevalencia y permanencia de una *norma fundamental*, que organiza y unifica el conjunto de normas sociomatemáticas, con implicaciones para la actividad matemática del alumno en clase y su valoración. De ello hablaremos tras esta introducción.

Nuestra agenda actual y nuestros argumentos difícilmente podrían haber surgido en una época anterior. La trayectoria de GIPEAM se sitúa en un área de investigación que ha cambiado sustancialmente en las últimas décadas. El papel de las teorías sociales del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas ha dejado de ser menor, y foros como los congresos del International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) y de la European Society for Research in Mathematics Education (ERME) han experimentado un aumento sostenido de referencias a estas teorías (Planas, Morgan y Schütte, 2018; Planas y Valero, 2016). A tal desarrollo han contribuido muy especialmente las lecturas más precisas y completas de lo social en la obra de Vygotsky (Roth, 2018; Roth y Radford, 2011). El nuevo contexto histórico ha

impactado en la concepción de norma sociomatemática en el área en general, y en GIPEAM en particular.

Así como en la década de 1990 la noción de norma sociomatemática surgía al observar que las teorías psicológicas del desarrollo humano no bastaban para explicar el aprendizaje matemático en entornos de interacción en clase, a inicios del siglo XXI empieza a documentarse la insuficiencia explicativa de las teorías constructivistas e interaccionistas de la actividad, que siguen concibiendo mente y pensamiento como último eslabón de un orden lineal, donde el aprendizaje matemático se facilitaría en el grupo y se produciría en el individuo. Una variedad de perspectivas (p. ej., Brown, 2010; Chronaki y Planas, 2018; Herbel-Eisenmann, 2003) ha señalado que este supuesto de linealidad en el aprendizaje –de lo social a lo individual– oculta y naturaliza la constitución social, cultural y política de la matemática escolar, de la enseñanza y del aprendizaje. El área ha visto crecer miradas críticas a los procesos de naturalización de culturas del aula de matemáticas que relegan sistemáticamente ciertos modos de hablar y de hacer y, con ello, reducen la producción y distribución equitativa de oportunidades de aprendizaje matemático (Hunter, Civil, Herbel-Eisenmann, Planas y Wagner, 2018). Sabemos que las normas de clase no son socialmente neutras, didácticamente adecuadas *per se,* ni sinónimo de práctica necesaria, sino fruto de la constitución diferenciada de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela.

En lo que sigue, organizamos el capítulo con una reflexión teórica sobre lo que llamamos norma fundamental, que ordena de manera tácita la actividad matemática del alumno en clase y con la cual se da significado al resto de normas. Nos preguntamos qué aporta la visión de esta norma fundamental a la comprensión del caso que se discutió en el artículo de 2002, el de Khadija, una alumna de 17 años de edad que llevaba cinco en el sistema escolar catalán. Se examinaron normas sociomatemáticas puestas en práctica durante una sesión de clase y se describieron interpretaciones distintas de esas normas, pero no se indagó el fundamento subyacente a pensar unas interpretaciones más adecuadas que otras. Se discutió la interrupción en la participación de Khadija, sin considerarse el juego involucrado en la naturalización de una cierta cultura de la matemática escolar.

2. ¿QUÉ TIENEN EN COMÚN LAS NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS?

Yackel y Cobb (1996) introducen la noción temprana de norma, con la siguiente definición: "Las regularidades en la actividad comunitaria o colectiva del aula que pueden considerarse conjuntamente establecidas por profesor y alumnos como miembros de la comunidad del aula" (p. 178) [*nuestra traducción*]. Estas regularidades, de carácter social, se denominan sociomatemáticas cuando son específicas de la actividad matemática (p. ej., qué cuenta como explicación en clase de matemáticas; qué cuenta como ejemplo de un objeto matemático), por lo que no se aplican rutinariamente en clases de geografía, historia o biología. Si bien el término se acuña desde la línea interaccionista

de investigación en educación matemática, sus orígenes se remontan a la tradición sociológica de la década de 1980.

Bauersfeld (1988) y Voigt (1985) indican la existencia de regularidades o patrones de interacción normativos en el aula de matemáticas, constitutivos de rutinas y obligaciones que el alumno debe aprender. Una de las funciones del profesor de matemáticas en su enseñanza es comunicar proposiciones declarativas de tipo técnico (p. ej., cuántos vértices tiene un cuadrilátero; cuáles son las ternas pitagóricas), pero también rutinas y obligaciones que, en palabras de Roth y Radford (2011), históricamente han perpetuado un discurso subsidiario de la matemática escolar como género afín a la matemática. Así, es habitual la "transferencia" de rutinas de las matemáticas en la resolución de problemas o en la argumentación a la matemática escolar. En Planas, Arnal y García-Honrado (2018), se ilustran discursos de profesores donde los modos de hablar y de hacer en la resolución de un problema de probabilidad en clase se vinculan directamente con el quehacer en matemáticas ("En todos los casos se soluciona matemáticamente", p. 53; "Hemos conseguido resolverlo matemáticamente", p. 54).

Hasta hoy, las normas sociomatemáticas se han conceptualizado mayormente como una "clase" o tipo de normas que tienen en común las cualidades inmateriales de la definición de Yackel y Cobb (1996). Desde hace algún tiempo, en GIPEAM vemos importante incorporar otra cualidad común. Hay una norma fundamental que es expresión de orden, que subsume las sociomatemáticas y permite representarlas como parte de un sistema cultural unificado. Mientras que las normas sociomatemáticas aportan criterios prescriptivos de adecuación para prácticas matemáticas concretas –argumentar, explicar, justificar, modelar...–, hay una norma de orden superior con la función de validar la matemática escolar como un todo, que fundamenta el conjunto de prácticas. La interpretación de la adecuación de estas prácticas se da de acuerdo con una norma que remite a la experiencia de una cultura escolar, que se piensa única (Morgan, 2000) y con estado de necesidad (Chronaki y Planas, 2018; Roth y Radford, 2011).

Si esta norma fundamental se pudiera expresar por escrito, simplemente diría que *el alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas*. Es, por tanto, una norma con capacidad para producir interpretaciones de normas: la aplicación adecuada de una norma sociomatemática es la que haría, o la que se supone que haría, un profesor de matemáticas. La apropiación de esta norma llevada al extremo implica que solo es posible participar adecuadamente en clase de matemáticas si se supone y anticipa lo que haría un profesor de matemáticas. Uno de los problemas es el de la exigencia de generar suposiciones sin la garantía de acceso a referentes prácticos que las avalen. La norma fundamental es una norma deslocalizada que reposa en la experiencia histórica de la cultura escolar, donde lo adecuado no siempre se sabe ni siempre es observable en hechos inmediatos de clase. La propia representación del profesor de matemáticas es una representación deslocalizada, que no se corresponde con el profesor concreto presente en el aula a cada momento.

En un sentido amplio, tenemos que la norma fundamental es una condición

estructurante previa y de control de modos de hablar y de hacer en la valoración –y evaluación– de la actividad matemática de los alumnos en clase. Además de aprender a reconocer y utilizar el vocabulario y la gramática de la matemática escolar (Pimm, 1987), el aprendizaje matemático del alumno se concibe dentro de los límites de la actividad que eventualmente se observa y que se le supone al profesor de matemáticas. Nos encontramos con dos extremos y otro supuesto de linealidad. El aprendizaje se piensa como proceso lineal, que va de la lengua en uso del alumno –su discurso– hacia una lengua de las matemáticas que utilizaría un profesor de matemáticas en clase. Esta concepción persiste mediante discursos de idealización pedagógica de una lengua única de las matemáticas, hablada y escrita por un profesor unitario de matemáticas (Planas *et al.,* 2018). La norma fundamental tiene, así, el doble efecto de naturalizar la distancia entre la lengua en uso del alumno, por un lado, y la lengua en uso del profesor y de las matemáticas, por otro (Planas, 2018). El alumno se encuentra ante la paradoja de tener que aprender a tomar distancia de su propio discurso, en favor de hablar y de hacer unas matemáticas representadas por el discurso del profesor de matemáticas.

No parece haber una razón pedagógica en la diferenciación excluyente entre lenguas en uso del alumno y del profesor, por lo que las razones deben buscarse en otro orden de fines. La paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno es el resultado de una construcción social, cultural y política. En el marco global de lenguas y culturas oficiales (Planas, 2018), no es políticamente inocente la pretensión de comprender la enseñanza y el aprendizaje dando un valor marginal al discurso del alumno. En Barwell *et al.* (2016) se desvelan ideologías de déficit en torno a lenguas y culturas de alumnos de distintas edades y condiciones. Bajo estas ideologías, los modos de hablar y de hacer matemáticas distintos a los hegemónicos se asocian a carencias y dificultades del alumno. Las implicaciones de estas ideologías –hoy en día rechazadas como principio, pero no superadas– son especialmente dramáticas para el alumno sin los bienes sociales de consumo, ni el capital cultural y lingüístico de los grupos dominantes. *Este alumno debe hablar y escribir las matemáticas en clase como lo haría un profesor de matemáticas que se expresa con precisión en la lengua de instrucción y que es garante de la cultura oficial.* De ahí que las normas sociomatemáticas se apliquen como normas eminentemente sociales (Gorgorió y Planas, 2005) de un orden que incluye y alude al interior y al exterior del aula (Planas y Gorgorió, 2004). Lo que es normativo y lo que es anómalo fuera del aula también se representa como normativo y anómalo dentro.

En síntesis, las normas sociomatemáticas tienen en común su ordenación según una norma fundamental y su producción eminentemente social. Incluso en este contexto, hay margen de revisión e incidencia en las interpretaciones de normas en clase. La interpretación de normas es un proceso continuo de articulación de lo que se supone que haría un profesor de matemáticas, y de lo que ocurre en el terreno práctico de un aula. En el volumen 50(6) de *ZDM,* titulado "Research frameworks for the study of language in mathematics education", o en los capítulos del volumen editado por Hunter

et al. (2018), se relatan estudios sobre cambios en la interpretación del papel de ciertas lenguas de los alumnos, y de las matemáticas en la enseñanza y en el aprendizaje. Boukafri, Civil y Planas (2018), por su parte, muestran culturas de aulas de matemáticas con un uso flexible de las lenguas de los alumnos y de las matemáticas en la interacción. Si bien la norma fundamental establece que en la resolución de la tarea debe hablarse como lo haría un profesor de matemáticas, las dos profesoras de este estudio utilizan expresiones como "ir en diagonal" junto a terminología técnica para describir movimientos en el espacio. En la próxima sección volveremos sobre este juego dialéctico entre lenguas en uso.

A modo de los ciclos de experimentos de enseñanza y aprendizaje en la tradición interaccionista (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Cobb, Zhao y Dean, 2009), los trabajos mencionados en el párrafo anterior prueban que determinados aspectos de la cultura del aula de matemáticas se pueden modificar. Como en aquellos experimentos, la medida de control sigue siendo la intensidad y la amplitud de la participación matemática, con ajuste a la norma según la cual *el alumno debe hablar y escribir las matemáticas como lo hace un profesor concreto en una secuencia de sesiones de clase*. Se diseñan, implementan y evalúan prácticas de aula para la emergencia de discursos de reformulación de lo adecuado a través de hechos observables en clase. Se busca producir situaciones de enseñanza y aprendizaje que se someten a un ciclo de repeticiones hasta que su uso se vuelve social en clase. Así, otras interpretaciones de modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas en clase logran ganar validez por un camino distinto al de la representación de una cultura "natural" de la matemática escolar. Además de abrir la puerta a la aceptación de interpretaciones distintas, la lógica de los experimentos de enseñanza crea la posibilidad de pensar la cultura del aula de matemáticas como espacio autónomo, con capacidad de desarrollo y transformación.

3. REVISIÓN Y AMPLIACIÓN DEL CASO DE KHADIJA

En la investigación en educación y en la de GIPEAM, es habitual presentar hechos empíricos que se agrupan y estudian a la luz de teorías, para llegar a comprender aspectos de un fenómeno. La lectura de estos hechos los convierte en datos que sostienen explicaciones acordes con el alcance de las teorías utilizadas. En 2002, el caso de Khadija se construyó para explicar y relacionar dos fenómenos: el de interrupciones en la participación matemática en clase y el de diferencias en la interpretación de normas sociomatemáticas. Con énfasis en la respuesta psicológica de Khadija y en su "dificultad" por mantener la participación, se explicó que la interrupción era una reacción de la alumna ante la percepción de interpretaciones distintas para una misma norma. En 2018 seguimos viendo que aquellos datos informan del efecto en la participación de la diversidad de interpretaciones para normas específicas. No obstante, habiendo ampliado la lectura teórica con marcos discursivos y sociológicos, y siendo cautas en la atribución

de dificultades individuales, vemos razones para revisar el caso. Éste no es ajeno al juego dialéctico entre los modos de hablar y de escribir matemáticas esperados en clase de matemáticas y lo que acaba ocurriendo en la práctica. Precisamente en el seno de este juego se generan oportunidades de discutir normas de la cultura del aula, que son oportunidades de aprendizaje de modos de hablar y de hacer matemáticas en la escuela.

Para una lectura renovada del caso de Khadija, retomamos hechos de clase sobre los cuales se construyó el caso y cuyas transcripciones se publicaron en 2002. El cambio en la participación de Khadija se observó en una sesión, durante la búsqueda de cantidades de ingredientes para cocinar un pastel. Hay más datos de la sesión que no se llegaron a discutir, tales como los correspondientes a episodios donde se asemeja corrección matemática con corrección en la lengua de instrucción. Solo mencionamos brevemente un momento en el cual la alumna utiliza el término en catalán "polsim" (pellizco) como unidad de medida en "Uns cinc polsims de sal" ["Unos cinco pellizcos de sal"], a lo que el profesor responde: "Es diu un polsim, ni dos, ni tres" ["Se dice un pellizco, ni dos, ni tres"]. Si bien el profesor alude al carácter no contable del término, el episodio en su totalidad se centra en "cómo se habla", por delante de "cómo se determina la medida y por qué". Con este apunte queremos poner de relieve que, junto a la terna dada por las lenguas del alumno, del profesor y de las matemáticas, en los datos de 2002 también se observa el par dado por las lenguas de la instrucción y del alumno.

Por otra parte, nos referimos a datos orales que han pasado por dos modificaciones importantes al ser traducidos del catalán y luego transcritos. Hoy día, con la posibilidad de depositar ficheros de audio y video en repositorios abiertos y de anexar archivos digitales a las publicaciones, esta opción de presentación de datos nos crea un dilema que deberemos afrontar y resolver. No entramos a examinar la conversión de discurso hablado en discurso escrito, pero sí queremos señalar la diferencia que esto supone con respecto a estudios que analizan datos de foros virtuales y chats que no requieren transcripción. Tampoco entramos a examinar el hecho de presentar datos en una lengua cuando se ha utilizado de manera flexible más de una en los datos originales. Modificar el carácter multilingüe de los datos nos parece cada vez más problemático, por el mensaje tácito que se envía sobre la irrelevancia del sistema lingüístico en el desarrollo de la actividad matemática. Aun así, en los trabajos de GIPEAM donde no estudiamos el impacto de la alternancia de lenguas en el discurso matemático, por cuestiones de espacio hemos optado por mostrar solo fragmentos en la lengua original, a pesar de la pérdida que esto significa en términos de comprensión de la realización de la actividad. Dicho esto, reproducimos la versión en castellano del enunciado en catalán (Planas, 2002, p. 13):

> *Queremos cocinar un pastel de manzanas. La receta muestra los ingredientes para 3 personas, pero tenemos 10 invitados. ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesitamos comprar? A continuación, escribe los ingredientes para 10 personas.*

Ingredientes para 3	*Ingredientes para 10*
1 manzana grande	_____
2 huevos	_____
75 gramos de azúcar	_____
25 gramos de mantequilla	_____
100 gramos de harina	_____
1/2 limón	_____
1 pellizco de sal	_____

Durante la elaboración del caso en su versión de 2002, se buscaron momentos previos a la interrupción en la participación de Khadija que permitieran observar normas sociomatemáticas interpretadas en la resolución de la tarea. Se documentaron interpretaciones distintas de normas acerca del papel de la experiencia de vida en la resolución, y del uso de estrategias de redondeo de números decimales al número natural más cercano. Reproducimos un episodio de discusión en pequeño grupo (Planas, 2002, pp. 16-17), acompañado del texto original en catalán:

Khadija: Yo esto de que el pastel lo hagas como a ti te da la gana no lo veo muy claro... isi cambias tanto lo que te da al hacer las operaciones, el pastel al final no se va a parecer en nada! [*Jo això de què el pastís el facis com a tu et dóna la gana no ho veig molt clar... si canvies tant el que et dóna quan fas les operacions, el pastís al final no s'assemblarà en res!*]

Anna: ¡A ver! ¿Aquí, esto es un pastel de verdad o no? Porque en mi casa un pastel es para 10 o para 100 según como corto los trozos... [*A veure! Aquí, això és un pastís de veritat o no? Perquè a casa meva un pastís és per 10 o per 100 segons como tallo els trossos...*]

Mourad: ¿Tienes una manera mejor de hacerlo? [*Tens una manera millor de fer-ho?*]

Khadija: ¡En tu casa sois muy raros! Yo dejaría lo que da en las operaciones y luego el profe si quiere ya lo redondea. [*A casa teva sou molt raros! Jo deixaria el que dóna a les operacions i després si el profe vol ja ho arrodoneix.*]

Mourad: ¡Pero el profe te va a preguntar que lo redondees tú porque los decimales no te los va a dejar meter! ¿Y qué le vas a decir, que lo haga él? ¡Muy lista! ¡Tú por la vida andas muy mal! [*Però el profe et preguntarà que ho arrodoneixis tu perquè els decimals no te'ls deixarà posar! I què li diràs, que ho faci ell? Molt llesta! Tu per la vida vas molt malament!*]

Khadija: ¡A ti te parece mal todo lo que digo! ¿Tú dejarías las operaciones o no? [*A tu t'assembla malament tot el que dic! Tu deixaries les operacions o no?*]

Anna: ¡A mí no me líes! [*A mi no em lïis!*]

Khadija propone realizar cálculos para obtener soluciones numéricas, mientras que Anna y Mourad recurren a la experiencia de vida en la resolución de la tarea y dan

autenticidad a la historia contada en el enunciado. Mourad dice lo siguiente (Planas, 2002, p. 17):

> Bueno, primero hay que saber si lo que hay que redondear está bien puesto o no... esto de la sal yo no creo que esté bien... en los pasteles no se pone sal [...] Para que esté bien, bien, yo creo que la sal la tendríamos que sacar... y hay que poner más manzanas porque si no cómo te vas a enterar que el pastel es de manzanas... ¡podría ser de limón o de harina de sal! [*nuestra traducción*]

Cuesta suponer que un profesor de matemáticas modificaría el enunciado de una tarea dada por él para que la historia que se cuenta por escrito ganara en autenticidad. Se podría llegar a imaginar un profesor de matemáticas que habla sobre el enunciado de una tarea para finalmente "dejarlo tal como está". De hecho, Mourad usa expresiones tales como: "¿Y qué les vas a decir, que lo haga él?", sugiriendo que el enunciado no es discutible y que al profesor le interesa la solución numérica. Otra opción contrastaría con la utilización de historias relatadas en la matemática escolar como pretexto para descubrir estructuras matemáticas y practicar la decodificación de palabras en símbolos, operaciones u otros procedimientos al estilo de la regla de tres mencionada por Khadija (Planas, 2002, p. 15): "El pellizco este de sal no me convence... y eso no lo he visto en ningún sitio, si haces la regla de tres con todos, pues con este no sé por qué lo haces diferente". [*nuestra traducción*]

En 2002, se dio visibilidad a la interrupción y se primó su significado en términos de obstáculos al aprendizaje matemático de Khadija, generados a raíz de la diversidad de interpretaciones de normas sociomatemáticas. De acuerdo con lo que sabemos ahora, vemos un juego dialéctico entre lo que se observa en clase y la precisión lingüística y numérica con la que supuestamente hablaría y escribiría un profesor de matemáticas. Las excepciones forman parte de este juego que legitima una cierta flexibilidad de la norma fundamental y habilita los hechos de clase como fuente de la práctica. Aunque se trate de acabar hablando y escribiendo las matemáticas como lo haría un profesor de matemáticas, en la práctica el proceso de distanciamiento de la lengua en uso del alumno no es continuo ni lineal y puede haber interpretaciones "anómalas" de normas que se alejen de lo que haría un profesor de matemáticas. Parte del juego y de su comprensión incluye incumplimientos ocasionales de modos establecidos de hablar y de hacer matemáticas.

En la sesión de clase de 2002, la aproximación a la lengua de las matemáticas del profesor se retoma en la fase final de la puesta en común y en la escritura de la resolución –contextos de interacción ambos con una función evaluadora reforzada. Vemos al menos dos razones para que esto suceda: la negociación en el seno del grupo de alumnos y la influencia de la norma fundamental. Tal vez la cuestión más interesante no sea el desenlace en forma de interrupción, sino la oportunidad que se ofrece de hablar y escribir matemáticas como lo haría un profesor que tiene en cuenta la lengua de las

matemáticas del alumno. A modo de conato de experimento de enseñanza, el profesor introduce esta oportunidad en una conversación donde Khadija parece asumir la representación de lo que haría un profesor de matemáticas (Planas, 2002, p. 17):

Khadija: ¡Hay que resolver el problema como está escrito! ¡Que tu madre lo haga sin sal no tiene nada que ver con esto! [*S'ha de resoldre el problema com està escrit! Que la teva mare ho faci sense sal no tens res a veure amb això!*]

Profesor: Pero si el enunciado está mal, habrá que arreglarlo... [*Però si l'enunciat està malament, s'haurà d'arreglar...*]

Khadija: ¿Y cómo se sabe si está mal? Si está escrito es que está bien. [*I com se sap si està malament? Si està escrit és que està bé.*]

Profesor: Vamos a ver, ¿cuál es el enunciado que más os convencería? Mourad, ¿tú qué dices? [*Anem a veure, quin és l'enunciat que més us convenceria? Mourad, tu què hi dius?*]

En general, las normas y su producción son transparentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje; con esto queremos decir que vemos los efectos de las normas sin verlas a ellas, y que su producción ocurre sin hacerse notar. Al igual que "yo creo que" es transparente en "yo creo que la sal la tendríamos que sacar", pero lingüísticamente se añade para expresar énfasis, "matemáticamente" también opera de manera transparente en "hemos conseguido resolverlo matemáticamente". Sin embargo, y aunque los modos adecuados de hablar y de hacer matemáticas se acostumbran a suponer sin discusión explícita, en el episodio con Khadija y el profesor se observa que la excepcionalidad de interpretaciones "anómalas" revierte la situación de transparencia. Khadija hace notar la norma y acude a ella para disponer de un criterio de distinción de lo adecuado. Aun cuando es el propio profesor quien problematiza lo normativo y propone "otro" modo de hacer matemáticas, prevalece la representación del profesor de matemáticas que lleva al aula enunciados estáticos bien escritos ("Hay que resolver el problema como está escrito", "Si está escrito es que está bien"). El rechazo de Khadija a alterar el enunciado de la tarea posiblemente tiene que ver con su experiencia prolongada en una cultura escolar donde las normas son transparentes, no se cuestionan, no se trabajan mas sí se evalúan. Esta experiencia es evidencia de lo contrario en Mourad y Anna, pero también en el profesor. La experiencia no es la evidencia definitiva ni el origen de la explicación de respuestas distintas, sino un aspecto más en la configuración del discurso de cada alumno.

Por otra parte, una intervención del profesor en una sesión de clase es algo puntual en el contexto de modos largamente naturalizados de hablar y de hacer matemáticas. De una intervención no se puede inferir que el profesor haya iniciado la introducción interesada y deliberada de nuevas rutinas en su enseñanza. No obstante, su cuestionamiento es relevante porque ofrece la oportunidad de ver y discutir "otros" modos de hablar y de hacer matemáticas y, con ello, la oportunidad de comprender el aula como

cultura "en construcción", donde las interpretaciones de las normas deben trabajarse porque no hablan ni se explican por sí solas. Mourad, Anna, Khadija y el profesor crean conjuntamente la oportunidad de debatir por qué debería aceptarse una resolución de la tarea matemática que desoiga la experiencia de vida. El caso de Khadija es, en definitiva, un caso de las oportunidades de aprendizaje generadas al hacerse visibles normas sociomatemáticas e interpretaciones de la matemática escolar, que son a su vez oportunidades de romper los silencios impuestos acerca de la diversidad de modos de hablar y de hacer matemáticas.

4. ¿OPORTUNIDADES? ¿QUÉ OPORTUNIDADES, CÓMO Y POR QUÉ?

Los estudios sobre la detección de dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje matemático de los alumnos continúan ocupando gran parte de la actividad investigadora, influyendo en la elección de temas a investigar. Sin embargo, el área experimenta un creciente compromiso con la comprensión de aciertos, retos y oportunidades. La tradición de experimentos de enseñanza bajo las teorías sociales avala que es posible modificar la cultura del aula de matemáticas y desarmar la paradoja de la irrelevancia de los modos de hablar y de hacer del alumno en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. La constitución histórica de la norma fundamental implica que "lo posible" es limitado debido a las inercias creadas en torno a la matemática escolar y a las ideologías de déficit asociadas al alumno, cuya lengua en uso se ve incompleta y situada en el punto de partida de un recorrido que acaba en otra lengua distinta. No obstante, en su materialidad la matemática escolar se construye en la actividad cotidiana del aula. La posibilidad de generar culturas del aula de matemáticas que den valor pedagógico y didáctico a las lenguas y culturas del alumno existe y, con ello, la posibilidad de producir oportunidades de aprender interpretaciones más significativas y menos ritualizadas de normas sociomatemáticas. Esto requiere aceptar que hay rutinas y obligaciones que, a pesar de "haber sido así desde siempre", pueden estar cumpliendo "desde siempre" cometidos políticos ajenos a la facilitación del aprendizaje matemático de todos los alumnos.

En el enunciado que da título al capítulo, "Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático", por oportunidades entendemos situaciones de clase donde el contraste entre interpretaciones de normas es aprovechado como hilo conductor en la discusión de modos de hablar y de hacer matemáticas. Esto es, situaciones donde, de no haber sido por lo oportuno de un contraste de significados, no se hubiera hecho notar la norma, y una única interpretación se seguiría tratando de manera tácita como natural y necesaria. Esta acepción de lo oportuno abarca la cuestión de transformar en sociales prácticas que flexibilicen la apropiación de la matemática escolar (Hunter *et al.,* 2018), además de superar la percepción de obstáculos y oportunidades como extremos que se oponen y discurren en paralelo. Esta es una oposición política-

mente construida que, a grandes rasgos, asume que cuanto mayor es la adecuación a las matemáticas que hablaría y haría un profesor de matemáticas, mayor es la cantidad de oportunidades de aprendizaje y menor la de obstáculos. A lo largo del capítulo y con apoyo en el caso de Khadija, hemos problematizado esta oposición y la hemos sustituido por una relación dialéctica, de tensión y diálogo entre obstáculos y oportunidades.

Advertimos la relación entre obstáculos y oportunidades en la base de los experimentos de enseñanza donde se diseñan y llevan a cabo situaciones que hacen aflorar interpretaciones diversas de normas sociomatemáticas. Si bien los datos del caso de Khadija no forman parte de un experimento de enseñanza, disponemos de resultados de múltiples experimentos en otras aulas de matemáticas de Barcelona (p. ej., Planas y Civil, 2009), donde los profesores participaban en un grupo de desarrollo profesional sobre el uso de las lenguas y las culturas de los alumnos en clase de matemáticas. En esas aulas se consiguieron cambios con repercusión en la intensidad y la amplitud de la participación matemática, a la par que se vislumbraron cambios en la percepción que los profesores tenían de los modos de hablar y de hacer matemáticas de algunos alumnos. A lo largo de las sesiones de desarrollo profesional, el discurso inicialmente marginal sobre oportunidades fue ganando presencia, en detrimento del discurso sobre dificultades, errores y obstáculos. Costó, sin embargo, iniciar la transformación del relato sobre lo que algunos alumnos no parecen lograr. Este es un relato que, en general, cuesta replicar porque está en el trasfondo de los supuestos de linealidad que reducen el aprendizaje a una cuestión de capacidades individuales y de distanciamiento de modos de hablar y de hacer.

La norma fundamental actúa de manera negativa, materializando los obstáculos en situaciones de interacción donde no se hablan o escriben unas determinadas matemáticas. Esta norma también actúa de manera positiva, pero materializando solo las oportunidades que se encuentran en los usos habituales de la matemática escolar. No hay una norma superior que valide los otros usos, una norma que simplemente diga que *el alumno debe hablar y escribir las matemáticas como lo haría un profesor de matemáticas que converse con él.* Esto plantea un panorama complicado para el reconocimiento del potencial y de la capacidad del alumno y de los grupos que más se alejan de los modos escolares.

En la reflexión sobre el profesor que se necesita para liderar experimentos de enseñanza (Essien, Chitera y Planas, 2016; Cobb y Hodge, 2010; Gresalfi y Cobb, 2011; Planas y Civil, 2009), son reveladoras las discusiones sobre la creación de entornos de desarrollo profesional que proporcionen ejemplos de comunicación y negociación de interpretaciones de la norma en la práctica. Para el diseño de experimentos de enseñanza que den valor a la cultura del alumno, Essien *et al.* (2016) toman inspiración en prácticas de comunicación y negociación en aulas multilingües y en su impacto en la modificación de aspectos de la cultura del aula. Aquí la diversidad de interpretaciones es más visible, en particular más "normal" y comprensible para los participantes.

La investigación en educación matemática en aulas multilingües tiene, a nuestro

entender, el germen de varias respuestas, dado que ha logrado revertir parte de lo que se considera "normal". En el aula multilingüe, cualquier interacción se presta a la alternancia de lenguas, al no haber un único código o sistema lingüístico; por ello, muchos experimentos de enseñanza (véase Barwell *et al.,* 2016) se han centrado en crear una cultura de hacer preguntas sobre lo que se pide. La norma sociomatemática que regula las preguntas del alumno se amplía para que el profesor acepte preguntas sobre la propia interpretación, gestión y orientación de la tarea matemática, sin que esto conlleve valoraciones negativas ("el alumno que –otra vez– no sabe lo que se pide"). En los experimentos donde se logra modificar el papel y la amplitud de las preguntas del alumno, la participación matemática se intensifica. Otros resultados de esta investigación proveen ejemplos del camino que falta por recorrer. Se observa la invisibilidad de significados matemáticos que permanecen latentes en clase y que, sin embargo, se manifiestan a iniciativa del alumno en entrevistas donde prevalece la alternancia relajada de códigos y sistemas lingüísticos. Esto se ha relacionado con el alcance en la actividad de clase del orden social vigente fuera del aula, donde la norma monolingüe (Planas, 2018) lleva años construyéndose como social e imprescindible para la comunicación.

A pesar de los resultados prometedores mencionados y de la presencia residual de aulas monolingües en el mundo, la comunidad de investigación en educación matemática sigue siendo reticente a pensar los experimentos de enseñanza en el aula multilingüe como una versión adelantada del trilingüismo –lenguas del alumno, del profesor y de las matemáticas– que se debe manejar de manera flexible en cualquier aula de matemáticas (Chronaki y Planas, 2018). Parte de la comunidad mantiene la representación monolingüe del aula –con la lengua de las matemáticas del profesor en proceso de ser enseñada y aprendida por el alumno–, por lo que apenas entrevé el sentido general de los estudios en aulas de matemáticas multilingües. No obstante, atisbamos un inicio de apertura que, cuando se consolide, será punto de inflexión en la investigación socialmente comprometida con datos de clases de matemáticas que reconozcan el conjunto de lenguas que intervienen en la producción de la lengua de la matemática escolar.

AGRADECIMIENTOS

Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA) y SGR-2017-101, AGAUR-Catalunya; Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER.

REFERENCIAS

Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Setati-Phakeng, M., Valero, P., Villavicencio, M. (Eds.). (2016). *Mathematics education and language diversity. The 21st ICMI Study.* New York, USA: Springer.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En D. A. Grouws y T. J. Cooney (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (Vol. 1, pp. 27-46). Reston, USA: NCTM.

Boukafri, K., Civil, M. y Planas, N. (2018). A teacher's use of revoicing in mathematical discussions. En J. N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues Mendes y M. Schütte (Eds.), *Language and communication in mathematics education* (pp. 157-169). Cham, Switzerland: Springer.

Bowers, J., Cobb, P. y McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and Instruction, 17*(1), 25-66.

Brown, T. (2010). Truth and the renewal of knowledge: The case of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 329-343.

Chronaki, A. y Planas, N. (2018). Language diversity in mathematics education research: A move from language as representation to politics of representation. *ZDM, 50*(6). https://doi.org/10.1007/s11858-018-0942-4

Cobb, P. y Hodge, L. L. (2010). Culture, identity, and equity in the mathematics classroom. En E. Yackel, A. Sfard, P. Cobb y K. Gravemeijer (Eds.), *A journey in mathematics education research. Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 179-195). New York, USA: Springer.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Zhao, Q. y Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences, 18*(2), 165-199.

Essien, A., Chitera, N. y Planas, N. (2016). Language diversity in mathematics teacher education: Challenges across three countries. En Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N., Setati-Phakeng, M., Valero, P., Villavicencio, M. (Eds.), *Mathematics education and language diversity. The 21st ICMI Study* (pp. 103-119). New York, USA: Springer.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 70-92.

Gorgorió, N. y Planas, N. (2005). Reconstructing norms. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-72). Melbourne, Australia: PME.

Gresalfi, M. S. y Cobb, P. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 270-304.

Herbel-Eisenmann, B. (2003). *Examining "norms" in mathematics education literature: Refining the lens*. NCTM 2003 Annual Meeting and Exposition. Simposio llevado a cabo en San Antonio, Texas, USA.

Hunter, R., Civil, M., Herbel-Eisenmann, B., Planas, N. y Wagner, D. (Eds.). (2018). *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Morgan, C. (2000). Better assessment in mathematics education? A social perspective. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 225-242). Westport, USA: Ablex Publishing.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. London, United Kingdom: Routledge & Kegan Paul.

Planas, N. (2001). *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat d'interpretacions de la norma* (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Planas, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática, 14*(1), 5-25.

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for the understanding of the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 215-229.

Planas, N. y Civil, M. (2009). Working with mathematics teachers and immigrant students: An empowerment perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(6), 391-409.

Planas, N. y Gorgorió, N. (2004). Are different students expected to learn norms differently in the mathematics classroom? *Mathematics Education Research Journal, 16*(1), 19-40.

Planas, N. y Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. En Á. Gutiérrez, G. H. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 447-479). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Planas, N., Arnal, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). London, United Kingdom: Routledge.

Roth, W. M. (2018). Elaborating the later Vygotsky's radical initiative on the nature and function of language: Implication for mathematics education. *ZDM, 50*(6). https://doi.org/ 10.1007/s11858-018-0912-x

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. New York, USA: Springer.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas, 21 años después[1]

Gelsa Knijnik
Universidade do Vale do Rio Do Sinos, Brasil

Resumen: Este artículo tiene por objetivo presentar una meta-reflexión sobre los exámenes escolares y la resolución de problemas en las aulas de matemática, a partir de un primer texto, escrito en 1997, sobre una experiencia personal de la autora. En lo que se refiere a los procesos evaluativos, la meta-reflexión pone de relieve una crítica a los actuales exámenes nacionales e internacionales aplicados en los sistemas escolares de la gran mayoría de los países, y sus repercusiones en las políticas curriculares. En lo que se dice respecto de la resolución de problemas, la meta-reflexión utiliza herramientas teóricas asociadas al pensamiento tardío de Ludwig Wittgenstein para problematizar el uso de problemas de la "vida real" en las aulas de matemática. Se argumenta que distintas lógicas rigen las formas de vida cotidiana y escolar, así como la complejidad involucrada en transferir juegos de lenguaje de una forma de vida para otra.

1. INTRODUCCIÓN

La invitación para hacer una relectura del artículo "¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas", que publiqué en el número 1 del volumen 9 de *Educación Matemática* en 1997, ha representado para mí un gran reto. De inmediato recordé las palabras de Deleuze y Guattari (2004, p. 7), cuyas ideas me han acompañado desde hace tiempo. Lo que escribieron estos autores sobre los libros me motivó a trasladarme a mi artículo de 1997: éste también podría tornarse viejo o, al contrario, recibir una segunda juventud a partir de un análisis sobre el lugar que, al paso del tiempo, vino a ocupar en el conjunto de mi trayectoria académica. A ese análisis me dedico en este escrito.

Pero para realizarlo es preciso narrar de modo sintético –sin entrar en detalles del paisaje del sistema escolar brasileño que entonces ofrecí al lector– el episodio que fue el hilo conductor del primer texto, y que también ahora asume esa posición. Se trata de un episodio que viví cuando aún era una joven estudiante. Tomar una partecita de mi propia vida como material empírico de una reflexión académica, en aquella época,

[1] Este texto está dedicado a mi madre que, con sus casi 97 años, no me hace olvidar que la educación debe estar al servicio de la justicia social y que el rigor teórico-metodológico de la investigación en el campo educativo es condición para que eso se concretice.

y en cierta medida aun hoy en algunos círculos investigativos, implica una posición epistemológica que rompe con aquellas asociadas a corrientes de pensamiento más conservador, que insisten en la necesaria neutralidad en la producción del conocimiento, la separación entre sujeto y objeto de investigación. En contraposición a esas corrientes, de modo todavía intuitivo ya me aproximaba a lo que, años después, aprendí con Esther Díaz (2007), con el concepto de "epistemología ampliada" por ella formulado. En oposición a "la ahistoricidad [...], universalidad, formalización y neutralidad ética del conocimiento científico", la epistemología ampliada considera que "la racionalidad del conocimiento, incluso la más estricta y rigurosa, hunde sus raíces en luchas de poder, factores económicos, connotaciones éticas, afecciones, pasiones, idearios colectivos, intereses personales y pluralidad de nutrientes" (p. 24).

Yo recién cumplía 11 años. Como todos los demás estudiantes que finalizaban el 5º grado de la escuela primaria en aquel entonces, para proseguir mis estudios también yo debería ser aprobada en el examen de admisión (organizado por cada escuela secundaria pública), conformado por pruebas en las áreas de matemáticas, portugués, ciencias, historia y geografía.

> La prueba de matemáticas fue elaborada en el contexto de un mercado sobre ruedas. Un evento cotidiano en aquella época en la vida de las personas de clase media urbana brasileña y que, en un cierto sentido, fue sustituido por la llegada de las grandes cadenas multinacionales de supermercados. Una de las preguntas, actualizando los valores para 1997, era:
>
> *Quiero comprar 6 naranjas y 10 manzanas. En el puesto de Don José, cada naranja cuesta 50 centavos y cada manzana, 80 centavos. En el puesto de Don Juan, las naranjas salen en 60 centavos y las manzanas en 70 centavos. ¿Dónde debo hacer la compra?*
>
> Lo que la comisión que planteó el problema esperaba era que la respuesta fuera contestada en términos de los valores obtenidos, en cada caso, por la suma de las multiplicaciones del número de frutas por su valor unitario, cuyo resultado era: 11,00 y 10,60.
>
> En la calle en la que yo vivía, los martes era día de mercado. Muy temprano, de noche en el invierno, los vendedores comenzaban a llegar. En aquel día particular de la semana, siempre me despertaba antes de la hora acostumbrada para ir a la escuela y acompañaba a mi madre en las compras. Después de un tiempo, asumí sola la tarea doméstica. Recuerdo que, a la salida de la prueba de matemáticas, en aquel noviembre, los comentarios del grupo de alumnos estaban centrados en aquella pregunta, considerada difícil. Yo, al contrario, afirmaba que no había hecho ni una sola operación para resolverla. ¡Era bien claro que compraría las naranjas con Don José y las manzanas con Don Juan! (Knijnik, 1997, p. 72)

2. LAS MATEMÁTICAS EN EL EXAMEN DE ADMISIÓN Y LOS DE HOY EN DÍA

El análisis que hice de aquel episodio del examen de admisión tuvo como foco principal el papel que las matemáticas desempeñaban como filtro social, las pruebas escolares y lo que entonces llamé "resolución de problemas". Anunciaba que ya había indicios, en el ámbito oficial, de que el examen de admisión y otras formas de control y selección, como el vestibular (examen para entrar a la universidad en Brasil), no perdurarían. Lo que no me podría imaginar es que, pasados 21 años, esos exámenes, en el nivel local, dejarían de existir para ser sustituidos por exámenes nacionales e internacionales, aplicados en los sistemas escolares de la gran mayoría de los países, regidos por las orientaciones de la OCDE, y a su vez alineados con las formulaciones del Banco Mundial. Mucho más allá de los exámenes locales, ahora es una lógica global, asociada a los intereses del mercado, la que rige la educación.

Si antes, en Brasil, los maestros de primaria buscaban orientar sus programas escolares por "lo que iba a ser preguntado" en el examen de admisión de la escuela donde sus alumnos iban a proseguir sus estudios, ahora estamos frente una situación de otro orden de magnitud: no solo los propios sistemas educativos y sus escuelas organizan sus currículos siguiendo esos exámenes. Los países, y en cada país sus provincias, y en cada provincia sus municipios, y en cada municipio sus escuelas, son clasificados siguiendo los resultados obtenidos en esos exámenes. Más aún: profesores de todos los niveles de enseñanza elemental son evaluados y, por consecuencia, clasificados según los resultados obtenidos por sus estudiantes, por sus escuelas. Son los resultados de esos exámenes los que, al final, determinan incluso los recursos que serán destinados a los países y, en cada país, a sus instituciones. Es en este punto que se puede ver claramente cómo todo este proceso evaluativo está estrechamente conectado con la lógica neoliberal hoy vigente, para exacerbar una competición entre los países, entre las escuelas, entre los profesores, una competición que necesariamente elude la idea de cooperación.

Es importante destacar, además, cómo esa coyuntura que en principio se podría pensar circunscrita a la educación primaria y secundaria, llega a los niveles universitarios, sea en los cursos de formación de profesores, sea en el ámbito de la investigación educativa. Por lo menos en Brasil, los recursos son direccionados para estudios caracterizados como "de gran escala" (esto es, que analizan bases de datos estadísticos producidos por instancias gubernamentales) que están en sintonía con esa concepción, hoy hegemónica, de una educación cuya evaluación es centralmente realizada a través de exámenes como PISA.

Y así como en 1971, el examen de admisión dejó de existir en Brasil –se sustituyó por otras formas de control y exclusión social–, también podemos pensar que el "vestibular" puede ser sustituido por otras formas de selección. Tal vez, los profesores puedan ocuparse con algo distinto a su gran (pre)ocupación actual, que se resume en la expresión: "¿qué va a contener el vestibular?" Y es preciso observar que esta es una pregunta que sigue siendo actual, por lo menos en Brasil, ahora que está siendo instituido un

gran examen nacional unificado al término del ciclo universitario. Y no solo en Brasil. Los exámenes en las regiones más diferentes del mundo han sido los grandes definidores de aquello que debe ser incluido y de lo que debe ser excluido del currículo escolar (Knijnik, 1997, p. 72). Lo que yo ya anunciaba en aquel tiempo sobre la uniformidad de los currículos escolares con el pasar de los años se intensificó. No es de sorprender que, bajo un sistema evaluativo jerarquizador como PISA, los países se preocupen por formular sus políticas públicas educativas, y en especial orientaciones curriculares para los diferentes niveles de enseñanza, en consonancia con lo que es evaluado en ese examen. Además, en 2017 fue promulgado en Brasil el documento Base Nacional Común Curricular (BNCC), destinado a la educación infantil y a la enseñanza fundamental (del primero al noveno grado), con lo cual el Ministerio de Educación considera que se "inicia una nueva era en la educación brasileña y se alinea a los mejores y más calificados sistemas educacionales del mundo" (BNCC, 2017, p. 7). Un documento similar (dirigido a los tres últimos años de la educación básica) está en fase final de elaboración.

Habría distintos aspectos a ser apuntados sobre cuestiones involucradas en esa búsqueda de uniformización que, es necesario decir, posiblemente nunca será concretada, toda vez que en el país está en vigor una normativa gubernamental que ha congelado por 20 años los recursos públicos en las áreas de la educación y de la salud, lo que significa inviabilizar la formación de profesores para responder a esas nuevas orientaciones educativas homogeneizadoras en un país como Brasil, marcado por una diversidad cultural asociada, a su vez, a una gran desigualdad económica y social.

3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un aspecto crucial a lo largo de la historia de la matemática educativa y que, con el actual lugar ocupado por PISA, ha recibido mayor centralidad es la resolución de problemas. Como escribí en 1997: "Así como Alicia Ávila (1996) argumentó, para el caso particular de Educación de Jóvenes y Adultos, considero importante colocar la resolución de problemas en el centro del currículo de las matemáticas en todos los niveles de enseñanza" (p. 73).

En aquel texto, examiné las implicaciones de simplificar a tal punto los problemas del cotidiano en las aulas de matemática, que finalmente esos problemas se alejaban mucho de lo que se pasaba en la "vida real".

> En primer lugar, los problemas de matemáticas que usualmente trabajamos en los cursos escolares –como el de la compra de manzanas y naranjas de mi examen de admisión– son presentados a los alumnos de un modo que, poco, muy poco, tienen que ver con los problemas de la vida real. Estos –los problemas de la vida real– se caracterizan por su complejidad: involucran lo que llamamos matemáticas, sí; pero existen muchas otras variables en la vida –como, por ejemplo, de tipo social, cultural,

afectivo, económico– que están presentes en la vida real y que son absolutamente relevantes a la hora en que buscamos solucionarlos. Son, muchas veces, estas variables las que los profesores consideramos, como si estuvieran sujetas al problema matemático y, al mismo tiempo, son estas variables las que dan colorido al problema matemático, lo llenan de vida.

Para comenzar, es cierto que lo más difícil en los problemas de la vida es encontrar los elementos, los datos que nos den la posibilidad de plantear ecuaciones. Esta búsqueda de información es el paso decisivo para iniciar los procesos de solución. Desencadenado el proceso, posiblemente irán siendo necesarias otras informaciones, decisiones que dependerán de las variables, de los datos que vamos a considerar más importantes que otros, de los que intencionalmente descartaremos, y de aquellas consecuencias de éstas, nuestras opciones. Así funcionan los problemas en la vida real.

¿Y en las matemáticas de la escuela? Suponiendo que estamos haciendo lo mejor para nuestros alumnos, organizamos los datos de los problemas, seleccionamos aquello que, en nuestra opinión, es lo que se debe seleccionar. Así, los problemas escolares de matemática son presentados usualmente con todos los datos, y solamente con los datos, que nosotros de antemano juzgamos relevantes. Después del listado de tal información, formulamos una pregunta que, para ser respondida, requiere la utilización de la información que previamente seleccionamos, toda ella presente en el texto.

Como muchas veces somos alienígenas en nuestros propios salones de clase, hacemos tal selección de datos tomando en cuenta solamente los aspectos que nosotros consideramos relevantes del problema, dejando de lado otros que, en el contexto en que efectivamente el problema es problema, podrían ser imprescindibles. Este es uno de los modos a través del cual los problemas "de verdad" se trasmutan en problemas ficticios, una parodia de lo cotidiano. Al hacer tantas simplificaciones y reducciones en la complejidad del mundo social, también desde el punto de vista estrictamente numérico, estamos retirando las oportunidades de aprender de los adultos con quienes trabajamos. Hay que aprender a lidiar con los números y también con el mundo. (Knijnik, 1997, p. 74)

Mi argumentación apuntaba en una dirección bastante clara: si para la matemática educativa era importante trabajar con los problemas de la "vida real", habría que llevarlos a las aulas de matemática en toda su complejidad, sin tornarlos artificiales, sin ordenar sus elementos constitutivos, para que los estudiantes pudieran aprender *a lidiar con los números y también con el mundo.*

4. LA COMPLEJIDAD DE USAR EN EL AULA LOS PROBLEMAS DE LA "VIDA REAL"

A lo largo de las dos décadas que me distancian de la argumentación que había desarrollado, mi trayectoria intelectual me ha conducido a otros caminos teóricos. Entré en contacto con la obra de Ludwig Wittgenstein, ese filósofo que aprendí a admirar por la radicalidad con que pensó su propio pensamiento, por el coraje (y la humildad) de afirmar, como se puede leer en el prefacio de *Investigaciones filosóficas*, que necesitaba reconocer lo que llamó "graves errores" (Wittgenstein, 2010, p. 13) de su primer libro, *Tractatus logico-philosophicus* que, como bien se sabe, es considerada una de las obras fundantes de la lógica matemática.

Las reflexiones que hice (Knijnik, 2014) sobre las ideas del período de madurez de Wittgenstein pueden ser pensadas como parte de lo que en el texto de 1997 ya discutía. Las nociones del filósofo se constituyeron en importantes fuentes para impulsar mi pensamiento, para pensar de otro modo lo que antes enunciara sobre los problemas de la "vida real" en las matemáticas escolares. En otras palabras (o para ser más precisa, sirviéndome de nociones foucaultianas), he podido problematizar uno de los enunciados que conforman el discurso de la educación matemática: "Es importante traer la realidad a las aulas de matemática". Al problematizarlo, he podido introducir cuestionamientos que yo aún no había formulado para ese enunciado que circula, hace por lo menos dos décadas, como una "verdad" incuestionable en las escuelas y en los cursos de formación de profesores de matemática.

En efecto, en su fase de madurez intelectual, el filósofo considerará que no existe *el* lenguaje, sino lenguajes, en plural, identificándolos con una variedad de *usos*. Esos distintos usos, como destaca Hallett en Condé (1998, p. 42), se refieren a un contexto mucho más amplio que el contexto verbal. De manera diferente a sus posiciones anteriores, en esa fase tardía Wittgenstein pasa a ver el lenguaje "...como una 'forma de vida' tejida en el todo de la textura de las relaciones sociales (I.F.23) y que pertenece a la historia de nuestra naturaleza, así como caminar, comer, beber, jugar (I.F.25)" (Hallet, en Condé, 1998, p. 90). De ese modo, intérpretes de Wittgenstein atribuyen al *uso* una dimensión social, "una instancia a partir de la cual las significaciones son creadas [...] y los varios juegos de lenguaje son engendrados" (Condé, 2004, p. 48). Tales juegos, sin embargo, no pueden verse como completamente alejados unos de otros. Para Wittgenstein (2010), al contrario, los diferentes juegos de lenguaje "se parecen", tienen una especie de parentesco que el filósofo denomina *semejanzas de familia* (Knijnik, 2014).

Frente a esas nociones, cabría preguntarse cuál es su contribución para lo que centralmente discuto en este texto en relación con los problemas de matemática de la "vida real".

Para iniciar la respuesta es necesario mencionar que una de las verdades que circula en los discursos de la matemática académica y, por consecuencia, de la matemática escolar, consiste en asumir que existe una y solamente una matemática, de carácter universal, que tendría la potencialidad de ser aplicada en diferentes contextos, en diferentes

prácticas sociales, por ejemplo, en las prácticas cotidianas. Sin embargo, las posiciones wittgensteinianas nos permiten pensar en otra dirección.

En su obra tardía, el filósofo no solamente cuestiona la universalidad de las matemáticas académicas –lo que, desde la instauración de su Programa Etnomatemático, D'Ambrosio (2001) ya indicaba–, sino que ofrece elementos que justifican la existencia de juegos de lenguaje matemáticos, que tienen especificidades (vinculadas a las formas de vida en las cuales adquieren existencia) y que presentan *semejanzas de familia* con los juegos de lenguaje de la matemática escolar. Así, cuando se tratase de resolver situaciones-problema del mundo no escolar, no se trataría de servirnos de las "aplicaciones" de esa matemática presuntamente única y universal. Por el contrario, estaríamos ante la necesidad de practicar otros juegos de lenguaje matemáticos que por su inmanencia ofrecerían, de modo más apropiado y satisfactorio, la solución que deseamos encontrar.

En seguida presento un ejemplo que pretende elucidar las afirmaciones hechas en los párrafos anteriores. A pesar de ser un ejemplo que en otros textos ya discutí (Knijnik, 2014; Knijnik, Wanderer, Giongo y Duarte, 2012), por su contundencia aquí vuelvo a narrarlo, evidenciando lo que aprendemos con Wittgenstein: "La ejemplificación no es [...] un medio indirecto de elucidación por falta de uno mejor" (IF§71).

Consideremos el juego de lenguaje: "redondear números", practicado en la escuela. Como lo he discutido anteriormente (Knijnik y Wanderer, 2010), los materiales didácticos que circulan en el currículo escolar de Brasil enseñan que, para redondear un número de dos dígitos, si la unidad tiene un valor superior a 5, se indica redondearlo hacia la decena inmediatamente superior; sin embargo, si el valor de la unidad es inferior a 5, la orientación es que se redondee hacia la decena inmediatamente inferior. Ese juego forma parte de la racionalidad instituyente de las formas de vida escolares, con sus marcas de abstracción y búsqueda de generalización. En la forma de vida campesina Sin Tierra, como lo he aprendido con los integrantes de ese movimiento social, el redondeo se practica por medio de otra regla (que, aunque presente semejanzas con la escolar, tiene especificidades).

Un campesino Sin Tierra lo explicó, al estimar el valor total de lo que él gastaría con la compra de insumos para la producción: redondeaba "hacia arriba" los valores enteros, ignorando los centavos, pues no deseaba "pasar vergüenza y que le faltara dinero en el momento de pagar". Sin embargo, si la situación involucraba la venta de algún producto, la estrategia utilizada era precisamente la opuesta. En este caso, redondeaba hacia "abajo" porque "no quería ilusionarme y pensar que iba a tener más que lo que tenía [de dinero]" (Knijnik y Wanderer, 2010, p. 353).

De inmediato vemos la semejanza existente entre las dos reglas mencionadas anteriormente. Pero hay una peculiaridad que las distingue: en el juego producido por la forma de vida campesina, de modo diferente al practicado en la escuela, hay una estrecha vinculación de la estrategia de redondear con las contingencias de la situación. Es la inmanencia de la racionalidad campesina Sin Tierra *vs* la trascendencia de la racionalidad de las matemáticas escolares eurocéntricas.

Más que mostrar con este ejemplo la superioridad de juegos de lenguaje *que sirven para usar en cualquier situación* cuando son comparados con aquellos cuyo uso es *localizado*, o sea, que son dependientes de la situación en la que se practican, lo que me interesa subrayar es que lo que posiblemente nos ocurriría sería pensar que el juego transmitido en la escuela es lo que presentaría, desde el punto de vista epistemológico, mayor valor, pues sería el que podría aplicarse *a cualquier situación*. Sin embargo, como muestra este ejemplo, en nuestras vidas nos enfrentamos a la necesidad de resolver situaciones específicas y no "cualquier situación". Esa "cualquier situación" adquiere importancia, eso sí, cuando estamos practicando juegos de lenguaje matemáticos en el ámbito de la abstracción y del formalismo propios de la forma de vida escolar.

Pero volvamos una vez más al episodio del examen de admisión, para indagar sobre la posibilidad de utilizar problemas de la "vida real" en las aulas de matemática. En otras palabras, para preguntar sobre la posibilidad de que los significados de aquellos juegos practicados en las formas de vida cotidianas, como los practicados en las ferias, podrían ser transferidos a los juegos de lenguaje de las matemáticas escolares. Inspirados en las ideas tardías de Wittgenstein, la respuesta a esta indagación es negativa: el "paso" de una forma de vida a la otra no garantizaría la permanencia del significado. Al contrario, sugiere su transformación porque "del otro lado" quien "lo recibe" es otra forma de vida. Así, la operación de transferencia de los significados se convierte en algo mucho más complejo, pues

> [...] al cruzar el puente, los significados llegan al otro lado transformados; no porque se hayan transformado en sí mismos –sea lo que eso pueda significar– sino porque del otro lado las formas de vida y los correlatos juegos de lenguaje ya son otros. (Veiga-Neto, 2004, p. 144)

Mi justificación para la enseñanza de los juegos de lenguaje matemáticos que usualmente transmitimos en la escuela no es que ellos serán las herramientas matemáticas que ofrecerán mejores soluciones a situaciones cotidianas y/o laborales. La justificación para su enseñanza es otra: se trata de dar acceso a los juegos de lenguaje matemáticos de una forma particular de vida (de la escuela), una vez que son esos juegos los que funcionan como filtro social, definiendo, por ejemplo, quién tendrá "éxito" en los exámenes escolares, en los exámenes nacionales e internacionales como PISA, quién tendrá acceso a los mejores puestos de trabajo. Se podría decir, entonces, que los juegos de lenguaje matemáticos escolares y los juegos de lenguaje matemáticos de otras formas de vida, que no sean los de la escuela, se pueden pensar como epistemológicamente equivalentes, aunque al ser examinados socialmente sean desigualmente diferentes.[2]

La argumentación hasta aquí desarrollada aún está incompleta en lo que se refiere a los juegos de lenguaje matemáticos de las formas de vida no escolares. Si esos juegos

[2] En Knijnik (2006), por otras vías teóricas enfoqué ese argumento, aquí presentado de modo más contundente.

solo "se parecen" a aquellos usualmente transmitidos en las aulas de matemática, ¿puede/debe la escuela ignorarlos? Yo diría que esa es una "mala pregunta", puesto que no veo cómo su respuesta pueda ser otra que la negativa. Ignorar los juegos de lenguaje matemáticos de formas de vida no escolares significaría imaginar que sería posible pedir a nuestros alumnos que, al entrar al aula, se olvidasen de quiénes son como sujetos de un determinado tiempo y espacio, que dejasen atrás su propia historia de vida...

5. CON "LA CABEZA LLENA DE SEÑALES DE INTERROGACIÓN"

Durante mi trayectoria en el campo de las etnomatemáticas ha sido un gran desafío usar las ideas del "segundo Wittgenstein" para repensar posiciones que antes me parecían sólidamente fundamentadas, como la centralidad de las prácticas etnomatemáticas en el currículo escolar. Las ideas del período de madurez del filósofo austríaco, asociadas a las nuevas configuraciones del mundo globalizado y la ascensión de los exámenes internacionales basados en la lógica neoliberal, me llevaron a otra posición. Considero que el currículo escolar en el área de las matemáticas debe, centralmente, transmitir los juegos de lenguaje que favorezcan el desarrollo del razonamiento lógico y del formalismo matemático. Esos son los juegos que pueden tener la potencialidad de insertar a los estudiantes en un futuro mercado de trabajo, darles condiciones para contribuir científicamente en un mundo cada vez más dominado por la tecnociencia y las exigencias de innovación. Más que un interés individual, estamos frente a un interés colectivo, como se puede observar en las políticas públicas educativas de América y de la Unión Europea.

Desde mi punto de vista, el repertorio de juegos de lenguaje matemáticos transmitidos por la escuela no puede restringirse a tales juegos. Hay que ampliar ese repertorio, incluyendo aquellos que son practicados, por ejemplo, en formas de vida campesinas, de los mercados sobre ruedas, del comercio, etcétera. Su utilidad es inequívoca. En primer lugar, porque todos nosotros estamos involucrados en prácticas sociales que ocurren en distintas formas de vida cotidiana. En segundo lugar, porque la gran mayoría de nuestros estudiantes de Latinoamérica, por las condiciones estructurales que no posibilitan el ascenso social, no tendrán acceso a puestos de trabajo que les exijan abstracción y formalismo.

El punto-clave de la inclusión que acabo de referir es que necesita estar acompañada de un proceso reflexivo que permita a los estudiantes percibir, con claridad, las distintas lógicas que rigen los juegos de lenguaje de la matemática escolar y aquellos que son practicados en otras formas de vida: la primera, marcada por la transcendencia, y la segunda por la contingencia. Se trata de una reflexión que puede favorecer el entendimiento de que diferentes racionalidades, diferentes modos de pensamiento operan en el mundo en que vivimos, lo que puede extenderse a cuestiones religiosas, étnicas, etcétera, que han motivado muchos de los conflictos hoy existentes.

> Pero regresemos una vez más a mi historia. Regresemos a su final. A partir de la respuesta de una alumna, la comisión examinadora se puso a pensar en su propia práctica de instancia evaluadora. Si el contexto fuera otro –por ejemplo, un examen de respuestas de opción múltiple– esta situación se hubiera convertido en invisible. Si fuera otro grupo de profesores, tal vez mi respuesta hubiera sido considerada como "la alumna tenía flojera de pensar". Lo que me interesa subrayar aquí es que nosotros, los profesores, nos educamos también con lo que nos dicen nuestros alumnos, en tanto que tengamos nuestra sensibilidad aguzada para oírlos y estemos disponibles para seguir aprendiendo continuamente de sus mundos, sus problemas "reales" en la vida, y sus modos de entenderlos y de resolverlos.
>
> Fue esta disposición la que me estimuló a contar, en este texto, una historia de mi ‚propio mundo de joven estudiante, una historia muy personal. Al ser yo una profesora de un área "difícil" de la ciencia, en la que, tradicionalmente, hay poco lugar para las dimensiones de lo cultural y lo afectivo. Porque estoy convencida de que, en las clases de matemáticas, en el proceso de aprender –o no aprender– los contenidos matemáticos, se aprende una concepción muy particular de lo que se dice que es la matemática, de lo que significa lidiar con la matemática y de lo que es enseñar y aprender matemáticas. La disputa en el campo simbólico es ardua. Este texto pretende ser parte de esta lucha. (Knijnik, 1997, p. 75)

Los párrafos anteriores constituyeron el cierre de mi artículo publicado en 1997, con el cual introducía un nuevo elemento en la discusión que había construido: el rol del lenguaje en la producción de significados. Mencionaba que los significados no estaban dados de una vez por todas, que siempre estaban en disputa los sentidos que deseábamos atribuir a la educación matemática, a su aprendizaje, a su enseñanza... de modo más amplio, a las cosas del mundo. Posiblemente ha sido ahí cuando me di cuenta de que era necesario dedicarme más a estudiar el pensamiento de un conjunto de filósofos que comparten el "carácter pragmático, relativista, no-realista, no-esencialista [...] no-representacional y no-fundacional del giro lingüístico" (Veiga-Neto y Lopes, 2007, p. 19), entre los cuales están, además de Ludwig Wittgenstein, Donald Davidson, Hilary Putnam, Jacques Derrida y Richard Rorty. No solo estudiar sus formulaciones, sino intentar usarlas para producir nuevos significados en el campo de la educación matemática. Esta es una tarea que estará para siempre inconclusa. Como ya escribía en el título del artículo de 1997, sigo con muchas preguntas: aun cuando esté muy lejos de ser una filósofa, soy alguien que tiene "la cabeza llena de señales de interrogación".[3]

[3] Estoy aludiendo a Wittgenstein, en un extracto de su conversación con Oets Kolk Bouwsma, cuando dijo: "Un filósofo es alguien que tiene la cabeza llena de señales de interrogación" (Wittgenstein y Bouwsma, 2004, p. 68).

REFERENCIAS

Ávila, A. (1996). Fundamentos y retos para transformar la enseñanza de las matemáticas en la educación de jóvenes y adultos. En J. Osorio Vargas, y J. Rivero (Comps.), *Construyendo la modernidad educativa en América Latina. Nuevos desarrollos curriculares en la educación de personas jóvenes y adultas* (pp. 161-180). Lima, Perú: Unesco/OREALC, CEAAL.

Brasil, Governo Federal. (2017). *Base Nacional Comum Curricular.* Ministério da Educação, Recuperado de: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192

Condé, M. L. L. (1998). *Wittgenstein: linguagem e mundo.* São Paulo, Brasil: Annablume.

Condé, M. L. L. (2004). *As teias da Razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna.* Belo Horizonte, Brasil: Argvmentvm Editora.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Deleuze, G. y Guattari, F. (2004). *Mil Platôs. Capitalismo e Esquizofrenia* (Vol. 1). São Paulo, Brasil: Editora 32.

Díaz, E. (2007). *Entre la tecnociencia y el deseo.* Buenos Aires, Argentina: Biblos.

Knijnik, G. (1997). ¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas. *Educación Matemática, 9*(1), 70-75.

Knijnik, G. (2006). *Educação Matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra.* Santa Cruz do Sul, Brasil: EDUNISC.

Knijnik, G. (2014). Juegos de lenguaje matemáticos de distintas formas de vida: contribuciones de Wittgenstein y Foucault para pensar la educación matemática. *Educación Matemática, 25*, 146-161.

Knijnik, G. y Wanderer, F. (2010). Mathematics education and differential inclusion: A study about two brazilian time-space forms of life. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 42*(3-4), 349-360.

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M. y Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento.* Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Veiga-Neto, A. (2004). Nietzsche e Wittgenstein: Alavancas para pensar a diferença e a pedagogia. En S. Gallo y R. M. Souza (Orgs.), *Educação do preconceito: ensaios sobre poder e resistência* (pp. 131-146). Campinas, Brasil: Alínea.

Veiga-Neto, A. y Lopes, M. C. (2007). Identidade, cultura e semelhanças de família: as contribuições da virada linguística. En R. Bizarro (Org.), *Eu e o outro: Estudos Multidisciplinares sobre Identidade(s), Diversidade(s) e Práticas Interculturais* (pp. 19-35). Porto, Portugal: Areal.

Wittgenstein, L. (2010). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona, España: Crítica.

Wittgenstein, L. y Bouwsma, O. K. (2004). *Últimas conversaciones.* Salamanca, España: Ediciones Sígueme.

Relectura crítica de un artículo publicado en 2000: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas?

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
NRD, Universidad de Bologna, Italia
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Universidad de Bologna, Italia

Resumen: Atendiendo la solicitud hecha por la directora de la importante revista mexicana *Educación Matemática*, analizamos un artículo nuestro publicado en dicha revista en el año 2000, donde planteamos hipótesis acerca de los desarrollos futuros de la investigación en didáctica de la matemática. Haciendo referencia a los resultados de la investigación actual, se discute sobre la pertinencia de las hipótesis formuladas hace ya 18 años. El objetivo es mostrar cómo ha evolucionado la investigación en nuestro campo durante estos últimos 20 años.

PREMISA

La revista *Educación Matemática* nació en 1989, con el apoyo de la Editorial Iberoamérica; actualmente la publica la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C. (SOMIDEM); es la revista en idioma español más antigua en nuestro campo, con tres números por año. Tiene un gran reconocimiento a nivel mundial. En este 2018 cumple 30 años; su historia se divide, según el parecer de la actual dirección, en dos períodos: de 1989 a 2003 y de 2004 a la fecha. Solo para tener un punto de referencia: la revista italiana *La matematica e la sua didattica* nació en 1987 y se publicó ininterrumpidamente por 23 años; dejó de publicarse por 6 años y volvió a salir en 2016, año 24. En este 2018 estamos en el año 26.

Para 1989, la didáctica de la matemática tenía muy poco de haber nacido, era una neonata impaciente e impetuosa con deseos de sustituir banalidades difusas en el mundo de la escuela que carecían de cientificidad y que dañaban el aprendizaje de la matemática en vez de favorecerlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014; 2015b). Esta didáctica había nacido como una verdadera revolución científica implicada en la *teoría de las situaciones didácticas*, la primera teoría que se puede pensar como un estudio científico del aprendizaje de la matemática. La historia muestra cómo a esta primera teoría le siguieron tantas otras.

En 1989 ya habían sido publicados muchos de los célebres artículos que llevaron al querido amigo y maestro Guy Brousseau a recibir la primera Medalla Félix Klein en 2003; los matemáticos estábamos fascinados por el nuevo mundo que él estaba creando para nosotros. Mencionamos solo sus trabajos de mayor relevancia entre 1972 y 1989: Brousseau, 1972; 1980a; 1980b; 1982; 1986a; 1986b; 1986c; 1988a; 1988b; 1988c; 1989a; 1989b; Brousseau & Brousseau, 1987; Brousseau & Perez, 1981.

Una historia contada en primera persona en los albores de lo que después se llamaría didáctica de la matemática fue registrada por Guy Brousseau como respuesta a una solicitud de la dirección del "Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada epistemológica y empírica", que se llevó a cabo en Santa Marta, Colombia, del 9 al 11 de septiembre de 2015.[1]

Un hecho que nos asombra en relación con esta historia es la culpable superficialidad y la evidente ignorancia de quienes se consideran con derecho de crear nuevas teorías, sin tener en cuenta las teorías precedentes, acusando con arrogancia a las teorías iniciales, en particular a la teoría de situaciones, de ser "una teoría superada, del pasado". Sería como si René Descartes, en la creación de la geometría analítica, hubiera desdeñado y ridiculizado la geometría de los *Elementos* de Euclides. Que este hecho sea generalizado, mucho más de lo que se piensa, y el tipo de crítica feroz que se merece esta actitud está testimoniado en D'Amore y Fandiño Pinilla (2013a).

La revista *Educación Matemática* nace en 1989, poco después del nacimiento oficial de la didáctica de la matemática que muchos reconocemos en 1986, como consecuencia de uno de los trabajos de mayor significación de Guy Brousseau (1986c). Ya 10 u 11 años después, las cosas eran muy diferentes; se dictaban cursos universitarios con este nombre, mientras que convenios y congresos, cátedras universitarias, doctorados de investigación y revistas surgían más y más en nuestro mundo. Así, en el año 2000 parecía que hubiese llegado el momento de hacer un balance, cómplice también del cambio de milenio. Y como si hubiéramos hecho las cosas intencionalmente, en ese año publicamos en *Educación Matemática* un artículo cuyo título es emblemático: "La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses" (D'Amore, 2000). Ya en el lejano año 2000 parecía necesario hacer el punto de la investigación y profetizar la evolución futura de estos estudios e investigaciones.

No fue este nuestro único artículo publicado en el "primer período" de la revista; por ejemplo, en el año 2002 pensamos que debería volver a hablarse con fuerza y exactitud científica de las geniales ideas de Brousseau porque ya se evidenciaban movimientos de detractores ingenuos que, sin un estudio profundo y serio de sus ideas, las redefinían en términos banales y para nada científicos (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002). Tal era la situación, que Bernard Sarrazy (1995) ya había presentado las distorsiones de quien accede al mundo de la didáctica de la matemática sin el estudio de los términos específicos definidos con paciencia y erudición, reintroduciéndolos con ligereza y banalidad,

[1] Organizado por la Universidad de la Sabana, Chía, Colombia, con la dirección científica de Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015a).

tomando como base una interpretación centrada solo en lo que el sentido común sugiere. Sería como tener un curso universitario sobre los fundamentos de la geometría reinventando las definiciones euclidianas, basándolas sobre el sentido común o sobre el sonido de las palabras. Por ejemplo, en dicho trabajo Sarrazy ofrece al menos 50 acepciones distorsionadas de la primera idea fundacional de la teoría de situaciones, la idea de contrato didáctico sobre la cual se están centrando desde hace algunos años nuevos estudios analíticos con renovado interés (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017).

Luego de ser invitados por la dirección de *Educación Matemática* a examinar uno de los diversos artículos publicados por nosotros entre 1989 y 2003, elegimos precisamente el del año 2000, en el cual, inspirados por el cambio del milenio –hecho memorable al menos desde un punto de vista numérico– parecía que tenía sentido hacer previsiones sobre el futuro. No se trata de un trabajo de investigación (todos los otros trabajos publicados por nosotros en esta revista lo han sido), pero consideramos que esta elección estaba perfectamente en línea con las nuevas perspectivas que se veían surgir en esos años. Por tanto, nos parece que el tema tratado entonces es adecuado para esta recurrencia en los primeros 30 años de vida de la revista.

1. CONTEXTO ACADÉMICO, CONCEPTUAL Y SOCIAL EN EL QUE SE DESARROLLÓ EL CONTENIDO QUE SE DESCRIBE EN EL ARTÍCULO

El contexto de aquel artículo se describe brevemente en su resumen:

> El presente artículo está dividido en dos partes. En la primera se intenta realizar una estructuración teórica de lo que es la Didáctica de la Matemática en un marco mucho más vasto (raíces), que va desde las otras Didácticas disciplinares a la Didáctica general, a la Pedagogía (vínculos). En la segunda se postulan posibles vertientes futuras de investigación (intereses). (D'Amore, 2000, p. 39)

Por ello, dividiremos la presentación de los contenidos del presente artículo en dos partes.

1.1. Primera parte

Uno de los debates de aquella época estuvo centrado en las relaciones, todas por definir, entre las didácticas disciplinares y la didáctica general, un argumento que interesaba mucho más a la pedagogía que a la matemática. Entre las didácticas disciplinares, sobre todo estaban activos los estudios y la investigación en didáctica de la matemática; algunas disciplinas daban sus primeros pasos, otras aún debían nacer (algunas

nunca nacieron, continuaron girando en torno al sentido común o a la divulgación de la disciplina, o bien a aspectos pedagógicos). Pero la didáctica general estaba ya activa desde años atrás como disciplina autónoma, liberándose de aquello que ciertos pedagogos, que después acogieron la didáctica, llamaban "el juego de la pedagogía". Algunos estudios teóricos sobre estas relaciones ya se habían realizado (D'Amore & Frabboni, 1996), otros siguieron a partir de ese momento (D'Amore & Frabboni, 2005; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007).

En la primera parte del artículo se proponía una historia del proceso de creación de la didáctica disciplinaria: de la filosofía a la pedagogía, de la pedagogía a la didáctica general, citando filósofos, pedagogos, sociólogos y estudiosos de la didáctica general, discutiendo sobre los aspectos descriptivos y normativos (por ejemplo, el principio general de la educación: métodos y finalidades) que acompañan, dentro de la pedagogía, el proceso de creación de la didáctica general. Y también evidenciando las diferencias entre pedagogía, ciencias de la educación, ciencias de la formación, y didáctica general. Entre los autores modernos citados aparecían: Gastón Mialaret (1982), Émile Durkheim (1922), Jean Brun (1981; 1996), María Luisa Schubauer Leoni (1996) y François Conne (1996). Debemos notar que los primeros son pedagogos o psicólogos, mientras los últimos son ya estudiosos militantes en el campo de la didáctica de la matemática, aunque obligados a tener presentes los resultados de la didáctica general, las ciencias de la educación, las didácticas disciplinarias y la epistemología genética. El continuo debate estaba centrado en el saber y en su naturaleza.

En este punto consideramos necesario hacer la siguiente aclaración. Entre los años 1970 y 1990 se comenzó a hablar de la ciencia del o la ciencia de la, a propósito de temáticas que, pocos años antes, nunca habrían aspirado a dicha denominación. Digamos que después de considerar solo las ciencias "duras", pasados algunos años de debate se empezaba a aceptar la idea de ciencias más "débiles" (Kuhn, 1957; Lakatos & Musgrave, 1960; Bunge, 1985; Romberg, 1988; D'Amore, 2001a; D'Amore, 2007).

En el artículo de referencia sigue un análisis histórico y epistemológico que no reportamos aquí, pero que permite alcanzar otra propuesta análoga, más detallada, entre contenidos: los contenidos de la disciplina *d*, establecidos por ella misma a partir de su historia; los contenidos de la didáctica de aquella disciplina: D*d*, que tiene como objeto de estudio la sistematización (en la óptica de enseñanza / aprendizaje eficaz) de los elementos de la disciplina *d*, donde los contenidos específicos de D*d* ya no son solamente los contenidos de la disciplina *d*, son nuevos respecto de *d*; los contenidos de otra teoría, más general, que podría identificarse como aquella que se pone el problema general de cómo pasar del caso específico, de los contenidos de *d* a los contenidos de D*d*, sea cual fuere la disciplina *d*. Esta sería la didáctica general.

En aquel punto, en el artículo se examinaban algunas características de la historia de la enseñanza de la matemática, desde la antigüedad hasta la década de 1970, momento en el cual nace el problema mucho más serio y significativo del aprendizaje de la matemática, dando inicio a la moderna didáctica de la matemática. Se hablaba,

por tanto, de la teoría de las situaciones, dando espacio a los estudios específicos relativos a la transposición didáctica, a la ingeniería didáctica, al contrato didáctico, a la idea de concepto y a la teoría de los obstáculos, citando a Lev Vygotsky (1977, cap. IV).

En el intento de dar voz a varias componentes en este debate histórico, decidimos hacer referencia a ilustres posiciones, aquellas que tuvieron una mejor acogida al inicio de la historia de la didáctica general (Vergnaud, Holbwachs & Rouchier, 1977; Brun, 1981; Audigier, 1990) y de la didáctica específica de la matemática (Douady, 1984; Vergnaud, 1985).

Hay que decir que en 1999 fue publicado un extenso texto nuestro en el cual la didáctica de la matemática era estudiada en todos sus detalles, incluso en relación con los temas que estamos aquí delineando (D'Amore, 1999). La historia de la idea de didáctica, tal como se la concibe hoy en día, puede leerse en Artigue y Douady (1986) quienes, aunque con ciertas diferencias, ponen de relieve su nacimiento en Francia, en 1974.

En cuanto al debate feroz sobre la formación de los profesores de matemática, hacemos hoy referencia a Fandiño Pinilla (2003a); en nuestro artículo del año 2000 se concluía: En el milenio anterior hemos intentado desbancar la idea, aún viva, de que "para enseñar Matemática es suficiente saber la Matemática". No puede ser así y nunca lo ha sido: ya en el siglo XVIII se había comprendido que esto ino era posible! (D'Amore, 2000), sugiriendo las siguientes lecturas: Godino (1996) y D'Amore y Martini (2000) para una profundización en el tema. Aquí nos limitamos a señalar que ya Félix Klein, a finales del siglo XIX, lamentaba la falta de preparación universitaria de la profesión de docente de matemática (Loria, 1933). Según Klein, el período de los estudios universitarios constituye simplemente un paréntesis, lo que él denominó *paréntesis universitario*. Antes, el futuro docente era estudiante de secundaria, después vivía este paréntesis, y finalmente entraba como docente de secundaria; y, dado que no había tenido ninguna preparación en esta profesión, solamente podía recurrir al modelo pre-universitario que conocía y que había vivido.

1.2. Segunda parte

Esta parte del artículo del año 2000 iniciaba con dos preguntas que constituyen un verdadero desafío para los expertos: ¿qué se espera de los futuros desarrollos? y ¿qué tipo de investigaciones podrían asumir un interés relevante?

Por diversos motivos que a continuación se exponen brevemente, la apuesta se centraba en los siguientes temas:

- Registros, semiótica y noética.
- El problema de la fallida devolución.
- El problema de la relación personal con el saber.
- La influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente.

¿Cuál era la relevancia de estos temas en los años del debate (2000), en lo académico, conceptual y social? Distinguiremos los cuatro puntos para hacer un análisis mucho más puntual, aunque breve.

1.2.1. Registros, semiótica y noética

Contexto académico. En el mundo académico estos temas habían entrado de inmediato y sin dificultad, dada su fuerza no solo conceptual sino también concreta. Se trataba de un nuevo camino para el análisis de los contextos de aula. Si, como siempre lo hemos afirmado, uno de los objetivos principales de la investigación en didáctica de la matemática es el estudio analítico de las situaciones de aula cuando se está hablando de matemática, esta nueva dirección ofrecía un potente instrumento de análisis. Por tanto, en el contexto académico el tema semiótico era absolutamente actual.

Contexto conceptual. No hay duda, y lo ratificaremos más adelante, que en el plano conceptual el impacto de estos estudios ha sido importante en contexto internacional. Quisiéramos solo recordar la sorprendente idea de "paradoja cognitiva" hoy llamada "de Duval",[2] sobre la cual se realizaron inmediatamente numerosos estudios, cuyos resultados fueron publicados como artículos, incluso bajo la forma de tesis doctorales. Creemos que tenemos los argumentos suficientes para afirmar que este ha sido el tema de mayor relevancia en el campo de la didáctica de la matemática de aquel período, en los primeros años de la década de 1990, y tal vez aún hoy.

Contexto social. El mundo de la escuela se apropió inmediatamente, en todo el mundo, de estos temas concretos, temas que afrontan la problemática de la didáctica de forma cercana a la praxis escolar, en todos los niveles de escolaridad.

1.2.2. El problema de la fallida devolución

Recordemos que por "devolución" se entiende la primera fase que, en la teoría de situaciones, se propone para definir la denominada situación a-didáctica.

[2] "[...] de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser sino un aprendizaje conceptual y, de otra, es únicamente por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Tal paradoja podría constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo podrían los aprendices no confundir los objetos matemáticos con su representación semiótica si éstos sólo pueden relacionarse a través de sus representaciones semióticas? La imposibilidad de acceder directamente a los objetos matemáticos, más allá de su representación semiótica, vuelve casi inevitable la confusión. Y, por el contrario, ¿cómo podrían los aprendices adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a la representación semiótica, si carecen aún de la comprensión conceptual de los objetos representados? La paradoja se hace aún más fuerte si se identifica la actividad matemática con la actividad conceptual, y si se considera la representación semiótica como algo secundario o extrínseco". (Duval, 1993)

Contexto académico. Si consideramos, como desde hace tiempo estamos proponiendo, que la didáctica de la matemática pueda ser pensada como una matemática aplicada (*applied mathematics*),[3] el problema del fracaso en la fase de devolución tiene aspectos importantes pues sirve para determinar qué es lo que produce un efecto positivo y qué no, en un proceso de tipo causal, lo que precisamente es la base del estudio de la matemática aplicada.

Contexto conceptual. Entender las posibles causas del fracaso en cada una de las fases que constituyen la definición (mejor la descripción) de una situación a-didáctica nos parecía, conceptualmente hablando, un elemento de gran relevancia no solo teórica sino también aplicada.

Contexto social. El abismo entre la investigación y la praxis es un problema real y grave en cualquier contexto: medicina, biología, química, etcétera. Lo es también en didáctica de la matemática. El origen de los problemas estudiados por la investigación científica en didáctica de la matemática tiene como base la realidad empírica de los contextos educativos (escuelas y universidades). Sin embargo, los resultados de la investigación no logran (o por lo menos retardan) llegar a las aulas, a los docentes que podrían aprovechar estos resultados para su trabajo cotidiano. Tratar de entender, a través de la investigación, las modalidades y las causas del fracaso en una praxis educativa aparece como un verdadero problema de fuerte interés social. En el año 2000 este era un problema social muy sentido.

1.2.3. El problema de la relación personal con el saber

En más de una ocasión y en mil modalidades diversas se pudo constatar que la única forma para que el estudiante accediera al saber era haciéndose cargo personalmente de su propio aprendizaje (Brousseau, 1986c). En este punto, el saber ya no es visto por el estudiante como un cuerpo extraño y abstracto, un redundante y vacío conjunto de conocimientos que la sociedad, la institución y el docente eligieron para él, sino que comienza a verlo como un hecho personal, con la intención, en un primer momento, de tener acceso a éste y, en un segundo momento, dominarlo, con un objetivo preciso: usarlo. Pero mientras que en palabras todo esto parece obvio y fácil, en los hechos no lo es. Todos sabemos que el contrato didáctico juega un papel determinante en este

[3] Hoy se entiende, con la acepción "matemática aplicada", el conjunto de varios aspectos y de diferentes ramas de la matemática, cuyos cultores se ocupan del estudio de diversas temáticas matemáticas que se desarrollan en la aplicación de los conocimientos matemáticos en otros campos (no solo científicos o técnicos). Nos inspiramos en Stoltz (2002). En el curso del año 2007 se llevó a cabo en Turín, en el Departamento de Matemática de la Universidad, el Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: Mathematics and its Applications, una de las diversas disciplinas de la matemática aplicada era, precisamente, Mathematics Education. Las Actas de este sector fueron publicadas en un fascículo de la revista de didáctica de la matemática: *La matematica e la sua didattica, 21*(1), Universidad de Turín, 6 de julio de 2006.

proceso: el estudiante está propenso a buscar qué y cómo responder a la solicitud del docente, en lugar de tener un acceso directo al saber. En aquellos años, el debate sobre estos temas estaba muy presente y los resultados de investigación en esta línea eran muy apreciados.

Contexto académico. El tema de investigación ligado con este problema era debatido en los centros de investigación universitaria, por tanto, a nivel académico. Creemos tener los elementos para afirmar que este era uno de los temas de estudio, o mejor dicho de investigación, de mayor presencia en los debates internacionales.

Contexto conceptual. Desde siempre, el ser humano se ha preguntado qué es el saber y cuál es su significado, qué se entiende cuando se dice "ser competente". A finales del siglo XX, estos argumentos estuvieron en el centro de grandes discusiones, tanto que en ocasiones asumieron las formas de discusiones legislativas y curriculares en muchos países.

Contexto social. Como hemos señalado, la importancia de este debate en el campo conceptual se mezcla con sus aspectos sociales. Basta decir que en algunos países se inició la discusión sobre el significado de "alcanzar las competencias escolares". Numerosos programas escolásticos nacionales e indicaciones ministeriales quisieron tener en cuenta esta temática, dando definiciones no siempre idóneas e imponiendo nuevas metas que deberían alcanzar tanto los docentes como los estudiantes.

1.2.4. La influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente

Sobre esta temática ya habíamos hecho referencia en varias ocasiones, denunciando la distancia entre la praxis y la investigación científica empírica (investigación realizada por los núcleos de expertos investigadores en las aulas, con técnicas de investigación diversas y cada vez mucho más precisas y significativas).

De muchos fenómenos de fracaso en el aprendizaje de la matemática hoy se conocen las razones. La investigación ha revelado cuáles son los puntos críticos que llevan a él en diversas situaciones (Brousseau inició este debate en la década de 1980, estudiando y denunciando los famosos "efectos" del contrato didáctico). Pero cuando el docente desarrolla su currículo en el aula, puede crear las mismas situaciones negativas de aprendizaje denunciadas por Brousseau y por otros estudiosos, dado que no conoce estos resultados. Nos preguntábamos en ese entonces ¿cómo colmar este hiato?, ¿cómo saldar este vacío?

Contexto académico. Vale todo lo expresado antes: si la investigación universitaria se hace cargo no solo de realizar la investigación misma sino también de encontrar una modalidad que lleve al docente a conocer los resultados y, en consecuencia, a evitar los errores que hacen imposible el aprendizaje de sus estudiantes, entonces esta investigación se transforma en algo importante desde el punto de vista académico, dando una dignidad diversa y más significativa a la actividad investigativa.

Contexto conceptual. Dicho hiato no es solo un hecho que sucede sin motivos, existen causas de tipo conceptual y no empíricas. Podemos pensar en una sucesión que parece fácil de recorrer:

Evidenciar un problema que impide el aprendizaje de un determinado tema T – estudio conceptual de este fenómeno por parte de los investigadores universitarios – elaboración de un plan de investigación – realización de la investigación – individuación de las causas que generan la falta de aprendizaje del tema T en cuestión – comunicación a los docentes de los resultados de dicha investigación – eliminación o atenuación de los factores que llevan a la falta de aprendizaje del tema T.

Esta secuencia que parece tan lineal, lógica, simple, en realidad no lo es. Este hecho determina un interés conceptual del fenómeno de la no transmisión de los resultados de la investigación a aquellos que deberían ser los naturales destinatarios de dichos resultados: los docentes. No es únicamente un hecho empírico, sino también conceptual, ¿qué es lo que lo determina?

Contexto social. Consideramos que el interés de tipo social relativo a esta temática es obvio, tomando como base lo que dijimos líneas arriba. Los cursos de formación para docentes en servicio y para futuros docentes eran (y son) innumerables; muchos tenían el objetivo de dar a conocer a los docentes los resultados de la investigación en didáctica de la matemática.

2. EVOLUCIÓN Y DESARROLLO DE NUESTRA PERSPECTIVA SOBRE EL TEMA. RELACIÓN CON NUESTRO TRABAJO ACTUAL

Afrontamos ahora un análisis actual de la evolución y el desarrollo, después de una notable distancia temporal de las perspectivas que en aquel año 2000 se presentaron como hipótesis respecto a los temas propuestos.

2.1. Registros, semiótica y noética

Hoy en día todos aceptamos el hecho de que ningún objeto matemático tiene una realidad objetiva; aceptamos que debemos tener presente la "paradoja cognitiva" enunciada por Raymond Duval (D'Amore, 1998a; 1998b). La fácil previsión se manifestó exacta. Dado un objeto matemático, es decir dada una o más de una representación de dicho objeto, el estudiante debe hacerlo propio, construirlo cognitivamente a través de las siguientes acciones:

- *Representarlo* en un registro dado
- *Tratar* sus representaciones dentro de un mismo registro
- *Convertir* dichas representaciones de un registro a otro

Todas estas "operaciones" meta-semióticas son de gran relevancia, e incluso esenciales para el aprendizaje. No se trata de estudios abstractos o inútilmente complicados, como podría pensar quien lee superficialmente sino, por el contrario, de una sentida necesidad. Pero se necesitaron muchos años para entenderlo.

Los estudios teóricos sobre las tesis de Duval llevaron a resultados formidables, algunos sorprendentes. Nos limitaremos a citar solo algunos entre los más cercanos a nosotros (Santi, 2011a; 2011b; Sbaragli & Santi, 2011; Iori, 2017; Iori, 2018).

Otros estudios, hechos como experiencias significativas en el aula, han mostrado cómo las palabras de Duval fueron proféticas en relación con el aprendizaje, lo cual confirma las hipótesis formuladas en el año 2000 (véase un ejemplo en geometría en la primaria, Asenova, 2018).

Varios autores, nosotros mismos, motivados por los estudios sobre la semiótica y luego de realizar un gran número de experiencias en aula, llegamos a concebir un volumen que resumiese teorías y praxis, y que se reveló de gran interés y utilidad para la reflexión y la formación de los docentes (D'Amore, Fandiño Pinilla & Iori, 2013, publicado en italiano, español y portugués).

En cuanto a la paradoja cognitiva de Duval, parecía ser en primera instancia una novedad absoluta en el campo de la semiótica como teoría, relativa al aprendizaje de la matemática y tal vez también en el plano filosófico; pero estudios sucesivos han llevado a demostrar que esta "novedad" no era tal, que la posición de Duval se puede insertar en una tradición muy antigua que los estudiosos de didáctica de la matemática no habían explorado (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi, 2015).

Queremos también hacer notar cómo, a partir de las primeras incursiones de Raymond Duval en el mundo de la semiótica (Duval, 1988a; 1988b; 1993; en particular, 1995) nacieron nuevas teorías que, aun siendo del todo diversas, se relacionan con la semiótica como base teórica y empírica.

Hacemos referencia, como un primer ejemplo, al enfoque ontosemiótico (EOS) que ha tenido éxito internacional (Godino & Batanero, 1994; D'Amore & Godino, 2006; D'Amore & Godino, 2007; Font, Godino & D'Amore, 2007; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017a; solo para mencionar algunos ejemplos).

Como segunda referencia citamos la teoría de la objetivación (TO), que actualmente es de las más apreciadas en el contexto internacional (Radford, 1997; 2002; 2003; 2004; 2005; 2006; 2013a; 2013b; 2014; D'Amore, Radford & Bagni, 2006; D'Amore, 2015; D'Amore & Radford, 2017). Consideramos de particular importancia el trabajo de Radford (2017), en el cual el creador de la TO desvela las bases personales sobre las cuales ideó y construyó dicha teoría.

La proliferación de los estudios de didáctica de la matemática sobre temas relacionados con la semiótica fue tal, que en el año 2006 se decidió publicar una reseña internacional sobre estas investigaciones; con este propósito se invitó a los protagonistas de los estudios de este argumento a delinear las peculiaridades de su personal línea de investigación en un número especial de la revista *Relime* (Radford & D'Amore, 2006).

En estos últimos años, universidades y editoriales se han interesado en producir trabajos de síntesis sobre investigaciones en semiótica, destinados a docentes en formación y a estudiantes de maestrías o doctorados de investigación, incluso, precisamente, como material idóneo para la investigación (Duval & Sáenz Ludlow, 2016; Duval, 2017).

2.2. El problema de la fallida devolución

Sobre este tema no se han hecho estudios específicos, contrario a lo que planteábamos en nuestras previsiones. Lo que suponíamos era que no se trata solo de un problema afectivo o meta-cognitivo o relativo a la institucionalización. El nudo del problema podría radicar en la incapacidad de trabajar dichas operaciones semióticas y meta-semióticas, con la consiguiente renuncia. O podría centrarse en la incapacidad de captar o de aceptar el paso a la institucionalización de la relación personal con el saber. Es decir, se puede ver a la noética y las dificultades ligadas a su acceso como una ulterior causa del fracaso de la fase de devolución (véanse D'Amore, 2003; Becerra Galindo, 2017; Ramírez Bernal, 2017).

2.3. El problema de la relación personal con el saber

En el mencionado artículo del año 2000, se buscaba iniciar una discusión crítica sobre la idea de "concepto", vista la compleja red de interpretaciones que se proponían en aquel período. Pensamos que en ese entonces era relevante la posición denominada antropológica, que evidencia la importancia de las relaciones entre RI(X, O) [relación institucional con el objeto del saber] y R(X, O) [relación personal con el objeto del saber] (símbolos y terminología de Chevallard, 1992). Obviamente, aquí por "objeto de saber" se entiende "objeto *matemático* de saber", lo que Chevallard (1991) define como

> un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diversos registros semióticos: registro oral; de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gesticular; dominio de la inscripción o bien de lo que se escribe o dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos...), vale decir registro de la escritura. (p. 8)

Sobre este tema, en nuestra opinión se han hecho importantes estudios que permitieron aclarar y sobre todo delimitar el problema; la idea de que en la "construcción de un concepto" participarían tanto la parte institucional (el saber) como la parte personal (de quien haya abordado dicho saber, no solo el experto). Esta idea fue sugerida por varios autores, por ejemplo Godino y Batanero (1994), para quienes la "construcción de un concepto" trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y

personales de los objetos matemáticos. ¡Pero el 1994 está antes del 2000! Damos esta referencia solo para colocar históricamente la cuestión. Algunos de nuestros trabajos realizados después del año 2000 afrontaron este tema (por ejemplo, D'Amore, 2001b; 2002; 2003a; 2003b; 2004).

Después del año 2000, una nueva modalidad de estudiar la relación personal con el saber es la de tipo sociológico, modalidad que supera y comprende, según nuestra opinión, la visión antropológica. Entre todos los trabajos producidos en este campo, mencionamos solo algunos entre aquellos más cercanos a nosotros (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore & Godino, 2006; 2007; D'Amore, Font & Godino, 2007; 2008).

Como expresamos antes, este tema se relaciona directamente con otro muy complejo y controvertido, la adquisición de competencias. El estudiante es considerado ya no solo como quien adquiere conocimiento, gracias a una relación personal con el saber, sino también como un individuo competente. Y aquí hay que decir que esta forma de ver la formación escolar tuvo un notable impacto internacional. Nosotros propusimos a la colectividad, a partir precisamente de finales del siglo XX, varios estudios al respecto (Fandiño Pinilla, 1999), en los cuales se configuraba una idea concreta de competencia, y una distinción entre competencia en matemática y competencia matemática: la primera, endógena, interna, intrínseca a la matemática; la segunda, mucho más interesante, permite ver e interpretar el mundo y los fenómenos que en él suceden con ojos matemáticos, es decir una competencia que hace posible interpretar hechos, sucesos, fenómenos, eventos, objetos, artefactos, con la competencia adquirida en matemática, precisamente gracias a una intensa relación personal entre el estudiante y el saber (Fandiño Pinilla, 2003b; 2004; 2005a; 2005b; 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003; 2006). Hasta llegar a la redacción del texto ya citado, que recoge todos los estudios precedentes hechos por Juan Díaz Godino y por nosotros sobre este argumento, intentando dar respuestas complejas, y en ocasiones problemáticas, a los interrogantes de investigación que nos habíamos planteado en los años anteriores (D'Amore, Godino & Fandiño Pinilla, 2008).

2.4. La influencia de la investigación empírica sobre el trabajo concreto y sobre la gestión curricular por parte del docente

Nos limitaremos a hacer notar que para nosotros es necesario iniciar un estudio sobre el nuevo problema de la "didáctica de la didáctica de la matemática" dado que, en muchas universidades, la disciplina didáctica de la matemática está a cargo de colegas con muy buena voluntad pero improvisados, y generalmente ingenuos, que no conocen la disciplina y la confunden con la matemática misma, o con la historia de la matemática, o con la epistemología de la matemática, o con la matemática divulgativa, o con las matemáticas elementales desde un punto de vista superior (en memoria de Félix Klein), o con juegos y jueguitos pertenecientes a la matemática recreativa, o con el sentido

común, o con la experiencia. Sobre este punto hemos propuesto varios estudios, entre los cuales citaremos solo a D'Amore y Fandiño Pinilla (2013b). Queremos evidenciar un hecho que nos parece interesante; existe una versión en español del trabajo de D'Amore & Fandiño Pinilla (2017b), publicado en el libro ya recordado de D'Amore & Radford (2017), que cuenta con los prefacios de Michèle Artigue y de Ferdinando Arzarello. Ahí, Artigue afirma:

> El [...] texto, coescrito con Martha Isabel Fandiño Pinilla, es una reflexión sobre la espinosa cuestión de la enseñanza de la didáctica misma. En dicha reflexión el autor nos invita, basándose en su rica experiencia en este dominio, a comprender cómo el pasaje de la enseñanza de la matemática a la enseñanza de su didáctica, modifica los diferentes elementos del clásico triángulo de la didáctica. Bien se perciben las consecuencias de la ausencia de acuerdos sobre los tipos y los contenidos de saberes que hay que transmitir, aun si dicha ausencia no es suficiente para explicar las razones por las cuales los resultados de la investigación didáctica tienen tanta dificultad en alimentar eficazmente la formación del profesorado. No pude evitar reconocer una relación entre esta reflexión y los debates y trabajos que han sido llevados a cabo en mi propia comunidad acerca de la formación tanto de los docentes como la de los formadores de docentes sobre los equilibrios idóneos entre una didáctica objeto y una didáctica instrumento, así como sobre las técnicas y métodos a desarrollar para anclar la formación en realidades de prácticas y responder de la mejor manera posible a las necesidades de los docentes. (pp. 15-16)

Consideramos que este testimonio de tan ilustre personaje garantiza la importancia de este tema dentro de las futuras reflexiones indispensables para nuestra comunidad global.

Todo esto quiere ser un homenaje a la revista *Educación Matemática*, por su contribución internacionalmente reconocida en didáctica de la matemática.

REFERENCIAS

Artigue, M., & Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie, 20*(76), 69-88.

Asenova, M. (2018). Esperienze relative alle costruzioni geometriche con riga e compasso nella scuola elementare. *La matematica e la sua didattica, 26*(2) [En curso de impresión].

Audigier, F. (1990). Histoire. Géographie. Éducation civique. *Collège Lycée* (8). Paris, France: CRDP.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica, 19*(1), 73-89.

Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 191-201.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. En AA. W., *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428-457). Paris, France: APMEP.

Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie, 101*(3-4), 107-131.

Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*(41), 177-182.

Brousseau, G. (1982). *À propos d'ingénierie didactique*. Université de Bordeaux I, France: IREM.

Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (thèse pour le doctorat d'état). Université de Bordeaux I, France.

Brousseau, G. (1986b). *Le jeu et l'enseignement des mathématiques*. (Alocución al 59esimo congreso AGIEM). Bordeaux, France.

Brousseau, G. (1986c). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématique, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988a). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1988b). *Perspectives sur la didactique des mathématiques*. Bordeaux, France: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1988c). Didactique fondamentale. En *Didactique des mathématiques et formation des maîtres. Actes de l'Université d'été d'Olivet* (pp. 10-25). Bordeaux, France: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1989a). Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège. *Petit x, 7*(21), 47-68.

Brousseau, G. (1989b). La tour de Babel. *Etude en didactique des mathématiques*. Université de Bordeaux I, France: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G., & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux, France: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G., & Perez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Bordeaux, France: IREM de Bordeaux.

Brun, J. (1981). À propos de la didactique des mathématiques. *Math-École, 21*(100-101), 14-21.

Brun, J. (1996). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. En J. Brun (Comp.), *Didactique des mathématiques* (pp. 19-43). Neuchâtel, Switzerland: Délachaux et Niestlé.

Bunge, M. (1985). *Pseudociencia e ideología*. Madrid, España: Alianza.

Conne, F. (1996). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. En J. Brun (Comp.), *Didactique des mathématiques* (pp. 275-338). Neuchâtel, Switzerland: Délachaux et Niestlé.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité

mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, *8*(122), 103-107.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

D'Amore, B. (1998a). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli [Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles]. *L'educazione matematica*, *13*(1), 7-28.

D'Amore, B. (1998b). Objetos relacionales y diversos registros representativos: dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, *5*(15), 63-76.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Italia: Pitagora.

D'Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, *12*(1), 39-50.

D'Amore, B. (2001a). *Scritti di Epistemologia matematica. 1980-2001*. Bologna, Italia: Pitagora.

D'Amore, B. (2001b). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, *8*(27), 51-76.

D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *TED, 10*(11), 63-71.

D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47-51.

D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna, Italia: Pitagora.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 11*(35), 90-106.

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325-336.

D'Amore, B. (2007). Definiciones para el diccionario. En F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Comps.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto* (pp. 72-75; 140-142; 145-147; 335-337). Turín, Italia: Bollati Boringhieri.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. En L. Branchetti (Comp.), *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education* (pp. 151-171). Isonomia, On-line Journal of Philosophy-Epistemologica. University of Urbino Carlo Bo. Recuperado de: http://isonomia.uniurb.it/epistemologica / http://isonomia.uniurb.it/node/30

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática, 14*(1), 48-61.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 327-338.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Una riflessione sul termine "competenza" nell'educazione matematica. *Difficoltà in matematica, 2*(2), 155-164.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari.* Trento, Italia: Erickson.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013a). El paso más largo. Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula. Acta Scientiae. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 15*(2), 246-256. Recuperado de: http://periodicos.ulbra.br/index.php/acta

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013b). La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 36B*(4), 325-353.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica, 11*(1), 89-109.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015b). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, 27(3), 7-44.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017a). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.* Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017b). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. En B. D'Amore, & L. Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 41-66). Bogotá, Colombia: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de: http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Comps.). (2015a). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica.* Congreso Internacional llevado a cabo en Santa Marta, Colombia: Ediciones Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://congresodedacticamatematica.unisabana.edu.co

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Bologna, Italia: Pitagora.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari.* Milán, Italia: Angeli.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare.* Milán, Italia: Bruno Mondadori.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 20*(1), 9-38.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). *El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. Relime, 10*(2), 191-218.

D'Amore, B., & Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Relime, 3*(1), 33-46.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. [Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello]. Bogotá, Colombia: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de: http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Relime, 18*(2), 177-212. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/relime.htm Doi: 10.12802/relime.13.1822

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna, Italia: Archetipolibri.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 38*(2), 49-77.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica, 22*(2), 207-235.

D'Amore, B., Godino, D. J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B*(1), 11-40.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques (thèse d'État)*. Université Paris VII, France.

Durkheim, É. (1922). *Éducation et sociologie*. París, France: PUF.

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 7-25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 57-74.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*(5), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.

Duval, R., & Sáenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fandiño Pinilla, M. I. (1999). Alumnos competentes: objeto de formación (evaluación) del

profesor de matemáticas. En M. Bonilla, M. I. Fandiño Pinilla, N. Sánchez, y J. Romero (Comps.), *La evaluación de profesores de matemáticas* (pp. 32-38). XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Fandiño Pinilla, M. I. (Comp.). (2003a). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna, Italia: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003b). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La Matematica e la sua didattica, 17*(3), 260-280.

Fandiño Pinilla, M. I. (2004). "Diventare competente": una sfida con radici antropologiche. En G. Arrigo (Comp.), *Actas del Congreso de didactica de la matematica 2004* (pp. 109-112). Locarno, Switzerland: Quaderni Alta Scuola Pedagogica.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005a). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. En A. M. Benini, y L. Gianferrari (Comps.), *Valutare per migliorarsi* (pp. 40-48). Nápoles, Italia: Tecnodid.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005b). La competencia matemática: un reto con raíces antropológicas. En *Actas del VII Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina: Universidad de Chivilcoy.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. En B. D'Amore (Comp.), *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione* (pp. 21-28). [Número especial de la revista *Rassegna*]. Bolzano, Italia: Istituto Pedagogico di Lingua Italiana.

Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics, 27*(2), 2-7 and 14.

Godino, J. D. (1996). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. En L. Puig, y J. Calderón (Comps.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas* (pp. 119-137). Madrid, España: CIDE.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics, 94*(3), 275–291. Doi:10.1007/s10649-016-9726-3

Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 95-113. Doi:10.1007/s10649-018-9808-5

Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution*. Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Lakatos, I., & Musgrave, A. (Comps.). (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge, Massachusetts, USA: Cambridge University Press.

Loria, G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. Rapport général. *L'enseignement mathématique, 34*(1), 5-20.

Mialaret, G. (1982). *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. Caen, France: Cerse.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 181-189.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica, 18*(1), 4-23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica, 19*(2), 191-213.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford, & B. D'Amore (Comps.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 103-129.

Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). *De la teoría de la objetivación*. Actas del Congreso Colombiano de Matemática Educativa. Revista Científica, (Número especial). http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2017). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 217-228.

Radford, L., & D'Amore, B. (Comps.). (2006). Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. [Número especial]. Revista *Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1). Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf

Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 203-216.

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. En H. G. Steiner, & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education* (pp. 97-112). Proceedings of the 2nd TME. Bielefeld-Antwerpen, The Netherlands: IDM Publications.

Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics, 88*(77), 285-311.

Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: a comparison between semiotic perspectives. P*roceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME-7). Rzeszów, Poland; University of Rzeszóv.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie, 28*(112), 85-118.

Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education, 4*(2), 117-157.

Schubauer-Leoni, M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. En E. Gallo, L. Giacardi, y C. S. Roero (Comps.), *Conferenze e seminari 1995-1996* (pp. 21-32). Associazione Subalpina Mathesis-Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola". Turín, Italia: Università de Turín.

Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. En L. Artusi Chini (Comp.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 20-45). Bologna, Italia: Zanichelli-UMI.

Vergnaud, G., Holbwachs, F., & Rouchier, A. (1977). Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel chez l'élève. *Revue française de pédagogie, 21*(45), 7-15.

Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y Lenguaje*. Buenos Aires, Argentina: La Pléyade.

Pautas para repensar el sujeto y el objeto desde una epistemología de solidaridad, en tiempos de una educación para el mercado y el consumo

Luis Radford
Université Laurentienne, Canadá

Resumen: Este escrito retoma un problema que se ha convertido en un punto crucial en la investigación en la educación matemática, a saber, el problema de la conceptualización epistemológica del sujeto. Dicha conceptualización aparece, en efecto, como la piedra angular de las teorías en educación matemática: además de definir la relación entre el individuo y su cultura, de esa conceptualización se desprende el papel del propio sujeto, el papel del profesor y el papel de la cultura en la explicación teórica y práctica que las teorías educativas ofrecen del aprendizaje. El problema inicial (Radford, 2000) fue motivado por la posición individualista que propuso el constructivismo durante las dos últimas décadas del siglo pasado, y la emergencia paulatina durante ese tiempo de aproximaciones de corte sociocultural. En la primera parte de este capítulo se discute la posición constructivista. En la segunda parte se discuten algunos intentos por redefinir el sujeto y el aprendizaje en términos coherentes con una aproximación histórico-cultural.

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se retoman las ideas esbozadas en un artículo anterior, "Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento" (Radford, 2000) y se intenta, de acuerdo con la solicitud editorial, mostrar el desarrollo de dichas ideas desde entonces. Se trata de indicar las revisiones, los puntos de inflexión y la adopción de nuevas perspectivas en torno a las ideas originales, es decir, aquellas enunciadas, en mi caso, a fines del siglo pasado y mostrar su relación con mi trabajo actual.

Sobra decir que, además de sentirme profundamente halagado por la invitación editorial a contribuir a la celebración de los 30 años de la revista *Educación Matemática*, la idea de regresar a un escrito anterior que toca un tema que ha sido un hilo conductor a lo largo de mi trabajo de teorización me pareció muy interesante e irresistible. Creo que no me equivoco al decir que, en general, en nuestro trabajo cotidiano tenemos pocas oportunidades para detenernos y realizar un ejercicio retrospectivo a través del cual examinar cómo nuestras propias ideas han ido cambiando o tomando una forma más precisa. Es un momento propicio y único para examinar al mismo tiempo todo aquello que ha entrado en juego en la nueva formulación de ideas anteriores.

2. EL PROBLEMA ORIGINAL

El problema original, es decir, el problema planteado en mi artículo escrito en 1999 y publicado en el año 2000 es, como el título del artículo lo indica, el problema fundamental de la epistemología: la relación entre el sujeto y el objeto. En dicho artículo, el punto de referencia es el que el filósofo prusiano Immanuel Kant desarrolla en sus tres críticas –la *Crítica de la razón pura*, la *Crítica de la razón práctica* y la *Crítica del juicio*.

¿Por qué tomar a Kant como punto de referencia? Hay dos respuestas complementarias a esta pregunta. La primera es que Kant nos ofrece una epistemología muy sofisticada, dentro de la cual el sujeto y el objeto de conocimiento son posicionados de una manera que ha terminado por tener gran influencia en el pensamiento occidental. La segunda respuesta es que precisamente la epistemología kantiana es la que ha primado en la educación matemática –aunque no necesariamente de manera directa: en general, la epistemología kantiana ha llegado a primar a través de la lectura que Piaget, por un lado, y Von Glasersfeld, por el otro, hicieron de Kant.

El siglo pasado se cerró con lo que podemos llamar una creciente insatisfacción con dicha epistemología y el sentimiento cada vez más agudo de que el problema de la relación del sujeto y el objeto no podía concebirse en términos de un sujeto que cogita a solas y que construye por sí mismo su propio saber. Con un interés modesto pero continuo en la obra de Vygotsky, el siglo pasado se cerró con la inquietud de que, para mejor entender los problemas de la enseñanza y el aprendizaje, debíamos considerar también la cuestión de la historia y la cultura. Parecía claro entonces que las corrientes educativas que, por un lado, partían de un sujeto constructor encerrado en sí mismo y las corrientes que, por el otro lado, partían de un sujeto social, no iban en la misma dirección. Mientras que las primeras abogaban por una pedagogía centrada en el estudiante, las segundas abogaban por el estudio de las prácticas sociales subyacentes al aprendizaje.

Es dentro de este contexto que, en el resumen de mi artículo del año 2000, planteaba lo siguiente:

> La intención de este artículo es contribuir a la identificación de ciertas diferencias teóricas en corrientes contemporáneas en la Educación Matemática –diferencias que han conducido a lo que Sfard (1999) ha sugestivamente llamado "la guerra de los paradigmas". Para ello, en la primera parte, discutimos la forma en que la relación sujeto/objeto fue considerada en el seno de dos de las escuelas que han tenido una influencia mayor en el curso que ha tomado la reflexión en el campo de la Educación Matemática, a saber, la escuela piagetiana de epistemología genética y la escuela histórico-cultural vygotskiana. Luego, a la luz de dicha discusión y centrándonos en el campo propiamente dicho de la Educación Matemática, sugerimos que la conceptualización contemporánea del problema general epistemológico sujeto/objeto aparece como elemento constitutivo de diferencias irreducibles en

> aproximaciones particulares socio-constructivistas e interaccionistas, por un lado, y socio-culturales, por el otro. (Radford, 2000, p. 51)

El artículo terminaba con la enunciación de ciertos problemas que, a mi parecer, dichas aproximaciones deberían enfrentar en el futuro.

El primer problema estaba relacionado con lo que podría ser la evolución del constructivismo en los años siguientes. Uno de los puntos discutidos en el artículo era precisamente el esfuerzo que el constructivismo había hecho por incluir una dimensión social en su modelo de aprendizaje. Hubo claramente un esfuerzo que llevó a los constructivistas a alejarse de la concepción individualista del aprendizaje. En un artículo de 1999, Cobb y Bowers (p. 9) decían que "cuando empezamos a trabajar intensamente en la sala de clase hace 12 años, nuestra orientación teórica era primariamente individualista". El remedio que encontraron contra el individualismo fue tratar de considerar la participación del estudiante en las reflexiones colectivas del aula. Sin embargo, esas reflexiones eran consideradas como *facilitadoras* de ese trabajo cognitivo que, en el fondo y en armonía con los principios de la teoría, seguía siendo un trabajo realizado por el propio individuo:

> ...la participación en una actividad como el discurso reflexivo constituye la condición para la posibilidad de aprendizaje, *pero son los estudiantes los que efectivamente realizan el aprendizaje*. La participación en el discurso reflexivo, por consiguiente, puede ser visto tanto como [algo] que hace posible y restringe el desarrollo matemático, pero no lo determina. (Cobb *et al.,* 1997, p. 272) [*énfasis propio*]

En mi artículo del año 2000 trataba de hacer ver que esta estrategia de inserción de lo social en la corriente constructivista era totalmente insuficiente. En dicha estrategia lo social desempeña apenas un papel de simple facilitador o entorpecedor de la construcción cognitiva individual. Y por encima de todo, al reducir lo social a la simple interacción *in situ*, deja fuera de toda consideración a la cultura y a la historia. La pregunta que yo planteaba en esa época era la de saber si en los años venideros el socioconstructivismo podría encontrar otras formas de participación de la dimensión social en las construcciones cognitivas del individuo o si debíamos ver en la participación reflexiva una cota máxima en su concepción del rol de lo social en el aprendizaje.

Otro problema mencionado al final de mi artículo incumbía a las corrientes socioculturales. Se trataba del trabajo enorme que esas corrientes tenían todavía por realizar en lo que se refiere a sus conceptos de base. Señalaba que mientras el constructivismo se había beneficiado de la tradición filosófica centenaria que había empezado con Kant y que había podido ir afinando poco a poco sus conceptos epistemológicos y otros, las corrientes culturales occidentales se han encontrado con una terminología impregnada de acepciones incompatibles o difícilmente utilizables. Mencionaba como ejemplo el concepto de interiorización, que es central en la teoría vygotskiana. Me parecía muy

problemática la idea de interiorización como apropiación del algo externo y su transformación en algo interno al sujeto. ¿Habría otra forma de pensar la relación del sujeto con su cultura?

Otro punto litigioso, de acuerdo con mi análisis, era la elucidación de los tipos de ontología y epistemología que subyacen a las aproximaciones culturales. Para el constructivismo, el problema se resuelve con la adopción de una ontología neutra y una epistemología subjetivista.

De hecho, la verdadera novedad de la perspectiva constructivista no se basa en el principio de que la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial. Tampoco reside en su afirmación de que la función de la cognición no es el descubrimiento de la realidad ontológica (véase Von Glasersfeld, 1995, p. 18). Sin necesariamente negar la existencia de una realidad preexistente, y en un movimiento consistente con la teoría del conocimiento de Kant, el constructivismo no afirma que el conocimiento construido por el sujeto cognitivo corresponde con tal realidad. La verdadera novedad del constructivismo reside en su epistemología: más precisamente, en la negación de la posibilidad de un cierto conocimiento de la realidad (Ernest, 1991).

¿A qué tipo de realidad hacen alusión las corrientes culturales? ¿Cuáles pueden ser los paradigmas de conocimiento de dicha realidad? Las dificultades envueltas en la segunda pregunta pueden ser reconocidas si tornamos a la dicotomía entre conceptos científicos y conceptos cotidianos que aparecen en el capítulo 6 de Vygotsky (1987), en donde la visión moderna de la ciencia parece presentarse como el modo paradigmático del conocimiento. Dicha visión se vuelve problemática si la ciencia es vista como una práctica cultural entre otras tantas de interpretación, ordenación y categorización del mundo.

El último problema mencionado en mi artículo era la necesidad de elaborar un concepto más preciso de cultura.

Estos problemas fueron objeto de reflexión continua en mi trabajo en los años que siguieron a la publicación de mi artículo del año 2000. La reflexión teórica y un trabajo intenso en el aula de matemáticas con profesores, trabajo a través del cual intentábamos entender el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva no individualista, me llevaron poco a poco a plantear los principios de una teoría histórico-cultural de la enseñanza-aprendizaje: la teoría de la objetivación. En los siguientes apartados discuto a grandes rasgos la manera en que estos problemas fueron retomados. Un primer asunto fue encontrar lo que podemos llamar el concepto "fundamental". Por concepto fundamental quiero decir aquel del cual se desprenden los otros conceptos quedando, al mismo tiempo, orgánicamente ligados. Dos vías se me presentaron: tomar la vía del lenguaje o la vía de la actividad.

Este capítulo está organizado como sigue. En las primeras secciones esbozo la vía del lenguaje y menciono las razones principales que me llevaron a optar por la actividad como concepto fundamental. Luego presento la redefinición de aprendizaje que he estado proponiendo en los últimos años y que le da una orientación específica a la teoría de la objetivación dentro de las corrientes socioculturales contemporáneas.

3. LENGUAJE

Las corrientes vygotskianas parten de dos rutas principales para teorizar los problemas del desarrollo humano:

1) aquellas que toman el lenguaje y el discurso como conceptos centrales, y
2) aquellas que toman la actividad humana como la ruta principal.

Ha habido muchas discusiones entre los teóricos vygotskianos respecto a si un enfoque discursivo y un enfoque basado en el concepto de actividad llevan a las mismas conclusiones. (Véase, por ejemplo, Stetsenko y Arievitch, 1997; 2004. Véase también el libro inspirador de Markus (1986), *Lenguaje y producción. Una crítica de paradigmas*.)

De hecho, lo que hay de fondo en estas rutas es la lucha constante para comprender el problema de la relación entre lo individual y lo social, lo subjetivo y lo objetivo, y la vida interna y externa. Es en este contexto que, en el trabajo de Wilhelm von Humboldt (1998), Ernst Cassirer (1980), Mikhail Bakhtin (1986) y Valentin Voloshinov (1973), el lenguaje se convirtió en el vínculo entre las culturas y sus individuos. Bakhtin (1986), por ejemplo, recurrió a la literatura y los géneros discursivos (*speech genres*). Vio en los géneros discursivos las formas a través de las cuales los individuos se relacionan con su cultura. Dichos géneros ofrecen a las personas ubicaciones sociales desde donde ver, interpretar y expresarse. Voloshinov (1973, también escrito como Vološinov), se volvió hacia el *signo*. Consideró que el signo es subjetivo (en el sentido de que es producido por un individuo y expresa las intenciones del individuo) y objetivo (en el sentido de que la expresividad del signo está inserta en un sistema cultural de expresiones y valores). El signo asegura el enlace entre lo subjetivo y lo objetivo. En Voloshinov, el signo por excelencia es la *palabra*. La "palabra está presente en todos y cada uno de los actos de comprensión y en todos y cada uno de los actos de interpretación" (Voloshinov, 1973, p. 15). "La palabra está implicada literalmente en cada acto o contacto entre personas" (p. 19). Basándose en esta concepción de la palabra, Voloshinov, así como Mikhail Bakhtin (1986), trataron al lenguaje y a la literatura no solo como uno de los campos de la experiencia estética y la cognición, sino como el campo central a través del cual se refractan los otros campos culturales. Para ellos, es en última instancia a través del lenguaje y la literatura que la realidad se produce e interpreta. El problema de lo individual y lo social, lo subjetivo y lo objetivo, y la vida interna y externa se resuelve, en la explicación de Voloshinov, en la tensión dialéctica entre las formas centrípetas de cultura relativamente estables (personificadas por la novela) y las formas centrífugas de la cultura, resistencia y novedad (personificadas en la idea de Bakhtin del carnaval). Sin embargo, como señala Tihanov,

> Vološinov terminó por reducir la cultura a un único modo ideal de existencia [...] [uno en el cual] el lenguaje tuvo un papel conspicuo y autónomo en la formación de la

> vida social. Por lo tanto [...] Vološinov persiguió un tipo de teorización centrada en el lenguaje en el campo del pensamiento social. (Tihanov, 1998, p. 615)

4. ACTIVIDAD

Considerar a la *actividad* como el concepto fundamental humano en general, el concepto que da cuenta del nacimiento y encajamiento de lo individual y lo social, el concepto central de los procesos de enseñanza y aprendizaje, significa situarse dentro de una perspectiva diferente de aquella en la que el lenguaje, el discurso y la literatura aparecen como el campo último de la experiencia estética y la cognición. Es pensar la enseñanza y el aprendizaje como procesos imposibles de ser comprendidos fuera de la *actividad* del aula. Es, también, una invitación a considerar y reparar en las maneras sensuales, sensibles y materiales que los profesores y alumnos despliegan cuando hacen matemáticas y producen significados matemáticos en el aula. Esas maneras sensuales y sensibles incluyen la actividad perceptiva, los gestos, las acciones kinestésicas, la postura corporal, el lenguaje, y el uso de artefactos, símbolos, gráficos y diagramas (Radford, 2009).

Optar por la actividad como la formación que da cuenta del nacimiento y encajamiento de lo individual y lo social, y que, en el campo educativo lleva a estudiar la enseñanza y el aprendizaje como fenómenos que ocurren en su seno, es situarse dentro de una concepción antropológica específica de lo humano que propuso el filósofo Baruch Spinoza (1989). De acuerdo con esta concepción, los humanos son parte de la naturaleza: son *seres naturales*. El hecho de que los seres humanos sean seres de la naturaleza o seres naturales significa que son seres sensibles, inevitablemente *afectados* por otras partes de la naturaleza. En este contexto, la afección, las sensaciones y pasiones son conceptualizadas como afirmaciones ontológicas de la naturaleza del individuo (Fischbach, 2014).

Siguiendo esta concepción spinozista de lo humano, dos filósofos alemanes, Hegel (1991) y Marx (1998) fueron más lejos y notaron que, al igual que todos los otros seres vivos naturales, los seres humanos son seres de *necesidad* que encuentran su satisfacción en objetos *fuera de ellos mismos*. Para satisfacer sus necesidades (de supervivencia y también artísticas, espirituales y de otro tipo creadas por/en la sociedad), los humanos se involucran activamente en el mundo. Los humanos *producen*. Lo que producen para satisfacer sus necesidades ocurre en un proceso social que es, al mismo tiempo, el proceso de la inscripción de los individuos en el mundo social y la producción de su propia existencia. El nombre de dicho proceso es precisamente la *actividad*.

Una consecuencia importante de esta postura teórica es que la existencia del individuo no puede ser concebida como una entidad sustancial, producida desde adentro, como lo articula la tendencia humanista de la Ilustración. La existencia del individuo es completamente *relacional*. Está profundamente vinculada a un conjunto de relaciones

materiales e inmateriales con otras partes de la naturaleza –incluidas las relaciones sociales– y se basa en condiciones de vida cultural e históricamente constituidas.

Considerar a la actividad como categoría central no es ignorar el papel del lenguaje en los procesos de conocimiento, sino considerar al humano ante todo como un ser frágil, un ser de *necesidad* (Fraser, 1998), y afirmar el importante papel, ontológico y epistemológico, de la materia, el cuerpo, el movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación en la constitución última de lo humano.

Esta concepción de la actividad como el espacio de la producción humana es muy diferente de las concepciones usuales que proponen las diferentes teorías de la acción –teorías que van desde Aristóteles hasta Piaget y las diferentes formas de constructivismo, incluyendo las teorías post-humanistas como las del nuevo materialismo (véase, por ejemplo, Eagleton, 2016)– que entienden la actividad como una serie de acciones realizadas por un individuo en la persecución de su objetivo. En la línea dialéctica que estoy esbozando aquí, la actividad es otra cosa. Es precisamente la forma específica en la que los individuos *expresan* su vida. "Así como los individuos expresan su vida, así son. Lo que son, por lo tanto, coincide con su producción, tanto *con lo que* producen como con *cómo* lo producen" (Marx, 1998, p. 37). La actividad, en síntesis, es una forma social-cultural-histórica de esfuerzo conjunto que comprende la autoexpresión, el desarrollo intelectual y social y el disfrute estético. Es un proceso en un sistema de relaciones sociales que realiza la naturaleza social de los seres humanos (Roth y Radford, 2011).

La investigación sistemática de la actividad en el sentido anterior fue emprendida por uno de los colaboradores de Vygotsky: A. N. Leont'ev (1978). Al articular un enfoque psicológico basado en la idea dialéctico-materialista de la actividad, Leont'ev sugirió una estructura básica de la actividad. Para él, una actividad se caracteriza por su *objeto* y su *motivo*. El objeto y el motivo de una actividad son los motores que mantienen la actividad en movimiento. En la práctica, en la búsqueda del objeto de la actividad los individuos dividen el objeto en una secuencia de metas a la que se asocian las acciones.

En el "Suplemento" de su importante libro de 1978 –un suplemento dedicado a temas educativos– Leont'ev discute las condiciones bajo las cuales un determinado contenido teórico de aprendizaje puede ser significativamente percibido o atendido por el estudiante. Él sostiene que:

> ...a fin de que el contenido percibido sea reconocido, es necesario que ocupe el lugar estructural de un objetivo directo de acción en la actividad del sujeto, y por lo tanto que aparezca en una relación correspondiente al motivo de esta actividad. (Leont'ev, 1978, p. 153)

Por lo tanto, es a través de la actividad y la interconexión estructural entre el motivo, el objeto, las metas y las acciones que el contenido de aprendizaje se revela a la conciencia del estudiante. La *teoría de la actividad*, como se conoce este enfoque sociocultural, ha tenido un impacto importante en la educación en general y en la educación

matemática en particular (véase, por ejemplo, Jaworski y Potari, 2009; Roth y Radford, 2011). Sin embargo, al centrarse en el aspecto *procedimental* de la actividad, ésta se reduce a su dimensión *operativa* y *funcional*, con lo que se eliminan de ella las dimensiones estéticas y políticas de la acción y la creación. El estudio de la actividad culmina, desafortunadamente, en un análisis tecnológico de lo que fue originalmente pensado como la experiencia sensible de la *vida* humana.

¿Cómo hacer, entonces, para recuperar ese sentido fundamental de la actividad? He allí un gran desafío que me ha llevado a proponer la idea de *trabajo conjunto*. En efecto, la idea del trabajo conjunto, que retomo en la próxima sección, busca reintegrar a la actividad su fuerza ontológica más preciosa, es decir, el lugar *dinámico* donde la existencia humana se crea y recrea a sí misma en el contexto de su cultura y su historia. Desafortunadamente, con su orientación utilitaria y consumista, la actividad contemporánea del aula de matemáticas tiende a producir y reproducir estudiantes alienados. Lo que sugiero es que toda reflexión consonante con un proyecto histórico-cultural de re-conceptualización de actividad de aula que busca ser no alienante requiere una re-conceptualización de dos ejes sobre los cuales reposa toda actividad:

1) las formas de colaboración humana, y
2) sus modos de producción de conocimiento.

En las últimas secciones de este capítulo regresaré a discutir estos ejes. Por el momento, me detendré en la idea de actividad como trabajo conjunto.

5. LA ACTIVIDAD VISTA COMO TRABAJO CONJUNTO

En el materialismo dialéctico (véase, por ejemplo, Ilyenkov, 1977) se considera que el saber (matemático, científico, artístico, jurídico, etc.) está constituido por formas de acción humana que han sido sintetizadas histórica y culturalmente. Son formas sintetizadas de acción y reflexión que conllevan, en formas sedimentadas, las tensiones políticas y las contradicciones de la vida humana. El saber está siempre en el proceso de movimiento continuo, constantemente creado y recreado, e incesantemente transformado en la práctica concreta. El saber pertenece a una esfera inmaterial de la cultura que está entrelazada con el mundo material de los objetos y de las acciones humanas. Esta esfera inmaterial de la cultura es parte de lo que Marx (1998) llamó el "reino inorgánico de la naturaleza", y también es parte de las condiciones a partir de las cuales se elabora la existencia humana.[1]

[1] Fischbach (2014, p. 48) resume la idea de Marx en los términos siguientes: "Se dice, pues, que es 'inorgánico' o 'no orgánico' *(unorganisch)* por Marx, no algo que sería mecánico, sino (por el contrario) lo que constituye una extensión del cuerpo orgánico del hombre, con lo que el hombre es un tipo de cuerpo en el propio despliegue de su propia actividad".

En lugar de ser conceptualmente neutro, el saber es portador de una *ideología* específica. Es decir, el saber inevitablemente permite ver siempre el mundo de *cierta* manera. El álgebra simbólica del Renacimiento, por ejemplo, transmite la postura teórica de la razón instrumental, ocurrida en la región occidental del mundo durante el siglo XVI, y las abstracciones sociales planteadas por el capitalismo mercantilista emergente (Weber, 1992). Y es bajo la postura teórica de la razón práctica y el cálculo que las matemáticas escolares contemporáneas permiten, a través del currículo y de otros mecanismos institucionales, una visión instrumental y técnica del mundo de los objetos y de los seres humanos. Esta visión se produce y reproduce a través de una orientación utilitaria de la actividad en el aula. Esto es lo que hace el aprendizaje tradicional (o direccionado). En él, las matemáticas aparecen como un reino incorpóreo de verdades, y el trabajo de los estudiantes se reduce a la recepción pasiva de información, repitiéndola y memorizándola (Freire, 2004). Los estudiantes no pueden expresarse en los productos de su aprendizaje. La actividad del aprendizaje tradicional no es la expresión de una vida realizada, sino de una vida alienada.

El llamado aprendizaje reformado y su pedagogía piagetiana centrada en el estudiante *(student-centered pedagogy)* ha buscado encontrar en el trabajo del estudiante un escape a la visión técnica del mundo de los objetos y de los humanos. Para ello, ha promovido una pedagogía individualista y romántica que enfatiza la libertad y autonomía de los estudiantes. En esta pedagogía, los estudiantes son abandonados a sus propias reflexiones, interactuando entre ellos, pero movidos por su propio interés. En este enfoque, los estudiantes se expresan, pero permanecen prisioneros dentro de los confines de su universo subjetivo, viviendo una existencia unilateral en un mundo quimérico tomado como compartido, aislado de las perspectivas culturales e históricas en general y, por lo tanto, alejado de ellos. Como resultado, la actividad en el aula vuelve a ser la expresión, no de una vida satisfactoria, sino de una vida alienada (Radford, 2014; 2016a).

La enseñanza-aprendizaje en general y la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en particular, como forma de trabajo conjunto, es un intento de restaurar la idea de actividad en el aula como una forma de vida no alienante. Se inscribe dentro de una comprensión de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural. Tal esfuerzo aspira a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y reflexionan y deliberan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento. Para evitar confusiones con otros significados –y para enfatizar la idea de la actividad como una forma de vida estética producida históricamente, donde la materia, el cuerpo, el movimiento, la acción, el ritmo, la pasión y la sensación pasan a primer plano–, a la actividad, en esta perspectiva, la denominamos *trabajo conjunto*.

El concepto de trabajo conjunto, que juega un papel central en la teoría de la objetivación (Radford, 2008; 2013a; 2018), ofrece una reconceptualización de la enseñanza y el aprendizaje. En el trabajo conjunto, los estudiantes no se reducen a un papel como

simples sujetos cognitivos. No aparecen como sujetos pasivos que reciben conocimiento o como sujetos autónomos que construyen su propio conocimiento. Los docentes no se ven reducidos, como en otras aproximaciones, a un papel de agentes tecnológicos y burocráticos, guardianes y ejecutores del currículo. Tampoco aparecen los docentes como poseedores de conocimiento que entregan o transmiten a los estudiantes, ya sea directamente o a través de estrategias de apoyo estructurado *(scaffolding).* El concepto de trabajo conjunto sugiere una perspectiva educativa en la que la enseñanza y el aprendizaje se visualizan no como dos actividades separadas, sino como una sola y misma actividad: una en la que profesores y alumnos, aunque sin hacer las mismas cosas, se comprometen juntos, intelectual y emocionalmente, hacia la producción de lo que Hegel (2001) llamaba una *obra común*.

La *obra común* es la *apariencia sensual* del saber (por ejemplo, la apariencia sensual de una forma co-variacional, algebraica o estadística, de pensar a través de plantear y resolver problemas colectivos y de la discusión y el debate en el aula). La *obra común* es portadora de tensiones dialécticas por las contradicciones emocionales y conceptuales de las que está hecha. A través de ella, el saber aparece sensualmente en el aula (mediante la acción, la percepción, los símbolos, los artefactos, los gestos, el lenguaje) de manera muy similar, y con una fuerza estética semejante, a la manera como la música aparece fonéticamente en una sala de conciertos a través del trabajo común de los miembros de la orquesta.

Los encuentros del trabajo conjunto-delimitado con el saber matemático históricamente constituido, materializado en la *obra común* del aula de clase, se denominan *procesos de objetivación*. A través de estos procesos sociales, materiales, corporeizados y semióticos, los estudiantes y profesores no solo crean y recrean el saber, sino que también se co-producen como sujetos en general y como sujetos de la educación en particular. Más precisamente, producen subjetividades, es decir, individuos singulares en continua formación. Por eso, desde esta perspectiva los procesos de objetivación son al mismo tiempo procesos de *subjetivación*.

En las siguientes secciones discuto estos dos procesos.

6. PROCESOS DE OBJETIVACIÓN

Como sugerí anteriormente, podemos concebir el saber como sistemas de pensamiento y acción cultural e históricamente constituidos. El saber aparece como una *capacidad* generativa histórico-cultural (una capacidad latente para hacer cosas y pensar de ciertas maneras, por ejemplo, plantar semillas de maíz, calcular hipotecas, resolver ecuaciones lineales, etc.). En esta línea de pensamiento, el saber como capacidad generativa no puede ser algo que podamos "poseer". ¿Acaso podemos poseer un lenguaje? Podemos hablar una lengua, podemos participar en ella, pensar a través de ella, hacer cosas a partir de ella, podemos expresarnos dentro de las formas de expresión que la lengua

(por ejemplo, el español o el francés) permite, pero difícilmente podemos decir "poseo la lengua". Nuestra relación con la lengua no es de posesión, sino de vivencia. Vivimos en el lenguaje y sus lenguas. Lo mismo sucede con el saber. El saber no es una especie de mercancía ni una entidad psicológica. Más bien, es algo que existe en nuestra cultura (en la forma de saber cómo sembrar semillas de maíz, saber cómo calcular hipotecas, etc.) que podemos (o no) encontrar en el curso de nuestra vida (dependiendo de las redes histórico-políticas-culturales de acceso al saber que operan de manera omnipresentemente en nuestra sociedad). Nuestro encuentro con los sistemas de pensamiento cultural e históricamente constituidos (por ejemplo, matemáticos, científicos, estéticos, legales, etc.) es lo que llamamos *objetivación*.

El sustantivo "objetivación" intenta reflejar la idea de que los sistemas de pensamiento cultural e históricamente constituidos, que al momento de nuestro nacimiento ya están allí, en nuestra cultura, pero que aún no hemos encontrado, al principio nos ofrecen resistencia, se nos *oponen*. Aparecen como algo que *no* somos nosotros, que encontramos como algo ajeno, como una forma de *alteridad*. La objetivación es nuestro encuentro con ellos. Y como ese encuentro no es algo que sucede de repente, de golpe, en lugar de hablar de que algo ha sido objetivado, preferimos hablar de *procesos de objetivación*.

Más precisamente, los procesos de objetivación son aquellos procesos sociales y colectivos de devenir, progresiva y críticamente, conscientes de un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituido, un sistema que gradualmente notamos y al mismo tiempo dotamos de significado. Los procesos de objetivación son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no pasivamente sino por medio de una actividad corporal, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica.

En este contexto, el aprendizaje se define como el resultado de los procesos de objetivación. Y dado que los sistemas de pensamiento (matemáticos, etc.) siempre se revelan parcialmente, estos procesos son siempre infinitos y de ahí que también lo es el aprendizaje.

7. PROCESOS DE SUBJETIVACIÓN

Aprender, como se definió previamente, incluye un componente emocional y afectivo. Si bien *a priori* ninguna teoría educativa parecería objetar esta idea, los componentes emocionales y afectivos no son necesariamente partes orgánicas de la mayoría de las teorías educativas sobre el aprendizaje. Este no es el caso de la teoría de la objetivación, donde las emociones, por ejemplo, no se consideran un componente adicional del pensamiento. Por el contrario, siguiendo la visión de Vygotsky, consideramos que las emociones son una parte omnipresente del pensamiento y parte constitutiva de nuestro sentido de ser *(sense of self)* (Radford, 2015). En esta línea de pensamiento, las emociones no son reliquias de nuestro pasado filogenético que hay que dominar para pensar

correctamente, como sugería, por ejemplo, Francis Bacon. En *The New Organon*, Bacon sostenía que "la emoción marca y mancha el entendimiento de innumerables maneras que a veces son imposibles de percibir" (Bacon, 2000, Libro I, pp. 44-45).

Las emociones son constituyentes ontológicos de nosotros, los humanos, como parte de nuestra naturaleza. La afección, es decir, la capacidad de verse afectado por las cosas en nuestro entorno, también es parte de nuestra estructura humana. La implicación educativa es que, en lugar de ser un esfuerzo puramente mental, el aprendizaje de las matemáticas está subtendido por emociones y afecciones en formas y maneras que nos afectan profundamente como seres humanos. Esta es la razón por la cual las aulas no producen solo saberes; también producen subjetividades.

Para investigar la producción de subjetividades en el aula –es decir, la producción de sujetos históricos, únicos, lo que algunos filósofos llaman la *ipseidad* (Descombes, 2010)–, recurrimos a la construcción de procesos de subjetivación: los procesos donde, coproduciéndose en el contexto de la cultura y la historia, los profesores y los estudiantes *vienen a la presencia (come into presence)*.

Venir a la presencia se refiere a la idea del estudiante como alguien que, a través de la actividad en el aula, llega a ocupar un espacio en el mundo social y a tomar una perspectiva en él. Venir a la presencia es un movimiento dialéctico entre la cultura y el individuo. La naturaleza dialéctica de este movimiento nos lleva a concebir a los individuos como entidades en flujo que continuamente se están co-produciendo a partir del trasfondo de la historia, y encuentran en su cultura la materia prima de su propia existencia. Tanto el individuo como la cultura son entidades consustanciales en perpetuo cambio, una convirtiéndose continuamente en la otra y la otra en la una. En este movimiento dialéctico, tanto estudiantes como docentes se consideran subjetividad siempre inacabada, en continua formación. Los docentes y los estudiantes se conceptualizan como proyectos de vida inconclusos y en continua evolución, en busca de sí mismos, comprometidos en un mismo empeño en el que sufren, luchan, y encuentran el disfrute y la realización *juntos*.

8. SÍNTESIS

En este escrito he procurado satisfacer la solicitud editorial de este libro, regresando a una colaboración publicada en la revista *Educación Matemática* hace varios años (Radford, 2000), intentando mostrar cómo los cuestionamientos e ideas de entonces han conocido formulaciones más precisas en estos últimos años.

Respecto al devenir del constructivismo, mi conjetura de entonces respecto a si la introducción de la dimensión social reducida a la mera interacción de los individuos frente a frente sería su acotamiento máximo, me parece que ha sido validada. El constructivismo no pudo avanzar más allá de sus conceptos de normas sociales y matemáticas que presentan dichas normas como producciones *in situ*, sin conexión con

la historia y la cultura. Podemos ver este intento constructivista como un experimento magnífico de teorización que nos muestra con todo detalle los problemas que encierra la conceptualización de lo social cuando se parte de premisas muy subjetivas respecto al individuo y a la producción del saber. El constructivismo es una teoría empirista que puede definirse como la teoría que postula una identidad entre el sujeto y el objeto de conocimiento, es decir: S=O. El objeto, O, no es sino la *prolongación* del sujeto y se queda *enmarcada* en la esfera de éste.

Respecto a las corrientes socioculturales, creo que todavía queda por discutir más acerca de la ontología que se puede adoptar. El materialismo dialéctico parece sacudido por dos fuerzas opuestas: una que lo tira hacia una concepción galileana del mundo, en la que la naturaleza y sus fenómenos (naturales y sociales) se rigen por leyes que el individuo puede descubrir. Esta es la versión "objetivista" del materialismo dialéctico, la que está muy influenciada por la visión moderna de la ciencia. En esta versión, el concepto de número, por ejemplo, no es algo que el individuo inventa, sino que descubre. Esa es, precisamente, la crítica que Davydov (1975) hace a Piaget. Al mismo tiempo, el materialismo dialéctico es jalado por una fuerza opuesta e insiste, como hacen Ilyenkov (1977) y el mismo Davydov (1990), que la cognición humana y su comprensión del mundo emergen de la actividad. En esta versión, los números no pre-existen a la actividad humana, sino que son producidos dentro de ella. La avenida que seguimos en la teoría de la objetivación es la segunda. Toda objetividad es relativa a la cultura.

Siguiendo nuestra discusión de los avances hechos por las corrientes socioculturales, creo que hemos aprendido más acerca de los límites del concepto vygotskiano de internalización (Вращивание – vraschivanie). Un análisis cuidadoso de las "leyes del desarrollo cultural" propuestas por Vygotsky conduce, en efecto, a darnos cuenta de que se trata de un concepto *psicológico* cuya función fue ofrecer una explicación acerca del nacimiento y la transformación de lo que Vygotsky llamaba las *funciones psicológicas superiores* (como la memoria y la atención), y que su transposición al campo de la educación (y en particular, en convertirlo en un concepto para dar cuenta del *aprendizaje*) no puede hacerse directamente; dicha transposición es problemática (Radford, 2018).

Estas cuestiones me llevaron a explorar el concepto de objetivación (Radford, 2013b), cuyo origen se encuentra en la filosofía de Hegel (1991),[2] y a repensar el concepto fundamental de la aproximación histórico-cultural que empezó a tomar forma a mediados de la primera década de este siglo (Radford, 2006). Poco a poco vislumbré lo que creo que son los límites de la teorización de la actividad de Leont'ev, sin la cual, sin embargo, no creo que hubiese podido pensar en el concepto de *trabajo conjunto*. No se trata de abandonar la teorización de la actividad de Leont'ev, sino de intentar expandirla, de manera que pueda ser operacional para estudiar procesos muy precisos que me interesan: los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El concepto de *trabajo conjunto* se basa en (a) formas colectivas específicas de

[2] Una formulación reciente del concepto de objetivación se encuentra en el capítulo 5 del libro de D'Amore y Radford, 2017; véase también una discusión general en D'Amore, 2018.

producción de saber en el aula, y (b) modos de colaboración humana. Mientras que las primeras van en la dirección de indagaciones matemáticas de naturaleza social que se mueven a lo largo de senderos informados por la historia y la cultura, los modos de colaboración humana están impulsados por una ética de solidaridad. Se trata de una ética comunitaria en la que prevalece una actitud general hacia el mundo y sirve para configurar el *trabajo conjunto* de profesores y alumnos en el aula (León Corredor y Lasprilla Herrera, 2018). Estas formas críticas éticas y comunitarias diluyen las fronteras que separan a los maestros de los estudiantes. Maestros y estudiantes trabajan en *forma conjunta como uno solo*. Los procesos de objetivación se tornan aquí procesos que son al mismo tiempo sensibles y sensuales, ideacionales y materiales, simbólicos y discursivos, afectivos y emocionales, críticos y subversivos, transformadores y poéticos.

Es dentro de este contexto que, me parece, podemos encontrar pautas para repensar al sujeto y al objeto. Tenemos pautas para repensar el aula y la actividad matemática. El aula se presenta como un espacio público de debates donde se anima a los alumnos a mostrar apertura hacia los demás, responsabilidad, solidaridad, cuidado y conciencia crítica. En efecto, el aula se presenta como un espacio de encuentro donde profesores y alumnos *vienen a la presencia*. Es decir, el aula se presenta como un espacio de encuentro, de disidencia y de subversión, donde maestros y alumnos se convierten en individuos que se interesan los unos por los otros y por su quehacer conjunto; individuos que intervienen, transforman, sueñan, aprenden, sufren y esperan *juntos*.

RECONOCIMIENTOS

Este escrito es resultado de un programa de investigación subvencionado por *The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada* (SSHRC/CRSH). El escrito retoma, elabora y expande material incluido en Radford (2016b). Agradezco a Isaías Miranda Viramontes su ayuda en la preparación del texto.

REFERENCIAS

Bacon, F. (2000). *The New Organon*. (L. Jardine y M. Silverthorne, Eds.). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Bakhtin, M. M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, Texas, USA: University of Texas Press.

Cassirer, E. (1980). *The philosophy of symbolic forms* (vol. 1). New Haven, USA: Yale University Press.

Cobb, P. y Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher, 28*(2), 4-15.

Cobb, P., Boifi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA, 12*(2), 97-127.

D'Amore, B. y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de la matemática: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* [The teaching and learning of mathematics: Semiotic, epistemological and practical problems]. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Davydov, V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. En L. Steffe (ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (vol. 7, pp. 55-107). Stanford, California, USA: School Mathematics Study Group. (Obra original publicada en 1966).

Davydov, V. (1990). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula.* (J. Teller, Trad.). Reston, Virginia, USA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Descombes, V. (2010). La question de l'individualité humaine. *Philosophie, 106*(3), 38-56.

Eagleton, T. (2016). *Materialism.* New Haven, Connecticut, USA: Yale University.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London, United Kingdom: The Falmer Press.

Fischbach, F. (2014). *La production des hommes. Marx avec Spinoza.* Paris, France: Vrin.

Fraser, I. (1998). *Hegel and Marx. The concept of need.* Edinburgh, Scotland: Edinburgh University Press.

Freire, P. (2004). *Pedagogy of indignation.* Boulder, Colorado, USA: Paradigm Publishers.

Hegel, G. (1991). *The encyclopaedia logic.* (T. F. Geraets, W. A. Suchting y H. S. Harris, Trads.). Indianapolis, USA: Hackett Publishing Company.

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history.* Kitchener, Ontario, Canada: Batoche Books. (Obra original publicada en 1837).

Humboldt, W. von. (1998). *On language: The diversity of human language-structure and its influence on the mental development of mankind.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic.* Moscow, Russia: Progress Publishers.

Jaworski, B. y Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 219-236.

León Corredor, O. y Lasprilla Herrera, A. (2018). Enfoques necesarios para la reflexión sobre una ética comunitaria en la educación matemática. *PNA, 12*(2), 81-96.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall.

Markus, G. (1986). *Language and production. A critique of paradigms.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Marx, K. (1998). *The German ideology, including theses on Feuerbach and Introduction to the critique of political economy.* New York, USA: Prometheus Books.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática, 12*(1), 51-69.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación [Elements of a cultural theory of objectification] [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 103-129. Disponible en: http://luisradford.ca

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126.

Radford, L. (2013a). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: Hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas [Submission, alienation and (a bit) of hope: Towards a cultural, historical, ethical and political vision of mathematics teaching]. *I CEMACYC*, Santo Domingo, República Dominicana. Disponible en: http://luisradford.ca

Radford, L. (2013b). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2014). On teachers and students. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the joint 38th conference of the international group for the psychology of mathematics education and the 36th conference of the American chapter* (vol. 1, pp. 1-20). Vancouver, Canada: PME.

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. En B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 25-49). New York, USA: Springer.

Radford, L. (2016a). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research, 79*, 258-266.

Radford, L. (2016b). Mathematics education as a matter of labor. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of educational philosophy and theory. Section: Mathematics education philosophy and theory.* Singapore: Springer. Doi 10.1007/978-981-287-532-7_518-1.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA, 12*(2), 61-80.

Roth, W.-M. y Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sfard, A. (1999). Doing research in mathematics education in time of paradigm wars. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 1, pp. 75-92). Haifa, Israel: PME

Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding.* (R. Elwes, Trad.). Buffalo, New York, USA: Prometheus. (Obra original publicada en 1667)

Stetsenko, A. y Arievitch, I. (1997). Constructing and deconstructing the self: Comparing post-vygotskian and discourse-based versions of social constructivism. *Mind, Culture, and Activity, 4*(3), 159-172.

Stetsenko, A. y Arievitch, I. (2004). The self in cultural-historical activity theory. Reclaiming the unity of social and individual dimensions of human development. *Mind, Culture, and Activity, 14*(4), 475-503.

Tihanov, G. (1998). Vološinov, ideology, and language: The birth of Marxist sociology from the spirit of lebensphilosophie. *The South Atlantic Quarterly, 97*(3-4), 599-621.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language.* New York, USA: Seminar Press.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* London, United Kingdom: Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works* (vol. 1). (R. W. Rieber y A. S. Carton, Eds.). New York, USA: Plenum.

Weber, M. (1992). *The protestant ethic and the spirit of capitalism.* London, England: Routledge.

Segunda parte

Conocimiento, resolución de problemas y tecnología

De un marco teórico constructivista del aprendizaje de las matemáticas a otro sociocultural en ambientes tecnológicos

Fernando Hitt
Université du Québec à Montréal, Canadá

Resumen: En 1998 escribí un artículo en la revista *Educación Matemática* intitulado "Visualización, nuevas tecnologías y currículum" (Hitt, 1998). Después de 20 años, mi visión sobre estos contenidos ha cambiado desde un punto de vista estructural. En el presente documento, analizando los mismos contenidos de ese artículo, profundizamos sobre las contradicciones de un acercamiento socioconstructivista y una teoría local de representaciones institucionales en la construcción de un currículo de matemáticas. En su lugar, proponemos un acercamiento bajo la teoría de la actividad, inmerso en una teoría sociocultural, que le proporciona un soporte a un método de enseñanza (ACODESA), y una teoría local sobre representaciones funcionales-espontáneas y grupales. Este marco teórico lo hemos utilizado en varias experimentaciones que resumiremos para mostrar nuestro objetivo. En estas experimentaciones hemos considerado los contenidos de matemáticas como el infinito potencial (desde una perspectiva intuitiva) y el infinito actual (desde una perspectiva formal); también la noción de covariación entre variables como preludio al concepto de función y una proposición para desarrollar un pensamiento aritmético-algebraico trabajando los números poligonales.

1. INTRODUCCIÓN

Iniciamos este documento con una visión general a partir de la década de los años 60 del pasado siglo con respecto a cambios curriculares y evolución de ciertas teorías del aprendizaje. La reacción de los matemáticos frente al fracaso de la "reforma de las matemáticas" en la década de los 60 en Europa trajo como consecuencia, diez años después, la creación de grupos de investigación en didáctica de las matemáticas.

En la década de los años 70 el conductismo estaba de salida; aun y cuando la taxonomía por objetivos de Bloom (1956) se utilizaba mucho en los programas de estudio, también era fuertemente criticada por su modelo lineal del aprendizaje. Piaget con sus teorías de la asimilación y la acomodación, así como las nociones de abstracción empírica y reflexiva presentaba una teoría más compleja, mejor estructurada y mejor adaptada al análisis de los procesos de aprendizaje, centrada en el individuo. A partir de la teoría piagetiana, emergió una gran cantidad de teorías constructivistas ligadas

al aprendizaje de las matemáticas, todas ellas centradas en el aprendizaje individual (véase Hitt, 1998). Podemos proporcionar, por ejemplo, la teoría APOS (que en sus inicios era la PO), o la de construcción de conceptos por medio de representaciones de Janvier (1987) y de Duval (1993; 1995).

En otro contexto, la influencia del libro de Krutetskii (1976) sobre el aprendizaje de las matemáticas y su énfasis en individuos con capacidades especiales para visualizar la matemática y resolver problemas impulsó la investigación sobre los procesos de visualización matemática en la resolución de problemas. Otro libro importante en los años 80 fue el de Mason, Burton y Stacey (1982), dirigido a la enseñanza para la resolución de problemas, seguido por el libro de Schoenfeld (1985) que promovía la investigación en la resolución de problemas. En forma paralela, poco a poco se congregaban más adeptos en torno al fortalecimiento de la resolución de problemas vía la visualización matemática (Presmeg, 1986; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Zimmermann y Cunningham, 1991).

A todo lo anterior se agregaba la tecnología, que hacía su aparición más fuerte que nunca. Emergieron computadoras con posibilidades gráficas de gran capacidad y manipulación simbólica y las calculadoras no se quedaron atrás, proporcionando varias representaciones de un mismo objeto matemático en pantalla. Estas tendencias fueron precisamente discutidas en ese artículo de 1998.

2. RELEVANCIA DEL ARTÍCULO "VISUALIZACIÓN, NUEVAS TECNOLOGÍAS Y CURRÍCULUM"

Si consideramos lo dicho en la introducción, el inicio de la década de los años 90 lo tenía todo para el cambio. Precisamente, con entusiasmo desbordante los ministros de educación de varios países se dieron a la tarea de realizar cambios curriculares en la enseñanza de las matemáticas, centrándose en un currículum basado en la resolución de problemas y la visualización matemática, apoyados fuertemente por el acercamiento constructivista y teorías locales sobre las representaciones.

¿Por qué México tendría que seguir a esos autores en la formación de investigadores en didáctica de las matemáticas?

Recuerdo que en las primeras visitas de François Pluvinage a México, él expresaba que le parecía increíble la diversidad de autores que los didactas en México analizaban. Desde su punto de vista, había una riqueza en las intenciones de los investigadores mexicanos para articular de manera coherente diferentes tendencias en el mundo.

Si bien realicé mis estudios de doctorado en Estrasburgo (Francia) y mis profesores fueron Raymond Duval, Georges Glaeser y François Pluvinage, entre otros, fue posterior a mi estancia en Francia que Duval desarrolló su marco teórico sobre las representaciones. Pluvinage, en una serie de conferencias en el Cinvestav, presentó el marco teórico de Duval.

La elección de ese marco teórico fue porque encajaba de manera perfecta en los

cambios curriculares de la década de los años 90. Duval explicitó algo que todos sabían, pero no estaba ni claramente formulado ni puesto sobre la mesa: toda representación de un objeto matemático es parcial con respecto a lo que representa. De allí que los procesos de conversión entre representaciones son sumamente importantes en la construcción de conceptos.

En mi artículo de 1998 expongo la definición de Duval de registro de representación. Para Duval (1993) –dado un sistema de signos con sus operaciones (aritméticas o algebraicas o de otra índole)– se cuenta con un registro de representación si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. La formación de una representación identificable...
2. El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada...
3. La conversión de una representación es la transformación de esta representación en otra representación de otro registro... (p. 44)

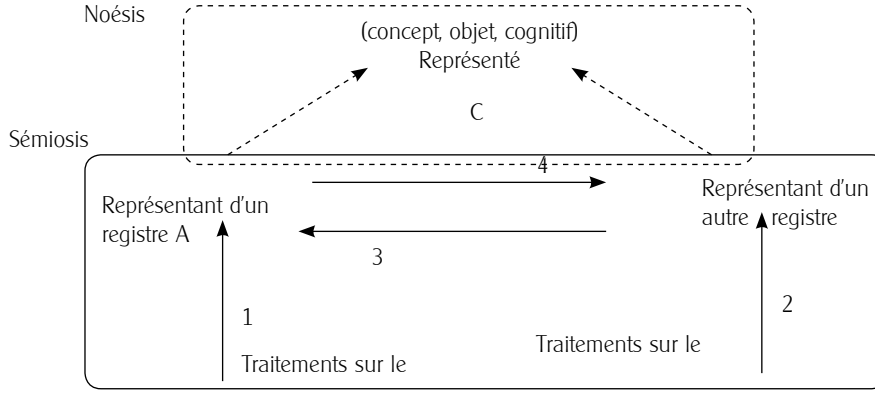


Figura 1. Adaptación de la figura utilizada por Duval (1993, p. 44), Semiosis, Noesis y registros de representación

La relevancia en aquel entonces era que Duval nos mostraba que una enseñanza mono registro (por ejemplo, la clásica representación algebraica) no permitiría la construcción de conceptos de manera adecuada.

En resumen, para Duval todas las representaciones están al mismo nivel en la construcción de conceptos, y sería en la demostración matemática en donde podríamos hacer más énfasis en la representación algebraica. Otro aspecto importante de

la teorización de Duval (1988), es lo que refiere a la importancia de las variables visuales y las unidades significativas en los procesos de conversión. Estos constructos teóricos son aplicables a cualquier tipo de representación, cuando se realiza una conversión entre representaciones. En analogía con el acercamiento piagetiano, podríamos decir que para Duval la abstracción empírica es la *semiosis*, y la abstracción reflexiva la *noesis*.

En mi artículo de 1998 precisamente ponía en relieve esta posición haciendo uso de la historia de las ideas matemáticas, en donde las representaciones figurales (palabra concebida por Duval que no existe en el diccionario francés) jugaron un papel importante en el descubrimiento de la matemática y su desarrollo.

La redacción del presente artículo me ha hecho reflexionar sobre lo expresado en aquel de 1998. He podido darme cuenta de que al tomar el marco teórico de Duval y relacionarlo con la tecnología, hacía una separación estricta entre ésta y las producciones en lápiz y papel, considerando como erróneas aquellas representaciones espontáneas que no eran representaciones institucionales, sin reflexionar sobre la importancia de dotar a los estudiantes de herramientas para su evolución.

La influencia de Duval sobre el rol de las representaciones en la formación de conceptos me llevó a la elaboración de 14 cuestionarios sobre el concepto de función, en donde el objetivo era medir el conocimiento de los profesores sobre ese concepto a través de diferentes representaciones. En ese documento del 98 aparece un poco de una experimentación que realicé con los cuestionarios antes citados (Hitt, 1995). En esa época tenía más contacto con profesores y mis experimentaciones estaban ligadas a la confección de cuestionarios y la detección de errores en la articulación entre representaciones de varios registros.

3. RUPTURA Y EVOLUCIÓN DE UNA TEORÍA LOCAL SOBRE REPRESENTACIONES

Lo expuesto en mi artículo de 1998 era la confluencia imprescindible de la resolución de problemas y la visualización matemática enmarcada en una teoría local sobre representaciones y uso de tecnología.

Un hecho interesante es que invitamos a Duval en 1999 al congreso del PME-NA que se desarrolló en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Ahí, Duval (2002) dictó una conferencia plenaria, ligada a las representaciones y la visualización, cautivando a los presentes. Recuerdo un comentario de Dubinsky en ese congreso: mencionó que desde hacía mucho tiempo no había presenciado en el PME-NA una conferencia tan profunda. A partir de allí, Duval empezó a tener más presencia en México y en el medio anglófono.

En ese año tuve la oportunidad de leer el libro de Glaeser (1999) sobre la importancia de construir tareas eslabonadas; también una tesis de doctorado de uno de los

miembros del grupo AHA,[1] publicada por Hauchart y Rouche (1987). Esa tesis trataba sobre la enseñanza del infinito matemático. Su acercamiento era de corte constructivista con un trabajo en colaboración en el aula de matemáticas (una especie de socio-constructivismo). Para ese trabajo de investigación se elaboraron tareas no rutinarias para promover una construcción social del conocimiento.

Es así que la influencia de esos autores recayó en las tesis que dirigí de Borbón (2003) y de Páez (2004). La organización de tareas y de cómo trabajar en el aula en las experimentaciones correspondientes empezó a determinar algunas de las características de un método de enseñanza. Fue hasta 2007, como profesor en la Université du Québec à Montréal (UQAM) que, reflexionando sobre los resultados de esas tesis, emergió la idea de proporcionarle un nombre a ese método de enseñanza, basado en el Aprendizaje en Colaboración, Debate y Autorreflexión *(Apprentissage Collaborative, Débat et Autoréflexion*), generando el acrónimo ACODESA (Hitt, 2007).

Una de las características principales de ACODESA vino de una idea de Thompson (2002) que expuso en el grupo de representaciones del PME-NA en 1999. En ese documento Thompson expresaba haber realizado una experimentación de un problema de física, formando equipos y discusión en gran grupo. Al final, cuando hubo "un consenso", Thompson recogió todas las producciones de sus estudiantes y les propuso realizar el mismo problema en forma individual; el resultado fue que una gran cantidad de alumnos regresó a su posición original, sin considerar la discusión que se dio en gran grupo, mostrando que el "consenso en el aula" puede ser efímero. De allí surgió la idea de una etapa de "reconstrucción individual" de lo realizado en clase, que la hemos llamado autorreflexión (ver más abajo).

Las ideas escritas en el artículo del 98 prosiguieron en el grupo de representaciones del PME-NA, cuyo trabajo culminó con la publicación del libro *Representations and Mathematics Visualization* (Hitt, 2002a). El artículo de Thompson se publicó en ese libro. Además, se publicó una continuación del artículo del 98 como capítulo: "Construction of mathematical concepts and internal cognitive frames" (Hitt, 2002b). Tal continuación puso de relieve el cambio de paradigma que estaba entre líneas en el documento del 98, al mostrar que las investigaciones sobre "*concept image*" y "*concept definition*" (Vinner, 1983) eran un acercamiento *"top down"* sobre el aprendizaje de las matemáticas. El reverso de la moneda estaba en la importancia de la conversión entre representaciones para la construcción de conceptos en un acercamiento "*bottom up*" promovido por Janvier (1987) y Duval (1988; 1993). Otro punto importante era que Skemp (1971) ya hablaba de estas nociones y precisaba la noción de "esquema", tan utilizada por las teorías constructivistas y socioconstructivistas (con sus diferencias correspondientes, pero en todas aparece esta noción núcleo).

En Hitt (2002b) se presenta por primera vez un ejemplo de una producción de una niña de 6 años que utiliza representaciones no institucionales para resolver un proble-

[1] El grupo AHA se constituyó en Bélgica con la intención de producir artículos y libros de difusión sobre los resultados de investigación de los didácticos de las matemáticas belgas.

ma similar al propuesto por Schoenfeld de los pollos y conejos, y el de un niño con conocimientos de álgebra que mezcla las incógnitas en forma contradictoria, sin resolver el problema. En ese escrito se hace del todo evidente el germen de las representaciones funcionales-espontáneas: *"From our point of view the representations generated first in her mind and then putting them on her notebook, show us a dynamic idea of a representation in a functional context"* (p. 253).

Regresando a las tesis de Borbón y de Páez, presentamos a continuación un par de actividades como muestra de toda una secuencia (con duración de 4 meses), en donde son tratados los conceptos de infinito potencial e infinito actual. Remitimos al lector a la tesis de Páez (2004) para una ampliación de la información; simplemente queremos mencionar que fue en estos trabajos donde empezamos a considerar lo que Glaeser (1999) y Artigue (2002) señalaban sobre la importancia de diseñar actividades eslabonadas para impartir cursos completos de matemáticas. A diferencia de resolver problemas aislados, donde se trataba parcialmente un concepto, las actividades eslabonadas tenían como propósito la reflexión sobre un concepto desde múltiples ángulos, que permitiera al estudiante la construcción del concepto en cuestión.

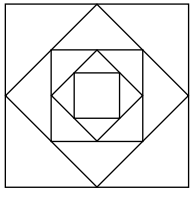
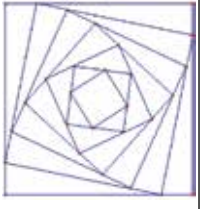
Partiendo de un cuadrado de lado mayor que uno, trace otro al interior desplazando sus vértices a los puntos medios de los lados del primero. Prosiga su construcción. ¿Hasta dónde se puede realizar esta construcción? Si designamos por l_n el lado del n-ésimo cuadrado, ¿Existe el $\lim_{n\to\infty} l_n$?	
Partiendo de un cuadrado de lado mayor que uno, trace otro al interior desplazando sus vértices como se indica en la figura: cada vértice está sobre un lado del primer cuadrado a una distancia igual a 1 cm de su vértice. Trace otro cuadrado siguiendo el mismo proceso y después otro más y así sucesivamente. ¿Hasta dónde se puede realizar esta construcción? Si designamos por l_n el lado del n-ésimo cuadrado, ¿Existe el $\lim_{n\to\infty} l_n$?	

Figura 2. Dos actividades donde, en un caso, la intuición puede llevarnos a un resultado correcto, y en otro a uno falso

Un análisis *a priori* nos muestra que en esta actividad se quiere promover la obtención de un resultado correcto si uno sigue su idea intuitiva sobre la noción de infinito potencial. En la segunda actividad el caso es completamente diferente, la intuición ligada al infinito potencial lleva al error. Con estas actividades se quería dar inicio a una diferenciación entre las ideas intuitivas y las formales; se seguían las ideas de Fischbein

(1987) sobre la importancia de educar las intuiciones e intentar promover que ellas pasen a otro nivel, en una serie de actividades eslabonadas como las sugeridas por Glaeser (1999) y Hauchart y Rouche (1987). Nuestro objetivo era analizar si los miembros de un equipo se encontraban en situación contradictoria y cómo podrían salir del conflicto interactuando con la actividad (Brousseau, 1997) y no porque el profesor se lo dijera.

En el trabajo de un equipo, en relación con la construcción de una definición de convergencia de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se encontró la siguiente representación en papel (parte izquierda de la figura 3).

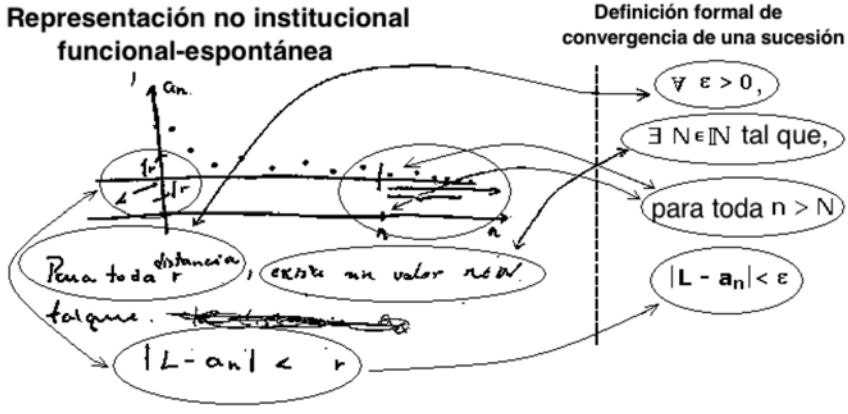


Figura 3. Comparación de una representación no-institucional ligada al concepto de límite y la representación formal

Los resultados de la tesis de Páez (2004) me impactaron fuertemente. Incluso tuve la oportunidad de discutir sobre este punto con Duval en 2005, en términos de transformar su teoría para que incluyera representaciones no-institucionales. Sin embargo, esta posición desplazaba la definición de registro de representación y él consideró que no habría manera de transformar su marco teórico. Sin embargo, en un escrito de 2006, Duval incluye un párrafo mencionando uno de mis trabajos (Hitt, 2003) y proporciona un nombre a ese tipo de representaciones: "representaciones transitorias". Desde mi punto de vista, había que otorgarle mayor importancia a este tipo de representaciones que la que él le estaba confiriendo. Ya para ese entonces tenía conocimiento del trabajo de diSessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski (1991), en donde ese equipo le reconocía un lugar especial a lo que ellos nombraron meta-representaciones.

En el caso de Borbón (2003) y Hitt (2007; 2011), las actividades que se propusieron a profesores en ejercicio estaban muy centradas en el uso de tecnología y el aprendizaje de las matemáticas. A continuación, presentamos un problema que podría catalogarse como ejercicio de tipo rutinario.

Calcular la derivada de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Figura 4. Actividad seleccionada en el estudio de Borbón (2003)

Un análisis *a priori* nos muestra que es una función continua y derivable. El problema consiste en cómo calcular la derivada de la función definida en partes. Debemos aclarar que la noción de continuidad y de derivada está ligada a la noción de vecindad, pero el acercamiento en los primeros cursos de cálculo nos enseña técnicas de derivación generales para cualquier punto en donde las funciones utilizadas son funciones derivables definidas con una sola expresión algebraica, y lo que se desarrolla son automatismos más que reflexiones conceptuales.

Los estudiantes profesores de la experimentación derivaron de manera informal cada parte de la función, y se encontraron ante el resultado siguiente: $2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$, e igual a cero, para $x = 0$.

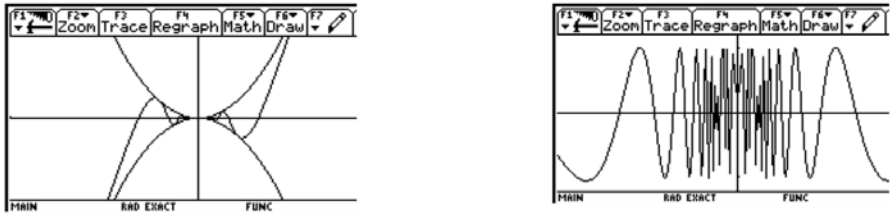


Figura 5. La función (continua y derivable) y su derivada (discontinua y por tanto no derivable en cero)

La actividad, que podría pensarse como rutinaria, pasó a debate y la discusión se centró en lo que sucedía en cero y si verdaderamente se tenía derecho a derivar en forma separada. Los estudiantes profesores contaron con una calculadora TI92 a lo largo del curso. En su debate, incluían discusiones sobre las limitaciones de la calculadora y hasta dónde podían confiar en ella. El análisis del comportamiento de la función, "aplastada" por las representaciones de x^2 y $-x^2$, sugerían que la derivada en cero fuera igual a cero, pero la función derivada tenía un comportamiento oscilatorio (véase la figura 5). Y para completar el escenario, se sorprendieron enormemente con el resultado de la figura 6, que decía que no se podía encontrar la derivada en cero.

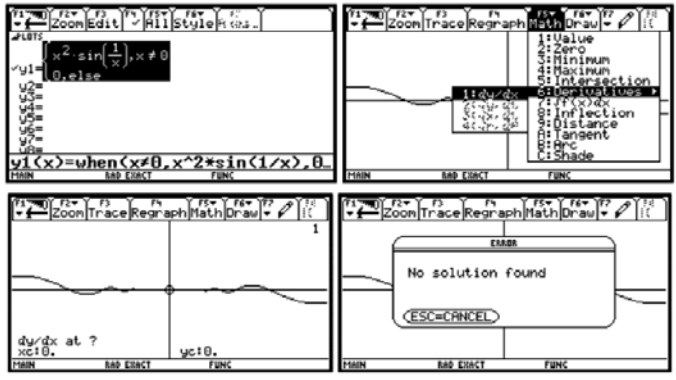


Figura 6. La calculadora con manipulación simbólica no encuentra una solución

Así, la discusión pasó a lo que Legrand (2001) llama debate científico. Tres sesiones de dos horas llevaron a los estudiantes a descubrir que: *la Derivada de una función continua y derivable no necesariamente proporciona una función continua.* Precisamente el diseño de la actividad estaba ligado a un análisis del infinito actual alrededor del cero y a la importancia de la continuidad y de la derivada.

En estas dos investigaciones se utilizó el método de enseñanza en colaboración que permitió poner las bases a lo que posteriormente, como ya dijimos, hemos llamado ACODESA, que tiene que ver con un aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión (Hitt, 2007). Finalmente, el método de enseñanza quedó constituido por cinco etapas:

Etapa 1. Trabajo individual. Producción de representaciones funcionales-espontáneas ligadas al entendimiento de la tarea.

Etapa 2. Trabajo en equipo sobre la misma tarea. Procesos de discusión y validación sobre las producciones de los alumnos. Distribución de trabajo (Engeström, 1999), refinamiento y evolución de representaciones.

Etapa 3. Discusión (podría provocar un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). La discusión en plenaria no es fácil de dirigir, el maestro tendría que promover la comunicación científica (Legrand, 2001), en donde la validación sea un elemento esencial, de manera que se favorezca un aprendizaje equitativo.

Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual (reconstrucción y autorreflexión). Esta etapa es crucial en el método ACODESA, ya que todo el trabajo individual y en equipo, una vez pasado el consenso, se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un período de reconstrucción (autorreflexión).

Etapa 5. Institucionalización del conocimiento. Procesos de institucionalización y uso de representaciones institucionales. En esta etapa, el maestro resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales.

Las experimentaciones de Borbón y Páez se realizaron con estudiantes profesores; un nuevo desafío se presentaba al querer extender este método de enseñanza a estudiantes de nivel secundario y preuniversitario.

4. RELACIÓN CON UNA NUEVA PERSPECTIVA DE ENSEÑANZA DE CORTE SOCIOCULTURAL EN AMBIENTES TECNOLÓGICOS

En esta sección queremos enmarcar el método de enseñanza bajo una teoría sociocultural del aprendizaje (teoría de la actividad), y una teoría local sobre representaciones, la cual constituyó una nueva etapa en nuestro acercamiento.

Para ubicar mejor esta nueva perspectiva, proporcionamos en seguida el desarrollo de la teoría de la actividad iniciada por Vigotsky (1962) con su introducción de acción mediada por herramientas, la cual fue profundizada por Leontiev (1978). En esta teorización la unidad no es el individuo y el objeto, como en otras teorías, sino la producción completa de una tarea de la parte del individuo, iniciando con una concepción hasta su realización. Bajo este aspecto, ya no se puede hablar de estímulo y respuesta (teoría conductista), ya que en la teoría de la actividad los estímulos y las respuestas son parte de una unidad. Para Leontiev, objeto/motivos son inseparables, los motivos están inmersos en un contexto social, y las acciones ligan la actividad de acuerdo con el contexto. Las acciones pueden ser físicas o mentales y su asimilación las convierte en operaciones (Hitt y Quiroz, 2017).

Bajo la perspectiva sociocultural de Vigotsky, Voloshinov (1973) afirma que la construcción del signo se realiza bajo un proceso de comunicación: "*The reality of the sign is wholly a matter determined by that communication. After all, the existence of the sign is nothing but the materialization of that communication. Such is the nature of the ideological signs*" (p. 13).

La teoría de la actividad continuó su evolución; por un lado, es en el trabajo de Engeström (1999) en donde encontramos una extensión del modelo de Leontiev aplicándolo a micro sociedades como hospitales. Por otro lado, las ideas de comunicación y procesos de objetivación en el aula de matemáticas fueron proporcionadas por Radford (2003) concibiendo lo que él designa como CSS *(Cultural Semiotic Systems): "Those cultural systems which make available varied sources for meaning-making through specific social signifying practices*" (p. 11).

Desde Vigotsky sabemos que un acercamiento sociocultural tiene que ver con la sociedad considerada por individuos, artefactos y acciones mediadas. Precisamente

Rabardel (1995) y Guin y Trouche (1999) implementaron las ideas de acción mediada por herramientas para introducir el marco teórico de génesis instrumental[2] y procesos de instrumentación e instrumentalización en contextos tecnológicos. Así, si en el nacimiento de la teoría de la actividad la tecnología no estaba directamente integrada, ahora es usual hablar de esquemas de acción que trascienden al individuo y que están ligados a estos procesos de instrumentación e instrumentalización.

Con todos estos elementos teóricos, nos hacía falta un método que nos permitiera ir al aula de matemáticas y trabajar en forma organizada las situaciones que nos interesen, de manera que los alumnos discutan y progresen en la formación de conceptos. En este punto, nos dimos cuenta que poco a poco ACODESA se identificaba más y más con una estructura sociocultural del aprendizaje, y precisamente encontramos en el trabajo de Engeström (1999) la relación que nos faltaba (figura 7).

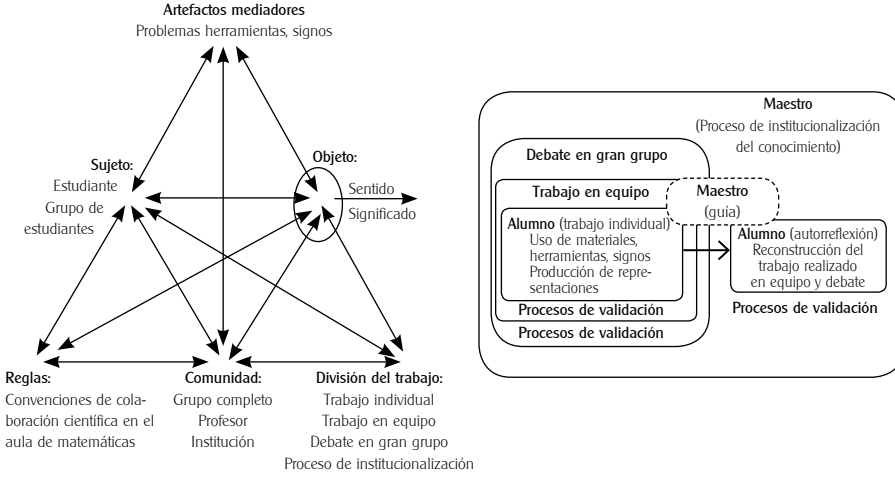


Figura 7. El triángulo de Engeström y ACODESA

En la etapa 1, presentada en la sección anterior del método ACODESA, se habla de la producción de representaciones funcionales-espontáneas, que constan de tres partes: una representación mental, ligada por esquemas de acción, y una representación externa.

[2] Según Rabardel (1995), en la génesis instrumental (conversión de un artefacto en herramienta), un individuo frente a un artefacto tiene acciones (modos de uso) que van del individuo al artefacto (procesos de instrumentalización), pero también en esta interacción al individuo se le presentan restricciones o posibilidades (de acuerdo con cómo fue concebido el artefacto); a estos procesos les llamó procesos de instrumentación.

En las etapas 2, 3 y 4 se habla de refinamiento de las representaciones generadas en la primera etapa, a través de la comunicación y de autorreflexión. Aquí queremos hacer un paréntesis. En la introducción de su libro *Pensamiento y lenguaje* (1962), Vigotsky menciona la investigación de Durkheim (1898) sobre las representaciones colectivas. Durkheim es el padre de las teorías sobre las representaciones sociales presentes en el siglo XX. En ese sentido, la noción de *habitus* (concepto al que, en las conclusiones, definiremos con precisión en nuestro contexto) es de suma importancia en una teoría sociocultural (Bourdieu, 1980).

Bajo esta perspectiva, nos hemos interesado en concebir un nuevo elemento teórico (Hitt y Quiroz, en proceso) que hemos incorporado a nuestro método de enseñanza ACODESA: *representación grupal*. Este tipo de representación es el producto de una historia colectiva en el aula, la cual se construye y se transforma, dentro de un proceso de objetivación y comunicación en la construcción del signo o concepto, durante las cuatro primeras etapas del método ACODESA.

Estas nociones de representación-funcional, representación grupal, y método de enseñanza ACODESA nos permiten ir en la dirección de la construcción de una teoría local sobre representaciones inmersa en una teoría general sociocultural del aprendizaje, cuyas definiciones son las siguientes:

Definición. Nombramos *representación institucional* a la representación que se encuentra en los libros de texto, pantallas de computadoras o aquellas que utiliza el profesor de matemáticas en su enseñanza.

Definición. Nombramos *representación funcional-espontánea* a la representación que un estudiante concibe en la acción de comprender una tarea matemática no rutinaria, y a la producción espontánea de una representación ligada con la situación. Ese género de representación es un conocimiento operacional en la acción, y el producto (la representación espontánea externa) permite al alumno comprender la situación y reaccionar en forma estructurada para modelar y apropiarse de la situación.

Definición. Nombramos *representación grupal* en el aula de matemáticas a las representaciones desarrolladas por los alumnos a través de una historia colectiva en el aula, la cual se construye y se trasforma dentro de un proceso de objetivación y comunicación en la construcción del signo o concepto. Es decir, a través del trabajo individual, trabajo en equipo, debate en gran grupo y autorreflexión (primeras cuatro etapas de ACODESA) (Hitt y Quiroz, en proceso).

5. REFLEXIONES Y APORTACIONES ADICIONALES

Mi paso por la Universidad de Ginebra (2010-2011) me permitió conocer un proyecto europeo (proyecto PRIMAS) sobre la importancia de articular las diferentes didácticas de la ciencia. El elemento unificador era la modelación matemática. Una problemática

similar en Quebec, donde el Ministerio de Educación sigue un programa por competencias matemáticas, y en donde la primera competencia es la resolución de situaciones-problema, me hizo comprender que la modelación matemática es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Y es así que, después de 20 años de aquel artículo en la revista *Educación Matemática*, investigando en colaboración con colegas mexicanos y participando en foros académicos, se fue transformando mi investigación, en donde la modelación matemática es central.

Las investigaciones actuales tienen sus raíces en ese escrito de 1998 y las quisiera mostrar en los siguientes apartados.

5.1. Ejemplos de enseñanza utilizando ACODESA en el aula de matemáticas

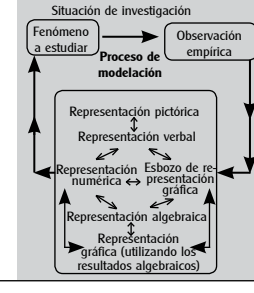
5.1.1. ACODESA en la formación de alumnos de 3º de secundaria sobre el concepto de covariación entre variables, y el de función y uso de materiales físicos

Conscientes de la importancia de llevar al aula de secundaria el método de enseñanza ACODESA, decidimos trabajar en colaboración con un profesor de matemáticas de una escuela secundaria. Él nos permitió la posibilidad de sustituir un capítulo del texto sobre la modelización matemática. Se diseñaron cinco actividades eslabonadas (definidas como *situaciones de investigación*) para trabajarlas durante seis semanas, con el objetivo de construir en el aula los conceptos de covariación entre variables y el de función (véase Hitt y Morasse, 2009; Hitt y González-Martín, 2015; Hitt y Quiroz, en proceso). Como ustedes pueden ver, el concepto de función seguía presente, un cambio era el de mirar con mayor cuidado los procesos requeridos en la construcción del concepto de covariación entre variables, como preludio del concepto de función.

En este nuevo período, a diferencia de lo realizado en el artículo del 98, la manipulación de objetos físicos, el trabajo en papel y lápiz, y el uso de tecnología están integrados en las situaciones de investigación.

Cuadro 1. Actividades eslabonadas (situaciones de investigación) para la promoción de la covariación entre variables y el de función

Actividad/ Representación	Verbal	Diagrama	Gráfica	Algebraica
El fotógrafo	✓	✓	✗*	✗*
El explorador	✓	✓	✓	✗*
El jacuzzi	✓	✓	✓	✓
Los cuadrados	✓	✓	✓	✓
Las sombras	✓	✓	✓	✓



* Representación no solicitada (importante en el diseño de las tareas eslabonadas)

El profesor mencionó que con su grupo "fuerte en matemáticas" (36 alumnos) sería conveniente realizar la experimentación para obtener buenos resultados. Añadió que era imperativo realizar la experimentación con otro grupo "débil en matemáticas" (24 alumnos) ya que, en su institución, no le permitirían una enseñanza diferente entre grupos. Finalmente, los resultados más importantes se obtuvieron con el "grupo débil".

Presentaremos algunos aspectos de la actividad del explorador. Para mayor información, consúltese Hitt y Morasse (2009), Hitt y González-Martín (2015) y Hitt y Quiroz (en proceso).

El explorador. Un caminante emprende una larga caminata a través del bosque. Él sigue una pista que le permite regresar a su punto de partida al final del camino. Durante la caminata, no pasa jamás por ningún punto que ya pasó. Existe un puesto de seguridad situado al interior de la región delimitada por la pista. Una asta con una bandera permite al caminante ver el puesto de seguridad desde cualquier lugar que se encuentre en la pista. Traza una pista de tu elección y coloca el puesto de seguridad al interior. La distancia entre el caminante y el puesto de seguridad varía de acuerdo al lugar donde se encuentra el caminante en la pista. Describe esta variación.

Figura 8. Primera página (entre 11) de la situación de investigación sobre el explorador

En esta actividad se solicitó a los alumnos la utilización de cuerda, alambre flexible y palillos de madera para las primeras cuatro fases de ACODESA. En la quinta fase de institucionalización es posible incorporar la tecnología de parte del profesor. La actividad promovía un pensamiento diversificado sobre la covariación entre variables, en donde no se contemplaba la representación algebraica.

Entre varias pistas, trabajadas de manera individual y en equipo, los alumnos eligieron un cuadrado con la bandera en el centro. El grupo de 24 alumnos señalado como "débil" se mostró mucho más abierto a la discusión en equipo y en gran grupo que el de 36. Bajo la experimentación, pudimos percibir que el grupo más numeroso contaba con alumnos con conocimientos algebraicos más sólidos que el otro grupo, y el profesor consideró que estos alumnos serían más aptos en los procesos de modelación. Sin embargo, el trabajo en colaboración fue más efectivo en el grupo de 24 alumnos que en el otro. Este resultado parece corroborar lo señalado por Murray (1998), que dice que los resultados con más de 30 alumnos en el aula son similares, sin importar el método de enseñanza.

En el grupo de 24 alumnos se presentó la ocasión de un debate cuando ellos llegaron a modelizar la situación en forma gráfica con la ayuda de la cuerda y seleccionando puntos estratégicos de la pista cuadrada (puntos medios y esquinas, véase la figura 9). Ello proporcionaba de manera gráfica tres modelos diferentes para la misma situación, lo cual no era admisible por los mismos alumnos. Este debate no se dio en el grupo de 36 alumnos.

Figura 9. Diferentes representaciones gráficas ligadas a diferentes procesos de modelación para la pista cuadrada

La discusión entre los alumnos era tan grande que el profesor empezó a perder el control de la situación. Como consecuencia, el profesor suspendió el debate y solicitó un procedimiento a seguir que permitiera decidir sobre las tres propuestas. Los alumnos respondieron que sería conveniente tomar más puntos de referencia sobre el recorrido del explorador sobre la pista. El trabajo en equipo en esa dirección mostró a todos los alumnos que la tercera representación era la correcta. La siguiente parte de la actividad consistía en el proceso inverso. Poner la bandera en otro lugar, realizar la representación gráfica, mostrar solamente la representación a los alumnos y solicitar que dedujeran el sitio donde se encontraba la bandera. Los alumnos lo realizaron sin ninguna dificultad.

En la quinta fase ligada a la institucionalización, el profesor puede utilizar Geogebra para cambiar el tipo de pista y lugar donde se sitúa la bandera. En este caso, hemos cambiado el explorador por un auto y la bandera por un aparato (control remoto) para dirigir el auto (figura 10).

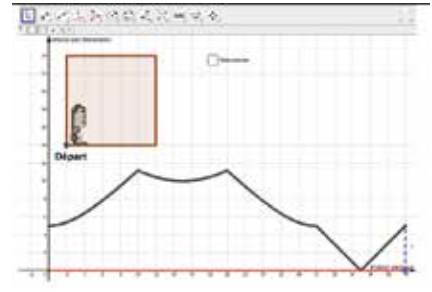
Situación	
Auto miniatura y una persona utilizando un control remoto al interior de la pista o sobre la pista. Pregunta: Dada la siguiente representación gráfica, ¿en dónde está colocada la persona con el control remoto?	

Figura 10. En la institucionalización, el profesor puede reforzar los procesos inversos de construcción de gráficas, haciendo uso de tecnología

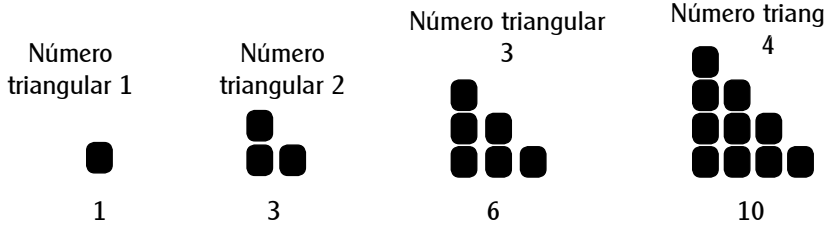
Hemos presentado exclusivamente una de las actividades (la 2ª); sin embargo, al final de las cinco actividades presentadas en el cuadro 1, los alumnos a través de sus producciones mostraron ideas originales sobre la covariación entre variables (por ejemplo, véase figura 9), procesos de modelación, y finalmente con las últimas actividades el de función.

5.1.2. ACODESA con alumnos de 1º de secundaria en Quebec y 3º de secundaria en México, sobre el concepto de covariación entre variables para el desarrollo de un pensamiento aritmético-algebraico y uso de Excel, calculadora y applet POLY

A principios de la década de los años 90, habíamos trabajado tareas eslabonadas sobre los números poligonales en ambientes tecnológicos en la formación de profesores (Hitt, 1994). En ese tiempo no habíamos concebido el método ACODESA. En esta nueva experimentación (Cortés, Hitt y Saboya, 2016; Hitt, Saboya y Cortés, 2017), y con alumnos de secundaria, queríamos integrar ambientes de papel y lápiz y tecnología (Excel, un applet POLY y calculadora). Nuestro intento era también experimentar tanto en México como en Quebec. No se intentaba realizar una comparación entre poblaciones, sino analizar estrategias de resolución de tareas eslabonadas en ambientes tecnológicos en diferentes niveles educativos.

En Quebec, la experimentación se realizó con 13 alumnos de 1º de secundaria sobre los números triangulares. La experimentación se implementó de la siguiente manera: Dos sesiones de hora y 20 minutos, una entrevista intermedia (una semana después) y la 4ª fase de autorreflexión se realizó 45 días después. Esta decisión estaba ligada a poder medir la retención de conocimientos después de lo sucedido en clase 45 días después (relación de lo que los psicólogos llaman la curva del olvido), repitiendo la actividad de los números triangulares para todos los alumnos. A uno de ellos se le añadió un desafío sin que él lo supiera sobre los números pentagonales (Hitt *et al.,* 2017). La población de México constaba de 14 alumnos, ellos ya tenían conocimiento del álgebra elemental. Los alumnos trabajaron la actividad durante una semana, incluyendo la capacitación para utilizar una calculadora TI-Nspire (figura 11).

Primera actividad (trabajo individual y después trabajo en equipo)



1) Observa bien esos números. ¿Cuál es el quinto número triangular? Represéntalo. Explica tu procedimiento.
2) Según tu punto de vista, ¿cómo se construyen los números triangulares? ¿Qué observas?
3) ¿Cuál es el décimo primer número triangular? Explica cómo lo haces para encontrarlo.
4) Te solicitamos escribir un corto mensaje a un amigo o amiga para describirle lo que tiene que hacer él o ella para calcular el número triangular 83. Describe cómo debería proceder. NO TIENES QUE REALIZAR LOS CÁLCULOS.
5) Y para calcular cualquier número triangular, ¿qué se debe hacer? (se quiere aquí otra vez un mensaje CORTO)

Figura 11. Las primeras cinco preguntas (etapa con lápiz y papel)

Las preguntas que venían después eran del mismo estilo, pero para el caso de Quebec utilizando Excel en computadora y un applet (POLY). El applet exclusivamente proporcionaba la representación figural y numérica. Con esto, los alumnos estaban en posibilidades de conjeturar y verificar con POLY si sus conjeturas podrían ser correctas. En el caso de México, los alumnos aprendieron a crear tableros de datos en calculadora y también utilizaron el applet POLY (Cortés *et al.,* 2016).

En la primera etapa de ACODESA hubo alumnos que realizaron errores en los dibujos al calcular el número triangular 5 (T_5), en el caso de Quebec; y T_{25} en el caso de México, donde el error en este caso es el de llegar a 25 bolitas y no a T_{25} (figura 12).

Las estrategias de cálculo son muy diferentes en ambos países (figuras 12 y 13), creemos que se debe a que los alumnos de Quebec iniciaban la escuela secundaria sin conocimientos de álgebra; en cambio, los alumnos de México contaban con un curso introductorio de álgebra.

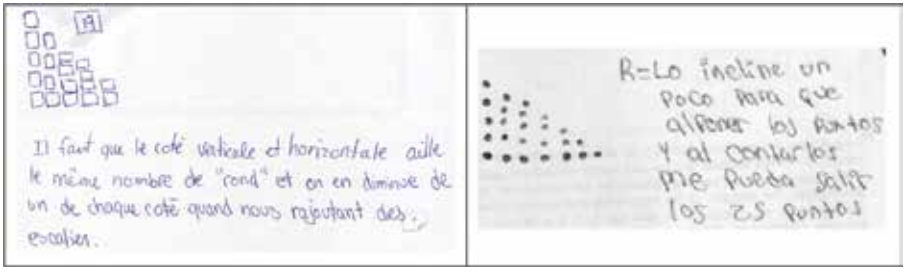


Figura 12. Errores en cálculos en el trabajo individual T_5 (Quebec) y T_{25} (México)

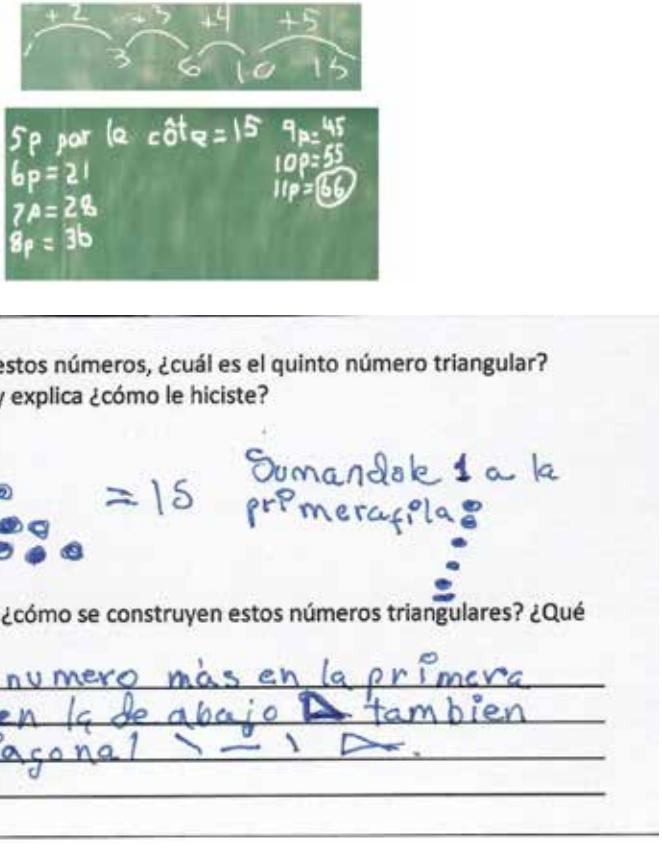


Figura 13. Estrategias de cálculo en Quebec (T_{11}) y México (T_5)

En las estrategias de cálculo podemos ver que en los alumnos de Quebec hay una tendencia a utilizar una iteración que representa T_{11}, a través de un acercamiento numérico. En cambio, los alumnos de México utilizan un acercamiento geométrico.

En la etapa de trabajo en equipo y en gran grupo en Quebec, y utilizando Excel y el applet (figura 14), los alumnos a través de un proceso numérico, y generalizando, llegaron exactamente en el momento que sonó la chicharra a un resultado algebraico en el pizarrón (Hitt *et al.,* 2017).

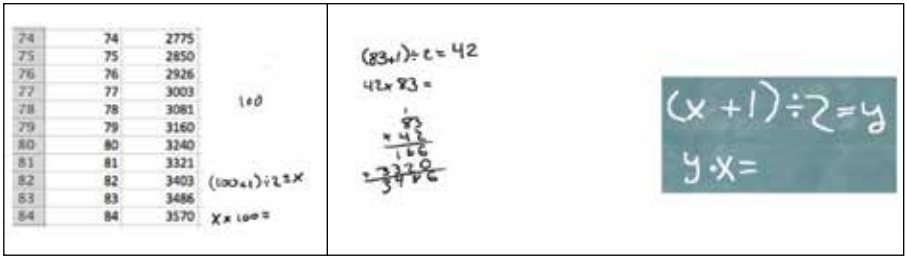
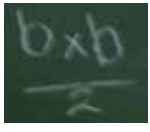


Figura 14. Generalización aritmético-algebraica, considerando el caso T_{83}, con Excel y proceso numérico, conjeturando y verificando con POLY

En la etapa de trabajo en equipo y en gran grupo en México, y utilización de calculadora y el applet (figura 15), los alumnos llegaron a conjeturar b*b/2 y al percibir una contradicción, reajustaron la expresión desde un punto de vista geométrico (para añadir la mitad de lo que mide la base del triángulo).



Mónica: Es que sacaremos lo que es el área del triángulo que sería 8 por 8 que son 64 y lo dividimos entre 2 es 32 ...

Se oye una voz muy baja de una niña que dice "pero no, ¿qué no sería 36?"

Gaby: La mitad de 8 es 4 y 4 son los números que le falta a 32 para ser 36 entonces en la fórmula tenemos que poner base por altura entre dos más ...

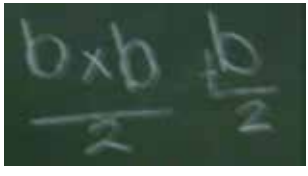


Figura 15. Generalización geométrico-algebraica y corrección en un medio de papel, lápiz y calculadora

Etapa de autorreflexión en Quebec

En la etapa de autorreflexión en Quebec, *todos* los alumnos olvidaron su representación algebraica discutida en gran grupo (figura 13), pero no su estrategia, algunos fueron

capaces de llegar a otra expresión diferente (figura 15, izquierda). A un alumno considerado avanzado, se le propuso un desafío para calcular los números triangulares seguido de los pentagonales. Este alumno había escrito la expresión algebraica en el pizarrón (figura 14). Él escribió en el cuestionario que no necesitaba calcular la fórmula para los triangulares *porque la recordaba de memoria* (erróneamente), pero aplicando su estrategia a los pentagonales logró construir una expresión con palabras para el cálculo de cualquier número pentagonal (figura 16, derecha).

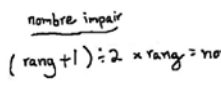
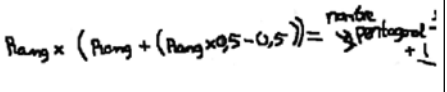
Número triangular	Número pentagonal
	
(posición + 1) ÷ 2 × posición = número triangular	posición × (posición + (posición × 0.5) − 0.5) = número pentagonal

Figura 16. Proceso de generalización 45 días después (etapa de autorreflexión)

Entre los alumnos que se presentaron a la fase de autorreflexión (ocho en total), hubo dos que regresaron a dibujar bolitas, y seis en los que hubo un progreso de dejar de lado las bolitas y utilizar una estrategia iterativa (T_n = posición + T_{n-1}) o sin iteración, como las arriba mostradas (figura 15, izquierda).

Etapa de autorreflexión en México

En la etapa de autorreflexión en México (diez en total), dos regresaron al dibujo de bolitas sin proponer una expresión, cuatro recordaron la primera parte de la fórmula b*b/2 (fórmula para el área de un triángulo isósceles), uno se equivocó en la expresión algebraica, pero fue más allá que los anteriores, y solamente tres alumnos lograron reconstruir la expresión algebraica encontrada.

En la fase de institucionalización, los profesores en los dos casos retomaron lo realizado por los alumnos y proporcionaron las representaciones oficiales.

6. CONCLUSIONES

En relación con el acercamiento presentado en mi artículo de 1998, podemos decir que la complejidad del problema del rol de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas escapaba en ese entonces de mis manos. Si bien las representaciones no-institucionales estaban presentes, mi reflexión sobre ellas era que estaban incompletas o erróneas. Además, al utilizar el marco teórico de Duval, al no pertenecer a un registro de los considerados por este autor, no se les podía proporcionar la importancia que deberían tener. Fue hasta que realizamos experimentaciones en ambientes de tra-

bajo en colaboración, que las representaciones funcionales-espontáneas empezaron a adquirir mayor fuerza y me empujaron a buscar marcos teóricos que las albergaran. La ruptura era necesaria para avanzar en esa dirección.

Ese paso me permitió tener mayor claridad de cuándo utilizar un marco teórico local como el de Duval en un acercamiento constructivista, y cuándo utilizar un marco teórico local de la actividad en una perspectiva sociocultural.

Por otra parte, el hecho de que en Quebec se siga un currículum basado en competencias nos permitió corroborar la importancia de ACODESA bajo ese acercamiento. El método ACODESA promueve la evolución de las representaciones funcionales-espontáneas hacia las representaciones grupales, precisamente en un acercamiento social del aprendizaje de las matemáticas. Además, la fase de autorreflexión y posteriormente la fase de institucionalización permite que el estudiante desarrolle un saber. Otro punto sumamente importante, que no tienen muchos acercamientos de trabajo en colaboración, es el equilibrio que proporciona el método ACODESA, tanto en el trabajo individual como en el trabajo en equipo.

Nuestra proposición de seguir una enseñanza inmersa en una teoría del aprendizaje sociocultural –la teoría de la actividad– nos ha llevado a refinar el método de enseñanza ACODESA, e integrarlo al modelo de Engeström que permite la combinación de artefactos y procesos de objetivación en una micro sociedad (CSS, en el sentido de Radford, 2003). Para poder contar con una teoría local, hemos definido las nociones de representación funcional-espontánea y representación grupal, ello para dar importancia a las representaciones no institucionales y su evolución al interior de un CSS hacia las representaciones institucionales.

Nuestra proposición, considerando que la resolución de situaciones-problema está directamente inmersa en los procesos de modelación matemática, consiste en presentar a los alumnos situaciones eslabonadas que hemos bautizado como *situaciones de investigación*. Las actividades eslabonadas conformadas por preguntas en varias páginas (no solamente un enunciado), proponen trabajo en papel y lápiz y uso de tecnología. Nuestra intención es que esas *situaciones de investigación* para el aula no solamente sirvan a los investigadores para realizar un estudio, sino que también sean situaciones prácticas que proponemos para que el profesor pueda usar directamente en el aula de matemáticas.

En nuestra búsqueda de las producciones de los sociólogos con respecto a las representaciones sociales, hemos encontrado el trabajo de Bourdieu (1980), quien ha concebido la noción de *habitus* como:

> El condicionamiento asociado a una clase particular de condiciones de vida produce *habitus*, sistemas de disposiciones duraderos y transponibles, estructuras estructuradas predispuestas a funcionar como estructuras estructurantes, es decir, como principios generativos y organizadores de prácticas y de representaciones que pueden ser objetivamente adaptadas a su propósito. (pp. 88-89)

Esta construcción de *habitus* como el desarrollo de estructuras estructurantes en el ataque de situaciones de investigación y de problemas la hemos tenido en cuenta en las experimentaciones sobre la covariación entre variables (Hitt y Morasse, 2009; Hitt y González-Martín, 2015), donde los alumnos en esas experimentaciones lograron construir un *habitus* en el sentido de Bourdieu.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial al proyecto México-Quebec, que nos permite contar con apoyos para la realización de investigaciones conjuntas entre los colegas de México y Quebec.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques. En D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (pp. 277-349). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Bloom, B. y Krathwohl, D. (1956). *The classification of educational goals, by a committee of college and university examiners*. New York, USA: Longmans.

Borbón, A. (2003). *Concepciones de profesores sobre varios conceptos del cálculo diferencial* (tesis de maestría, inédita). México: Cinvestav-IPN.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, France: Éditions de Minuit.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. 1970-1990.* [Ed. y trad: N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield] Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cortés C., Hitt, F. y Saboya, M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP), 30*(54), 240-264.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. y Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior, 10*, 117-160.

Durkheim, É. (1898). Representations individuelles et représentations collectives. *Revue de Métaphysique et de Morale, VI* (Mai, 1898), 1-22.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchâtel, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-336). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter y Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). Washington, USA: MAA Series, 19.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. En Y. Engeström, R. Miettinen y R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). New York, USA: Cambridge University Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company. Kluwer Academic Publishers Group.

Geogebra (software libre: http://www.geogebra.org/cms/).

Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage Éditions.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Hauchart, C. y Rouche, N. (1987). *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. Louvain-la-Neuve, Belgique: GEM, CIACO Éditeur.

Hitt, F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25*(3), 447-455.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática, 7*(1), 63-75.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática, 10*(2), 23-45.

Hitt, F. (2002b). Construction of mathematical concepts and internal cognitive frames. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 241-262). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter y Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8*, 255-271.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron,

D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris, France: Hermès.

Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(6), p. 723-735.

Hitt, F. (Ed.). (2002a). *Representations and Mathematics Visualization*. México: International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter y Cinvestav-IPN.

Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 201-219.

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes**.** Proceedings CIEAEM 61. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica, 2*, 208-216. Recuperado de: http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación, 73*, 153-177.

Hitt, F. y Quiroz, S. (en proceso). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel.

Hitt, F., Saboya, M. y Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetic-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 97-116.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London, England: Lawrence Erlbaum Associates.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago, USA: The University of Chicago Press.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 127-135). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Wokingham, England: Addison Wesley.

Murray, F. A. (1998). La compréhension des principes de base de l'apprentissage coopératif favorise un meilleur enseignement. En J. S. Thousand, R. A. Villa y A. I. Nevin, *La créativité et l'apprentissage coopératif* (pp. 43-62). Montréal, Canada: Les Éditions Logiques.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de*

aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión (tesis de doctorado, inédita). México: Cinvestav-IPN.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17,* 297-311.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains.* Armand Colin. HAL: hal-01017462.

Radford, L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa, Canada: Legas Publishing.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York, USA: Academic Press.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics.* Stroud, United Kingdom: Penguin Books.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. En F. Hitt (Ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). México: Psychology of Mathematics Education North American Chapter y Cinvestav-IPN.

Vigostky, L. (1962). *Thought and Language.* Cambridge, Massachusetts, USA: MIT Press.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language.* [Trad: L. Matejka y I. R. Titunik]. Cambridge, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. 19.* Washington, USA: MAA Series.

De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental

Luis Moreno-Armella
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen: Este capítulo trata de dos transformaciones, una en el ámbito del conocimiento matemático y la otra en la didáctica de las matemáticas. Hace pocos años el trabajo pionero de Mandelbrot trajo de vuelta al escenario matemático una idea que había quedado dormida: la idea de la irregularidad en la comprensión matemática del mundo material, a saber, la geometría fractal. Era una forma de mirar microscópicamente los objetos naturales. Existían antecedentes conceptuales en el análisis matemático, pero nada de esto había germinado porque no existía un medio representacional adecuado. La tecnología digital de hoy suministra ese medio y añade una dimensión experimental al aprendizaje. Entre la aritmetización de las matemáticas y las representaciones dinámicas de hoy, se alzó la voz de F. Klein advirtiendo de la pérdida para la didáctica que constituía el abandono de las *matemáticas intuitivas*. Hoy, el desarrollo de la investigación sobre la cognición matemática ha puesto la visión de Klein sobre el aprendizaje en su justo lugar. La capacidad expresiva aumentada por la mediación digital plantea nuevos desafíos para la apropiación experimental del conocimiento.

1. INTRODUCCIÓN

Los años 80 del siglo pasado atestiguaron la publicación de dos libros que traían noticias de territorios matemáticos recientemente conquistados. Uno de ellos, *The Beauty of Fractals* (Peitgen y Richter, 1986), ofrecía un espectáculo visual inusitado mediante imágenes fractales bellamente editadas. El segundo, *Chaos: Making of a New Science* (Gleick, 1987), nos acercaba a una narrativa fascinante sobre los sistemas iterativos, fenómenos con sensibilidad exagerada con respecto a sus condiciones iniciales, como en el caso del clima visto como sistema dinámico. Una pequeña variación de la presión atmosférica puede ocasionar cambios drásticos en la evolución futura del sistema. Se decía que el batir de las alas de una mariposa en Australia podía desencadenar un huracán en el Caribe. Los fractales habían llegado para imponer una nueva visión geométrica, una que traía entre sus manos una descripción de la naturaleza infinitamente más elaborada y precisa que la vetusta geometría euclidiana. Los temas tratados en estos libros impactaron la percepción social de las ciencias, sobre todo en el caso de las matemáticas.

El efecto de ese impacto se tradujo en una inquietud que apuntaba a un nuevo

currículo matemático "más acorde con los tiempos". Entonces, durante 1992 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) norteamericano, en colaboración con la editorial Springer-Verlag, dio a conocer una obra en dos volúmenes, *Fractals for the Classroom,* que aspiraba a definir la nueva ruta. A estos esfuerzos se adhería una comunidad que sumaba los beneficios de la programación en *Logo* a la relativa facilidad con la que se podían escribir programas iterativos que resultaban en atractivas imágenes fractales. En medio de esa atmósfera escribí "La geometría del desorden y un nuevo desarrollo curricular", publicado en *Educación Matemática* a finales de 1994. Allí vertí parte de la reflexión desarrollada en investigaciones y cursos impartidos en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Sin embargo, con el paso del tiempo ha sido tangible que el estudio de los fractales, si bien es de una importancia matemática considerable, no parece haber generado la suficiente resonancia didáctica como para inducir trayectorias de aprendizaje radicalmente distintas a las más tradicionales. Tal vez haya sido porque el tema, eminentemente geométrico, requiere de una cultura y una infraestructura digitales que no se encontraban instaladas en las escuelas. Su divulgación, empero, ha sido amplia básicamente por lo atractivo de las imágenes producidas por los procesos iterativos asociados, suministrando ejemplos para diseños curriculares ya más establecidos. Además, se han puesto al descubierto vínculos estrechos con temas que durante largo tiempo generaron polémicas candentes. Me refiero a las funciones continuas sin derivadas, que aparecieron en el escenario del programa de aritmetización de las matemáticas. Estas funciones despertaron inquietudes ostensibles con respecto a la epistemología de las matemáticas.

La tecnología digital –que hizo posible la visualización de los fractales y la implementación práctica de los sistemas iterativos– ha seguido ahora un derrotero más incluyente en el ámbito educativo, vinculada con la necesidad de una reflexión detenida sobre la *cognición matemática* y el papel central de la *mediación instrumental* durante procesos de apropiación del conocimiento. Esa necesidad ya estaba presente cuando se publicaron los libros antes citados, pero su pertinencia ha ido en aumento en las últimas décadas, estimulando el rediseño digital de rutas de aprendizaje más tradicionales.

2. DESARROLLO Y UBICACIÓN DE UNA IDEA

Los tres libros ya mencionados siguieron la estela del trabajo de B. Mandelbrot, quien había publicado en 1983 su libro *The Fractal Geometry of Nature,* donde sugiere que su geometría es más adecuada para describir las formas naturales que la geometría euclidiana, que lo hace básicamente mediante rectas, triángulos y circunferencias. Sin embargo, hay que enfatizar que la geometría no es un territorio sino *un mapa* de un territorio, a saber, aquel constituido por el espacio físico de la experiencia humana directa.

El mapa que corresponde a la geometría fractal revela lo *irregular,* lo (infinitamente) *fracturado,* lo que podría percibirse mediante una mirada microscópica que captara

los interminables detalles ocultos al ojo humano desnudo. Esa mirada microscópica es posible a través de un medio digital. En lugar de una línea o segmento de recta, la línea fractal, aunque sea continua, tiene "picos" en todas partes. Al observar el fenómeno de difusión que se produce cuando dejamos caer una gota de tinta en agua, si pudiésemos aislar y seguir la trayectoria de una sola molécula de la tinta veríamos que esa molécula sigue una trayectoria fractal. El modelo matemático de este comportamiento (el mapa del territorio) sería una curva continua llena de picos, esto es, una función continua... sin derivada.

Una situación como esta, pero en el seno de las matemáticas puras, fue descrita analíticamente el 18 de julio de 1872 en la Academia de Berlín. Allí, Weierstrass presentó un ejemplo de una función continua que no tenía derivada en punto alguno. Eso implicaba que *no se podía graficar* a pesar de ser continua, lo cual se oponía frontalmente a la idea de continuidad que se aceptaba hasta ese momento: una función continua es aquella cuya gráfica puede trazarse sin levantar la mano del papel (o del pizarrón). El impacto matemático del ejemplo de Weierstrass fue profundo: se hablaba de una función *continua* pero no se le conocía forma definida. Las matemáticas se adentraban en un territorio donde el poder de la representación analítica producía un objeto *invisible* para el ojo humano, pero del que podía asegurarse que era continuo, gracias a su tratamiento a través de una redescripción simbólica. Había, aparte del *ojo geométrico*, un ojo analítico.

Hasta entonces, las matemáticas habían encontrado un soporte seguro tanto en la geometría euclidiana como en el cálculo desarrollado alrededor de una idea de continuidad que correspondía a las intuiciones del espacio y a nuestro enfoque cognitivo sensorio-motor. Parecía que ahora las matemáticas tomaban otro rumbo: una continuidad aritmética, conjuntos infinitos de diferentes tamaños, funciones continuas que no se podían graficar... Las matemáticas parecían separarse del mundo material con el que habían dialogado por siglos. Era como una declaración de independencia: la esencia de las matemáticas reside en su libertad, proclamaba Cantor; se podía ir en la creación matemática más allá de los límites impuestos por la naturaleza. Hoy, sin embargo, sabemos que esas funciones continuas sin derivadas no están tan alejadas de la naturaleza. La línea recta euclidiana y la línea fractal: la trayectoria que sigue un rayo cuando ilumina la noche, son ambas *modelos* de la geometría de la naturaleza.

El mundo humano es material, orgánico y cultural. Nuestras intuiciones son ideas que andan sueltas, que no están plenamente en el mundo simbólico ni tampoco en ese mundo que presentimos, que, en última instancia, intuimos. Son fragmentos de conocimiento que no encuentran su lugar en una red conceptual que ya poseemos. En un artículo célebre del matemático J. Pierpont (1899), al referirse al análisis matemático que produjo ejemplos como el de Weierstrass, expresaba:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: *la total separación del mundo de los sentidos.* (p. 406)

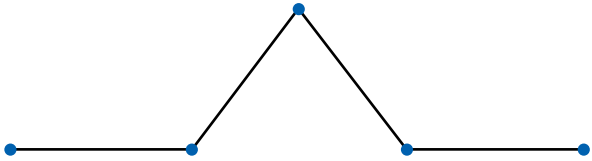
Ambos extremos, la forma global, o sea la percepción *holística,* y la percepción de los detalles más finos que componen un objeto, es decir, la visión *analítica,* conforman parte sustancial de los recursos cognitivos de los seres humanos. Nuestra experiencia holística no se restringe a las impresiones provenientes del mundo material desnudo, pues vivimos en un espacio casi completamente transformado por la acción humana y, por ello, nuestras experiencias siempre llevan la marca del mundo sociocultural en el que existimos. El distinguido neurocientífico Merlin Donald, al reflexionar sobre la naturaleza *híbrida* (holística y analítica) de nuestra cognición en su trabajo sobre la evolución cognitiva, describe el nivel más básico de nuestra intuición como una forma receptiva de conocer, y la contrasta con la capacidad de simbolización que nos permite elaborar una versión propia y abstracta del conocimiento más controlable y precisa (Donald, 2001, p. 155). De su propia invención sí, pero íntimamente vinculada con ese mundo de intuiciones que adquirimos en el mundo, tanto material como social y cultural, de nuestra experiencia.

Uno de los atractivos centrales de los objetos fractales proviene sin duda de sus retratos digitales. Resultantes de un proceso iterativo complejo, podemos observar aproximaciones muy finas al objeto final, pero no el objeto final mismo. Vamos a ilustrar esto con un ejemplo creado por el matemático Helge von Koch. Cuando en 1904 Von Koch dio a conocer su ejemplo, hizo explícito que éste proviene directamente de un proceso iterativo cuya descripción geométrica es muy simple.

La versión del proceso iterativo que va dibujando las etapas sucesivas de construcción de la curva de Von Koch es la siguiente, escrita en lenguaje *Logo:*

```
To Koch :L :N
If :n=0 [Fd :L STOP]
Koch :L/3 :N-1
LT 60
Koch :L/3 :N-1
RT 120
Koch :L/3 ;N-1
LT 60
Koch :L/3 :N-1
END
```

Se trata de ir produciendo copias cada vez más pequeñas de la "semilla" del fractal, que es una figura como esta:



En cada segmento copiamos la figura completa en escala (L/3, si L es la longitud de los segmentos rectos del paso anterior), y así continuamos iterativamente. La figura siguiente ilustra una buena *aproximación* a la curva fractal ideal, constituida por la curva de Von Koch:

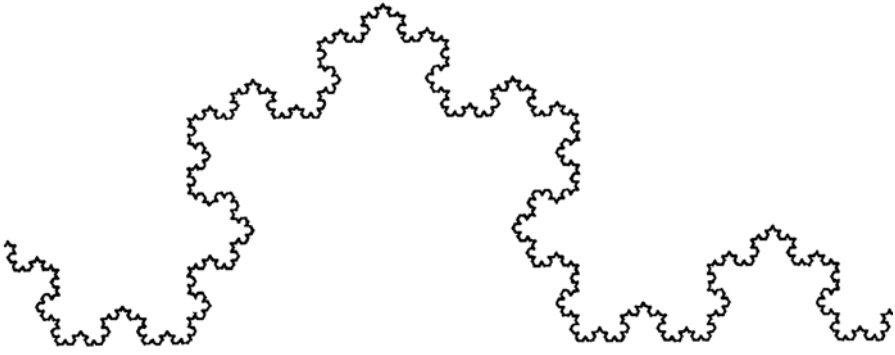


Figura 1. Curva de Von Koch

Es una curva continua, pero en ningún punto tiene una recta tangente (es decir, carece de derivada). Dicho informalmente, en cada punto de la curva hay un pico. Cuando presentamos este ejemplo en una conferencia, un estudiante reaccionó diciendo que, si en cada punto tenía un pico, entonces esos picos debían producirse por el encuentro entre dos segmentos y que por lo tanto la curva, al tener "pedacitos rectos" que formaban los picos, tenía rectas tangentes que contenían esos pedacitos de rectas. Es un razonamiento interesante que muestra cómo podemos *entregarnos* (cognitivamente) a nuestra intuición, olvidando que la curva de Von Koch, la genuina, es un objeto ideal, y que lo que podemos graficar es tan solo una buena aproximación que va *insinuando* el estado final, pero que no lo alcanza. La aproximación se elabora con segmentos de recta muy pequeños, pero segmentos al fin y al cabo. La curva de Von Koch es invisible. Es el límite de toda esa sucesión de aproximaciones.

Aquí tenemos una situación que resulta crucial en el aprendizaje de las matemáticas, a saber, el entendimiento de la dualidad proceso/objeto. Podemos describir simbólica o analíticamente el proceso, pero el objeto final cuya existencia podemos garantizar, sin embargo, solo lo podemos *imaginar,* puesto que para llegar a la curva límite, el verdadero fractal, la ejecución del proceso necesitaría un tiempo infinito: el estudio del infinito actual está *fuera del tiempo*.

Los seres humanos podemos *imaginar* el resultado (i.e. el objeto *final*) de un proceso potencialmente infinito. La situación que hemos ilustrado aquí es la que se presenta cuando abordamos los ejemplos básicos de límites. Por ejemplo, si consideramos la sucesión de números racionales

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$$

es fácil llegar a la conclusión que el límite de esta sucesión es 0, aunque ninguno de los términos sea cero, aunque, eventualmente, se tornen muy pequeños. Análogamente, las curvas que aproximan a la curva de Von Koch son cada vez más parecidas al resultado final, es decir, a la "curva" que ya no se puede graficar, pero sí describir como el límite de esa sucesión interminable de aproximaciones. Esta situación muestra que los fractales (lo que vemos sobre el papel o la pantalla, siempre son aproximaciones a los *verdaderos* fractales) son objetos representables mediante los procesos iterativos que los tienen por límite.

De nuevo una analogía: la sucesión 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... tiene por límite el número irracional $\sqrt{2}$, aunque cada término de la sucesión sea racional. El límite tiene una naturaleza distinta a cada uno de los términos de la sucesión. Considerar la sucesión como una *sucesión de aproximaciones* es una versión *corporizada* que depende de la noción más elemental de aproximación. Lo simbolizamos así: $a_n \rightarrow L$, lo que deja claro cómo la notación refleja la idea sensorio-motora que tenemos en mente.

3. EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y SU ENSEÑANZA

Las matemáticas revelan los mecanismos cognitivos de los seres humanos. Tenemos una mente *híbrida* que percibe holísticamente su entorno y además puede re-describirlo, con mayor o menor fortuna, simbólicamente. Después de la *crisis de los inconmensurables* en el seno de la escuela pitagórica, los griegos concluyeron que las magnitudes geométricas eran más abundantes que los números y por lo tanto los fundamentos de las matemáticas debían ser geométricos. Esta elección permaneció inalterable hasta el siglo XIX. Lo que siguió fue descrito por Dedekind en 1874, en la primera página de su obra *Essays on the Theory of Numbers*:

> Siendo profesor en el Politécnico de Zurich me encontré obligado a dictar un curso sobre los elementos del cálculo diferencial y más que nunca, sentí la carencia de un fundamento realmente científico para la aritmética. Al discutir la noción de aproximación de una magnitud variable a un límite fijo y especialmente al probar el teorema que afirma que toda magnitud que crece continuamente pero permanece acotada debe alcanzar un valor límite, tenía que apoyarme en evidencias geométricas [...] nadie puede negar que esta no es una forma científica de introducir el cálculo diferencial. Para mí, este sentimiento de insatisfacción era tan aplastante que resolví meditar sobre esta cuestión hasta que pudiese hallar un *fundamento riguroso y puramente aritmético* [...] El 24 de noviembre de 1858 lo conseguí. *[Énfasis propio]*

Dedekind representa el movimiento de aritmetización de las matemáticas que se desencadenó durante la segunda parte del siglo XIX. Fue una reacción frontal al acercamiento geométrico e intuitivo que tuvo implicaciones serias para la enseñanza.

Tal vez el primero que vio esta implicación de manera profunda fue Félix Klein. Su obra *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint* alcanzó hasta una cuarta edición en 1934; tuvo su origen en las conferencias que impartió Klein en Gotinga a futuros profesores de matemáticas, de 1902 a 1908. El interés de Klein era diseñar un modelo de enseñanza a partir de una *reflexión sobre el conocimiento que los profesores ya tenían,* para profundizarlo. De alguna manera pretendía consolidar la fusión entre un acercamiento intuitivo y su consiguiente simbolización. Era, en realidad, un proceso de hibridación (ahora a nivel del conocimiento del profesor).

Una idea intuitiva necesita de un *ambiente* donde se la pueda explorar y ese lo suministra el campo operatorio que logremos asociar con la idea inicial. Tenemos una idea de recta tangente que podemos imaginar desplazándose suavemente sobre una curva, gracias a nuestra cognición sensorio-motora. Pero es menester trasladar esta noción a los algoritmos simbólicos de la derivada para que podamos hacerla fructífera. Ahora la noción puede ser explorada dentro del campo operatorio, y aunque en principio el traslado al terreno simbólico haya dejado algo de la idea en el camino, la operatividad ganada compensará esa pérdida original y refinará la idea inicial. De modo que intuición y simbolización son como las dos caras de una misma moneda que en realidad solo tiene una cara, una *moneda de Möbius*.

El trabajo de Klein puede verse como un ejemplo de lo que actualmente se denomina Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés). Klein explicita la tensión entre los polos inductivo y deductivo como fundamentales en el desarrollo de las ideas matemáticas.

> El trabajo inductivo de quien enuncia por primera vez un teorema es tan valioso como el trabajo deductivo de quien lo demuestra [...] es precisamente en el descubrimiento y desarrollo del cálculo infinitesimal que el método inductivo jugó tan grande papel, sin las obligaciones lógicas. Y la mayor ayuda heurística la constituyó

> *la intuición sensorial*. Con esto quiero decir la intuición sensorial inmediata, con todo lo que tenga de imprecisa [...] y no la *intuición en abstracto* que postula el paso al límite. (Klein, 2016, p. 226) *[Énfasis propio]*

Entonces, aplica esta manera de pensar a la explicación (siempre dirigiéndose a los profesores) de la integral como área bajo la curva. Lo que nos dice nuestra intuición, añade, es que el área es la suma de las áreas de los rectángulos aproximadores:

Figura 2. Aproximación al área bajo la curva

Este método intuitivo caracteriza el período temprano del desarrollo del cálculo. Si la figura anterior estuviese elaborada mediante un programa de geometría dinámica, entonces podríamos aumentar el número de rectángulos *de inmediato* para obtener todavía una mejor aproximación al área bajo la curva:

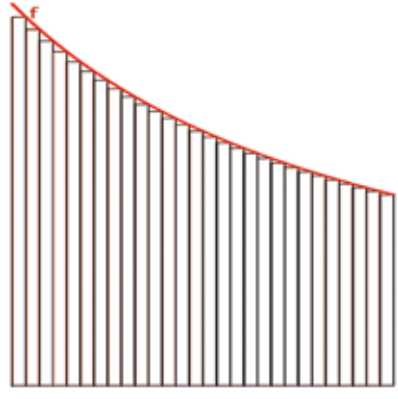


Figura 3. Mejor aproximación al área bajo la curva

La percepción visual y dinámica *en tiempo real* permite apreciar cómo, al aumentar los rectángulos, irán *cubriendo más y más* el área bajo la curva. Estamos ante la noción *incorporada* de la integral ya dotada de su aparato operatorio. Este es un proceso profundamente intuitivo-inductivo. Como en los casos de sucesiones de aproximaciones y procesos iterativos que generan fractales en el límite, el proceso tiene como punto de llegada el área bajo la curva. De hecho, podemos *definir* el área bajo la curva como el límite de este proceso, que *formaliza* el acercamiento intuitivo y sensorio-motor previo.

En el caso presente, las posibilidades de visualización a través de los medios digitales permiten profundizar el acercamiento inductivo. Nada de esto puede eludir o trivializar los problemas cognitivos y de aprendizaje, tal como estos se presentan en las instituciones educativas, puesto que *las respuestas no están en el interior de las matemáticas mismas*. En este reconocimiento fue pionero Félix Klein.

En una conferencia pronunciada en Chicago, Klein ya enfatizaba el papel crucial de la intuición para el pensamiento matemático, pero añadía:

> Tal vez algún día la fisiología y la *psicología experimental* nos permitirán extraer conclusiones más precisas sobre las relaciones entre la intuición y los procesos lógicos [...] los psicólogos modernos distinguen entre las capacidades visuales, motoras y auditivas; la intuición tiene que ver más estrechamente con lo visual y lo motor [...] con gusto extiendo la bienvenida a estas investigaciones que acaban de iniciar los psicólogos. (Klein, 1896, p. 247) *[Énfasis propio]*

Sus expectativas se han ido cumpliendo gradualmente. Nuestro cerebro tiene la capacidad de percibir la numerosidad de las cosas, así como percibimos sus formas y colores. Tenemos una intuición, un *sentido numérico* sobre el que se construyen los sistemas numéricos que conocemos. La hibridación intuición/símbolo nos permite distinguir entre 37 y 38 o saber que 13 es un número primo.

Dehaene afirma que, en lugar de introducir un nivel prematuro de abstracción, resulta más juicioso diseñar un progresivo *enriquecimiento de las intuiciones de los estudiantes*. La introducción de un nivel más formal debería justificarse a partir de la simplicidad y eficacia que suministra (Dehaene, 2011, pp. 224-228).

No hay que olvidar que nuestro primer nivel de intuición tenía más que ver con la eficacia en el mundo real que con la coherencia lógica. Los cimientos de una construcción matemática son intuitivos y se apoyan en nociones tales como número, espacio, variación y tiempo. Esas nociones tienen representaciones irreducibles en nuestro cerebro. Las matemáticas constituyen una progresiva formalización de estas intuiciones que están adaptadas al mundo externo. Klein no hubiese podido estar más complacido.

4. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EJECUTABLES

La escritura es un ejemplo extraordinario de sistema de representación. A partir de su nacimiento, la escritura se constituyó en una memoria externa que ya no tenía las limitaciones de la memoria biológica. También se constituyó en una especie de máquina del tiempo pues nos permite estar en contacto con el pensamiento de antepasados de hace siglos, y también con nuestro propio pensamiento, tornándose entonces en un espejo cognitivo: podemos dialogar con nosotros mismos a través de la escritura. No se limita, entonces, este sistema de representación a tener un medio para escribir lo que antes solo podíamos enunciar verbalmente.

La historia de los sistemas de representación es tan dilatada como la de las matemáticas mismas. En cada uno de ellos ha quedado impresa la lucha por delinear y expresar un concepto mediante una representación simbólica que permita además manipularlo dentro de un campo operatorio. En *A History of Mathematical Notations* (Cajori, 2013) se recoge una buena parte de los complejos caminos de la articulación simbólica de las matemáticas. Siempre hay una idea, un patrón que se reconoce en diversos ámbitos y que luego se intenta capturar a nivel simbólico. Y claro, la intención siguiente es poder *operarlo*. Esta es una manera muy sucinta de explicarlo, pero hay que decir que cuando se sigue la ruta de elaboración de un símbolo y de un sistema simbólico, llegamos a entender que estos son medios para ir perfilando una idea reconociéndola en distintos contextos y que es necesario identificar y darle identidad propia. En ello se apoya la primera fase de la abstracción, tan crucial en el pensamiento matemático en todos sus niveles.

Hasta hace poco tiempo, los sistemas de representación matemáticos han sido esencialmente estáticos, en el sentido que la actividad cognitiva que se despliega *mediante* el sistema depende de la inteligencia de quien se está sirviendo del sistema. Como en el caso de la escritura, los sistemas simbólicos de las matemáticas son instrumentos para pensar *con* y *a través* de ellos. Una vez que tenemos las *representaciones digitales*, se produce un cambio sustancial. En efecto, estas representaciones son *ejecutables* en el sentido del siguiente ejemplo: si tenemos en nuestras manos una calculadora CAS podemos darle una fórmula, por ejemplo: $y = \text{sen}(x)$. Fijamos a continuación una ventana de graficación y le pedimos a la calculadora que grafique la función. Lo que vemos en la pantalla es algo que *hace* el instrumento en cuestión: graficar la función –transformando un sistema de representación en otro. Hay, pues, una función cognitiva (o un equivalente) que la calculadora hace por nosotros. También podemos pedirle que dado un número natural encuentre sus factores primos. En un ambiente predigital, esas funciones cognitivas las hacemos directamente nosotros con la mediación del sistema decimal. Ahora las puede ejecutar el instrumento, mejor dicho, la sociedad cognitiva que conformamos con él. En ese momento entendemos la importancia que tienen los sistemas ejecutables: *se constituyen en nuestros socios cognitivos* y con ellos generamos una redistribución de las tareas cuando estamos, por ejemplo, en medio de la resolución de un problema.

El medio digital estimula el pensamiento inductivo, y con ello el desarrollo de actividades exploratorias. Por ejemplo, podemos empezar con la lista de los primeros cien números naturales y el medio digital nos puede ofrecer la descomposición en factores primos de cada uno de ellos. De acuerdo con el nivel escolar al que estemos presentando esta actividad, podemos modificar esta lista de números y, de igual manera, concluir *inductivamente* que cada entero tiene una descomposición única en factores primos. Con los profesores, nuestros alumnos, se plantea aquí la discusión sobre qué tan seguros podemos estar de que la evidencia inductiva que hemos alcanzado, *mediada* por el instrumento digital, es suficiente para concluir que siempre será válido suponer esta descomposición de un entero en factores primos.

Una y otra vez esta ha sido una situación que, al discutirla en el salón de clases, pone de manifiesto la complejidad de la demostración. *¿No reemplaza, acaso, la evidencia inductiva mediada por un instrumento digital a la demostración sobre el papel?* No hay una respuesta simplista. Pienso que, para la enseñanza de las matemáticas, incluso para la investigación en este campo, una demostración debería ser vista como un argumento que aumenta el grado de coherencia de un fragmento de conocimiento previo que posea un estudiante. Si bien las tecnologías digitales emergentes traen de vuelta la interacción sensorio-motriz a las actividades de exploración y aprendizaje de las matemáticas, las teorías educativas que podemos llamar *dominantes* no están orientadas de manera definida al análisis de la transición de la acción al concepto. Es menester explicar la convergencia entre el pensamiento corporizado y el pensamiento simbólico, y esa convergencia tiene lugar sobre la pantalla digital.

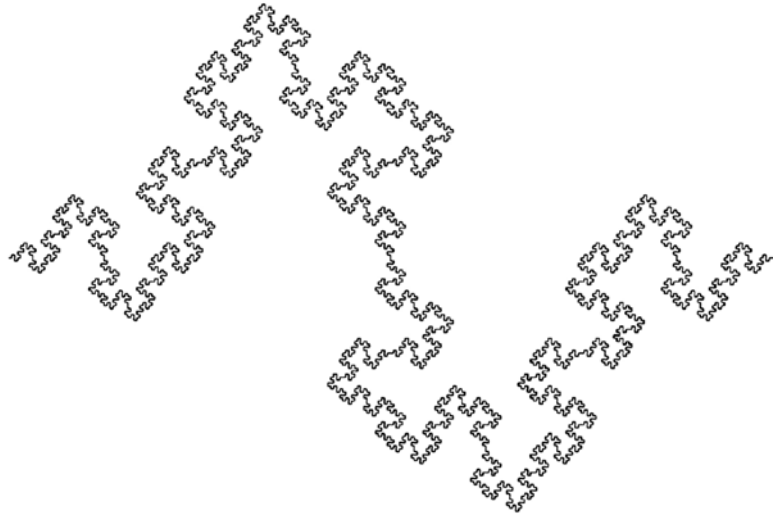


Figura 4. Imagen *digital* de un fractal

El trabajo sobre la dinámica iterativa compleja de las primeras décadas del siglo pasado sembró las semillas de lo que muchos años después serían los fractales. Los instrumentos digitales de cómputo y graficación hicieron germinar esas semillas en manos de Mandelbrot. El medio digital resultó fundamental para este capítulo de las *matemáticas experimentales*.

5. GEOMETRÍA EUCLIDIANA: GEOMETRÍA EXPERIMENTAL

Los medios digitales facilitan activar el *ojo geométrico* y la recuperación del razonamiento inductivo, *sensorio-motor,* a través de este ojo. La mediación digital estimula una articulación entre la inducción y la deducción, y esto va más allá del estudio de los fractales. Recordemos una analogía histórica que no podemos soslayar: Arquímedes ideó un método para *descubrir* teoremas que luego demostraba rigurosamente (Moreno-Armella y Sriraman, 2010). Explicaba que la demostración de los resultados era más accesible una vez que su método le había permitido *descubrirlos*.

En el caso de la geometría, usualmente se trabaja con representaciones analíticas y representaciones sintéticas. Las posibilidades digitales han enriquecido estas opciones y hoy día se cuenta con sistemas como el Geogebra y muchos otros que permiten una representación dinámica de los objetos geométricos incorporando, con las transformaciones posibles de los objetos, oportunidades de exploración y rediseño de estrategias de resolución de problemas.

Hemos elegido presentar a continuación una sistematización del trabajo realizado con profesores tanto en Colombia como en México. Los temas versarán sobre geometría euclidiana. Nuestro péndulo didáctico oscila ahora de los temas que corresponden a los fundamentos de las matemáticas –que consideramos cruciales para la reflexión del profesor– a temas de interés en su práctica cotidiana y de organización. Estos, como mencionamos previamente, forman parte de lo que se conoce como Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Sugerimos el trabajo de Nolan, Dempsey, Lovatt y O'Shea (2015).

En este terreno es viable, y así lo hemos hecho, *cambiar la base de conocimientos* para abordar problemas que usualmente se estudian mediante la geometría analítica, pero ahora lo haremos desde una perspectiva sintética (euclidiana).

Empezamos proponiendo el siguiente problema:

Dado un ángulo y un punto fijo P en el interior del ángulo, trazar el segmento que conecta los lados del ángulo de manera que el punto fijo sea el punto medio del segmento trazado.

El primer acercamiento que siguieron los profesores-estudiantes ha sido: se elige un punto R sobre la semirrecta BC y por ese punto se traza una semirrecta RP. El punto Q es el punto de intersección de la semirrecta RP con el lado BA del ángulo.

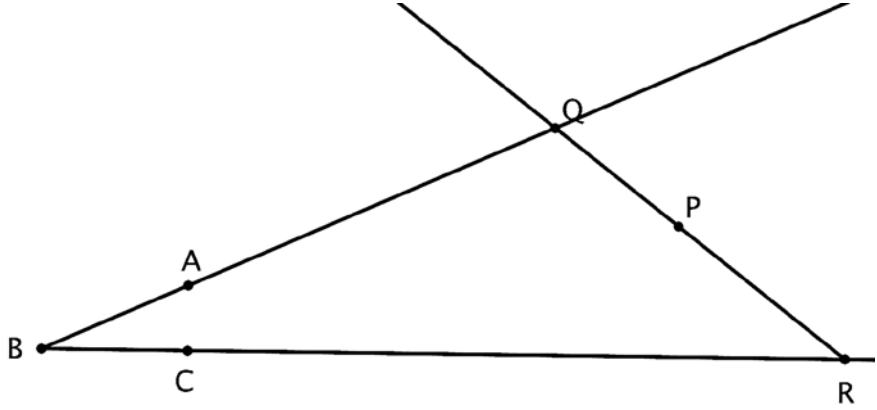


Figura 5. Un primer acercamiento al problema

Entonces, desplazando el punto R sobre BC, trataron de estimar visualmente una posición de Q de suerte que RP = PQ. Este acercamiento generó controversia en el salón de clases pues no era posible garantizar "al ojo" la igualdad de las longitudes de RP y PQ. El siguiente paso fue medirlas y, de nuevo, desplazar el punto R hasta que se hallara una posición de Q de suerte que RP fuese igual a PQ.

En este momento sugerimos a los asistentes que el acercamiento seguido, si bien arrojaba una *respuesta* al problema propuesto, en realidad estaba sujeto aún a controversia pues alguien podría argumentar que las longitudes coincidían hasta el segundo decimal (el medio digital estaba preparado para que así fuese) pero que no estaba uno seguro qué ocurriría con los decimales restantes.

Las discusiones se orientaron entonces a esclarecer en qué constituía una demostración, y se llegó a que debería ser un argumento suficientemente convincente para que aun los más escépticos quedaran satisfechos. Los asistentes con mayor preparación sostuvieron que, en todo caso, un argumento así dependería del nivel de conocimientos de los estudiantes a quienes se les presentara dicha evidencia. Es decir, se agregó una segunda característica a la noción de demostración: *una demostración es un argumento convincente de acuerdo al nivel de conocimientos que tenga el estudiante.*

Más adelante, se planteó que como la argumentación basada en la medición de las longitudes arrojaba dudas, ¿qué otro argumento podríamos producir?

A lo largo de la nueva sesión, un grupo llegó a la conclusión de que, en lugar de medir los segmentos RP y PQ, podría intentarse a partir de un círculo de radio RP fijo desplazar R sobre su semirrecta (BC) hasta que el círculo tocara al punto Q. En ese momento, RP sería igual a PQ (figura 6).

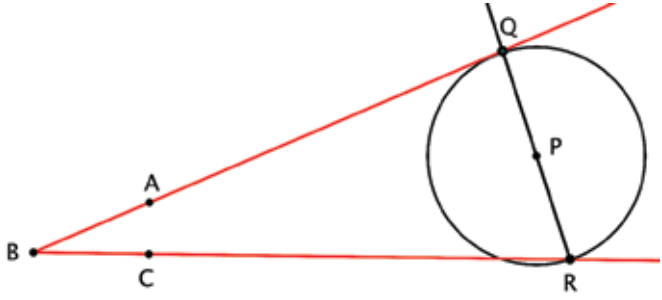


Figura 6. Mejorando la estrategia

La solución convenció a muchos más, pero todavía había varios escépticos. Se aprovechó entonces para formular algunos comentarios sobre el "argumento que convence". Hay argumentos que lo convencen a uno mismo, luego hay los que convencen a los amigos y los más sólidos son los que convencen a los "enemigos". Estábamos en la situación siguiente: se habían producido argumentos para convencer a los amigos, pero no a los "enemigos", los que aún permanecían escépticos. La solución siguiente fue un resultado colectivo con ayudas considerables de los orientadores de estas actividades. Se toma el punto simétrico de R sobre la semirrecta RP, *aunque no toque* a la semirrecta BA. Y luego, se desplaza el punto R y se observa que el punto simétrico R' traza una recta paralela a la semirrecta BC (figura 7).

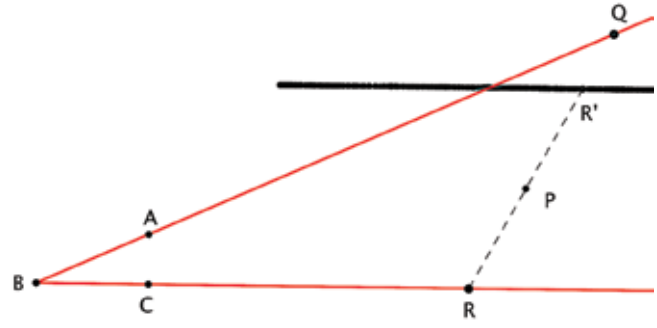


Figura 7. Una solución aceptable

Aunque no es visible en esta imagen, el punto Q seguía conectado con R mediante la semirrecta RP de modo que al desplazar R, R' trazaba la línea paralela a BC (gruesa en la figura 7); el punto Q se desplazaba sobre BA y justamente coincidía con R' cuando la paralela trazada por R' intersecaba a BA. Allí estaba la localización del punto que se buscaba, pues en todo momento RP era igual a PR' por construcción.

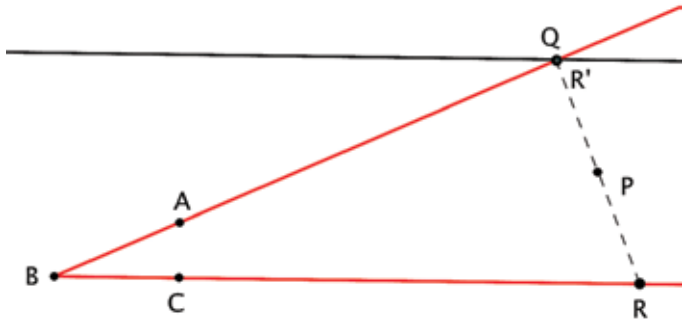


Figura 8. Q y R' coinciden

La conclusión de los profesores fue interesante: *ya no quedan "enemigos"*.

Hay varias lecciones que pueden extraerse de esta primera experiencia. Una de ellas es que las posibilidades de manipulación que ofrece el medio digital generan una sensación de materialidad de los objetos matemáticos que ya no son tan remotos para los estudiantes, y que por lo tanto estimulan el interés por su exploración. Explorar, encontrar una propiedad, explicarla, justificarla, es un camino más amplio cuando contamos con la mediación de un instrumento digital.

En otra sesión se introdujo el estudio de secciones cónicas desde una perspectiva euclidiana. Para ello se inició con una pregunta muy fácil de formular: dado un círculo con centro en O y una cuerda RQ. Determinar la trayectoria que sigue un punto P sobre RQ cuando R recorre el círculo original. Los asistentes activaron la traza del punto P y arrastraron el punto R sobre el círculo original. Veamos el resultado:

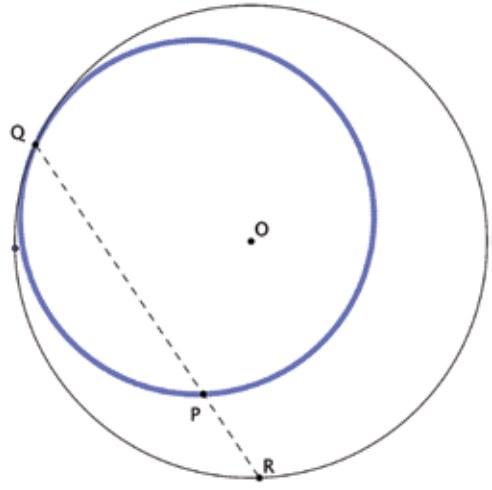


Figura 9. Visualizando la respuesta

La trayectoria que sigue P *parece* un círculo, pero ¿lo es? Al nivel visual (prueba para los "amigos") queda resuelto el problema. Sin embargo, subsisten preguntas que deberían ser parte de la solución. Por ejemplo, localizar el centro O' del nuevo círculo, y en efecto verificar que todos los puntos de la trayectoria equidistan de O'. Esta exigencia ya no resultó tan accesible a los asistentes. Enunciemos la solución:

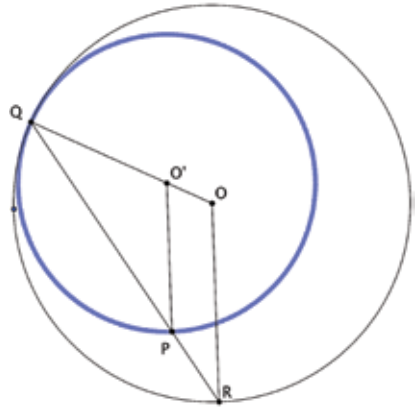


Figura 10. La solución vía Thales

Por el punto P se traza una paralela a OR y se señala el punto de intersección O' de esta paralela con OQ. El punto O' es el centro del nuevo círculo.

Para verificar que todos los puntos de la trayectoria equidistan de O' consideramos los triángulos OQR y O'QP.

Como O'P es paralela a OR estos triángulos son semejantes (teorema de Thales) y en consecuencia la razón O'P/O'Q siempre coincide con la razón OR/OQ. Esto prueba que la trayectoria que traza P es un círculo.

Lo novedoso para los participantes fue la utilización del teorema de Thales. Aquí se reflejó que los conocimientos que poseen, incluso los profesores, permanecen fragmentados. El problema sirvió para iniciar una toma de conciencia sobre la necesidad de *des-fragmentar* sus conocimientos de geometría. Esto podría ocurrir mediante los esfuerzos de resolución de problemas.

Propusimos entonces un problema similar en donde, en lugar de partir de un círculo, se partía de una elipse:

Dada una elipse de focos A y B. Se conecta un punto móvil R sobre la elipse con el foco A. Se toma un punto P sobre RA. Demostrar que la trayectoria que sigue P es una elipse.

De nuevo, el medio digital permite trazar la trayectoria de P y, en efecto, *parece una elipse:*

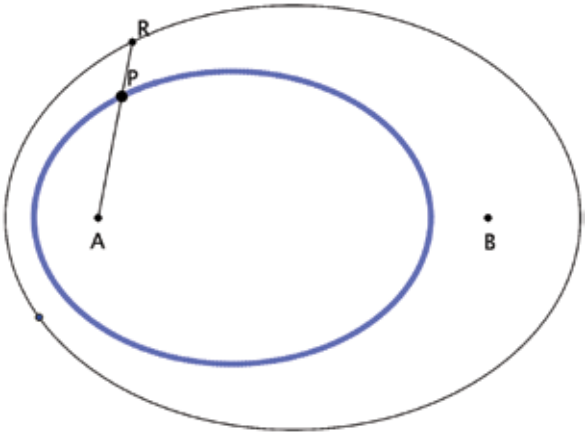


Figura 11. El nuevo problema

Como en el problema anterior, había que profundizar la línea argumentativa. Es de notar de inmediato que en un contexto de papel y lápiz no hay modo de formular, por parte de los estudiantes, esta respuesta ni siquiera a modo de conjetura. En cambio, la capacidad expresiva del medio digital provee de recursos para responder de inmediato, al nivel visual, aunque haya luego que elaborar los argumentos para los "enemigos". Vinculando este problema con el anterior (a partir de las sugerencias que se iban dando a lo largo del trabajo) se logra producir la siguiente figura:

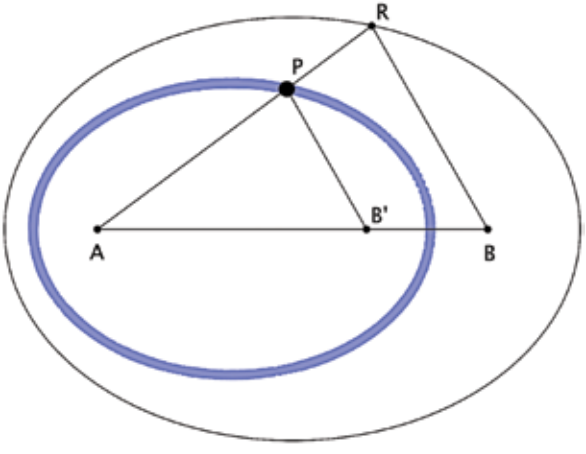


Figura 12. Teorema de Thales en acción

Es decir, por el punto P se traza una paralela al segmento RB y el punto de intersección B' es el candidato natural a segundo foco de la nueva elipse. El otro foco sigue siendo A. Como AR + RB es constante, entonces AP + PB' es constante y por lo tanto la curva trazada por P también es una elipse.

Por este sendero continúa el trabajo que se generaliza tanto para la elipse como para las demás secciones cónicas. El siguiente paso consistió en el estudio de las rectas tangentes a las cónicas, empezando con la elipse. Iremos directamente al cálculo de la tangente a una elipse. Sabemos que el ángulo de incidencia en P es igual al ángulo de reflexión, como ilustra la siguiente figura, y por lo tanto si trazamos la bisectriz del ángulo APB (P en el vértice del ángulo) esa bisectriz es perpendicular a la tangente. ¿Qué ocurre si *no* tenemos la tangente? Esa fue la pregunta durante la sesión: finalmente viene a la conciencia que se puede trazar la bisectriz del ángulo APB independientemente de la tangente y ésta debe ser la recta perpendicular a la bisectriz por el punto P.

Es un poco como la técnica griega del análisis y la síntesis, es decir, se supone resuelto el problema y uno va descifrando cómo se pudo llegar hasta allí. Es lo que se ha hecho ahora: en lugar de trazar la perpendicular a la tangente, que resulta ser la bisectriz de APB, trazamos la bisectriz y luego su perpendicular en P. Esa será la tangente.

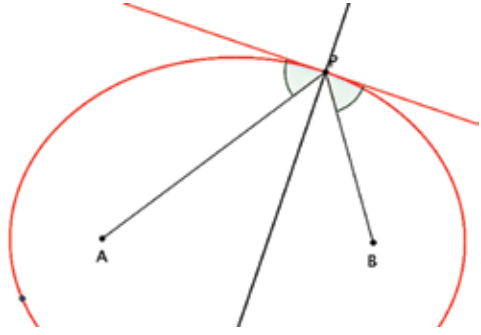


Figura 13. Tangente y bisectriz

Habíamos esperado pacientemente hasta este momento. Finalmente, una profesora pregunta: *¿cómo sabe Geogebra cómo trazar la elipse?* Entonces, a partir de este interés, orientamos una nueva exploración que iba a seguir el método del análisis y síntesis que ya había dado buenos resultados. Primero fuimos guiando el diseño de una nueva manera de trazar la tangente. Desde el foco A se traza una semirrecta por un punto P de la elipse. En el punto de intersección de dicha semirrecta con la elipse centramos un círculo cuyo radio es PB. Denominamos B' el punto de intersección (externo a la elipse) de dicho círculo con la semirrecta AP. Luego se considera la mediatriz del segmento BB' y esa resulta ser la tangente en P. Una vez dado este procedimiento como si fuera una receta de cocina, procedíamos a analizarlo con los asistentes. La pregunta central era, desde luego, *por qué esa mediatriz era la tangente en* P.

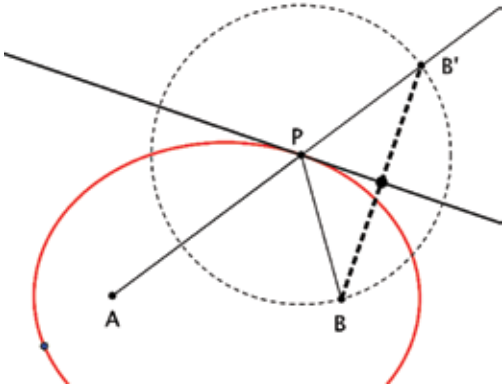


Figura 14. Estrategia de la mediatriz

Sugerimos en este momento *arrastrar* el punto P sobre la elipse y constatar que las nuevas mediatrices que se iban obteniendo seguían siendo tangentes a la elipse. La paciencia es una condición indispensable en estas sesiones: esperamos a que fuese claro que la construcción del punto B' es igual, no importa dónde se encuentre el punto P sobre la elipse. Eso *se ve* cuando se arrastra el punto P. Entonces lanzamos la pregunta:

¿*Qué trayectoria sigue el punto B'* cuando P recorre la elipse?

De nuevo aquí se aprecia el valor añadido, enorme, que tiene el que uno pueda responder *desde el medio digital* aprovechando el movimiento, y tener lista una conjetura antes de pasar a explicarla y justificarla. La respuesta: un círculo.

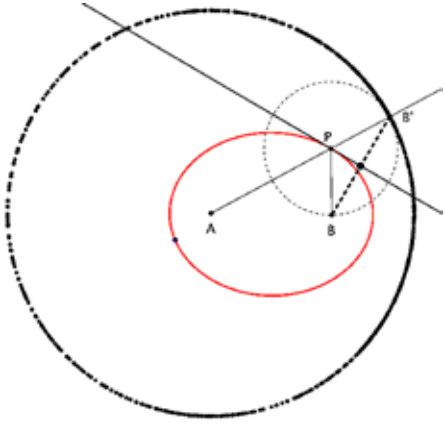


Figura 15. Trayectoria de B'

En la siguiente sesión, les preguntamos si estaban preparados para aplicar el método de análisis y síntesis. La pregunta que habían formulado antes era: ¿cómo sabe Geogebra cómo trazar una elipse? Y para responderla, se empezó diseñando un nuevo método para trazar la tangente como una mediatriz de un segmento "muy adecuado". Primero, un acuerdo sobre hasta dónde habíamos llegado con las construcciones precedentes. Veíamos un círculo, una elipse en su interior un segmento BB' y la mediatriz de dicho segmento era una tangente. Invertir el procedimiento que nos había llevado hasta ahí era nuestro objetivo.

Primer paso: El radio del círculo es AP + PB. Por lo pronto, el radio es arbitrario. El punto P aparece a lo largo de la construcción.

Segundo paso: El punto B' es la intersección de una recta que pasa por el foco A y por B' que es un punto arbitrario.

Tercer paso: Trazamos la mediatriz del segmento BB'. El punto P es la intersección de AB' y la mediatriz.

En este momento de la construcción, algunos sintieron que había una especie de "vacío" (fue el término que emplearon) pues ¿dónde estaba la elipse? Volvimos a enfatizar que nuestra construcción tenía por objeto explorar *a dónde* nos llevaba dicha construcción. Nos habíamos detenido aquí:

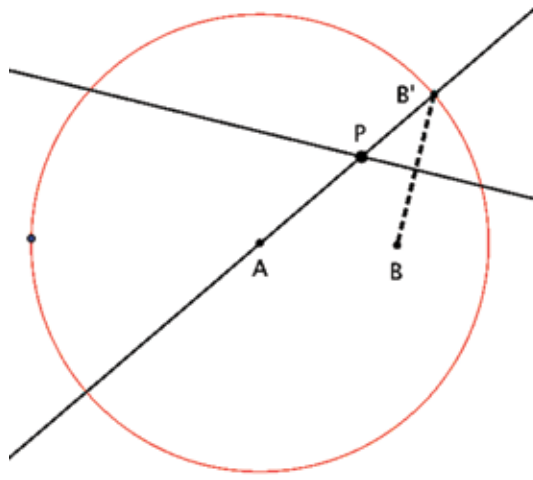


Figura 16. Reconstruyendo la elipse

Ahora la pregunta era: ¿cuál es la trayectoria del punto P cuando el punto B' se desplaza sobre el círculo? Después de arrastrar el punto B' sobre el círculo y seguir, sin activar el rastro todavía, los asistentes observaron el resultado del proceso de análisis y síntesis. Ya con el rastro activado, la trayectoria de P, se observa, es una elipse.

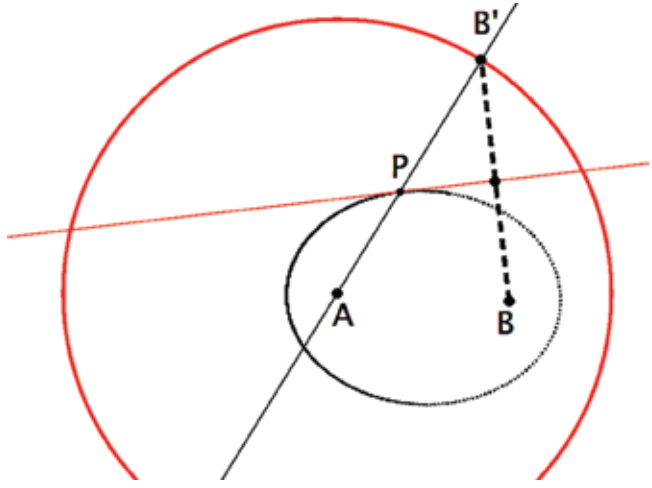


Figura 17. La mediatriz y su envolvente

Ahora bien, quedaba todavía un paso: justificar que la trayectoria era, en efecto, una elipse y para ello había que dejar en claro que la suma de distancias AP + PB era constante. Pero eso era casi inmediato, pues como el punto P se encuentra sobre la mediatriz del segmento BB', entonces PB = PB' y por lo tanto, AP + PB es igual al radio del círculo.

Era claro desde el comienzo que el cambio de base de conocimientos, al "abandonar" la geometría analítica e integrar sus conocimientos de geometría euclidiana *como fundamento para la exploración de las cónicas*, iba a requerir de un proceso guiado, en el cual ellos cada vez irían desarrollando su autonomía.

La nueva manera de trazar una elipse respondía plenamente a la pregunta inicial: ¿cómo sabe Geogebra cómo trazar una elipse? En este momento los profesores tenían lo que ellos llamaron un "tesoro". Tenían una manera propia de hacerlo, que además iba a redituar en la siguiente sesión. El círculo de radio AB' se llama el *círculo director* de la elipse.

La nueva pregunta: *¿cómo trazar la tangente desde un punto que no está sobre la elipse?*

Para el análisis de esta pregunta y la elaboración de una respuesta, regresamos a la nueva construcción. Y aquí se inició otra serie de exploraciones. Todas las construcciones realizadas a partir de la elipse se trasladan a las restantes secciones cónicas. La narrativa se amplía durante el trabajo *in situ*, y también las consideraciones didácticas articuladas alrededor de las nociones básicas de la interiorización de un instrumento simbólico y su mediación para la producción y apropiación de conocimiento matemático.

6. CODA

El péndulo matemático ha oscilado en estas páginas entre los fractales y la geometría dinámica. La búsqueda de los alcances cognitivos de su estudio ha puesto ante los ojos de los investigadores en educación matemática aspectos medulares de nuestra cognición híbrida: la percepción holística (intuición) y su redescripción analítica (Donald, 2001). En el centro de esta búsqueda se encuentran, hoy, los instrumentos de mediación digitales. Pero nuestra cognición no es estática y la presencia de tales instrumentos moviliza nuestras capacidades sensorio-motoras y perceptivas a través de las representaciones dinámicas. De este modo, el movimiento se incorpora como una *dimensión de la argumentación* y no solamente como un reflejo en el símbolo ejecutable.

REFERENCIAS

Cajori, F. (2013). *A History of Mathematical Notations*. New York, USA: Dover.

Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. New York, USA: Dover Books.

Dehaene, S. (2011). *The Number Sense: how the mind creates mathematics*. New York, USA: Oxford University Press.

Donald, M. (2001). *A mind so rare*. New York, USA: Norton.

Gleick, J. (1987). *Chaos: Making of a new science*. New York, USA: Viking Press.

Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 2*(8), 241-249.

Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint*. New York, USA: Springer-Verlag.

Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. New York, USA: Freeman and Company.

Moreno-Armella, L. (1994). La geometría del desorden y un nuevo desarrollo curricular. *Educación Matemática, 6*(3), 52-64.

Moreno-Armella, L. y Sriraman, B. (2010). Symbols and Mediation in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education, 213 Advances in Mathematics Education* (pp. 213-232). New York, USA: Springer-Verlag.

Nolan, B., Dempsey, M., Lovatt, J., y O'Shea, A. (2015). Developing Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) for pre-service teachers: a study of students' developing thinking in relation to the teaching of mathematics. En G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 5, Núm. 1, pp. 54-59). Dublín, Irlanda.

Peitgen, H. O., Jürgens, H. y Saupe, D. (1992). *Fractals for the Classroom*. New York, USA: Springer-Verlag.

Peitgen, H. y Richter, P. (1986). *The Beauty of Fractals*. Berlin, New York , USA, Springer-Verlag.

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 5*(8), 394-406.

Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital

Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen: La resolución de problemas matemáticos es un campo de investigación cuyos resultados sustentan propuestas del currículum y escenarios de enseñanza en el ámbito internacional. ¿Cómo se desarrolla conocimiento matemático vía la resolución de problemas? ¿Qué principios, temas, marcos conceptuales y resultados de investigación caracterizan la agenda académica en la resolución de problemas, y cuál es su relación con el aprendizaje de la disciplina? En la investigación en el área de la resolución de problemas se resalta el trabajo de la comunidad matemática y de los educadores matemáticos en la construcción de marcos conceptuales, los métodos de investigación y resultados que dominan la agenda del campo desde la década de los años 80, con el trabajo de Pólya, hasta la época actual. En particular, se analizará la evolución o cambios importantes en los métodos y resultados relacionados con el desarrollo y disponibilidad de las tecnologías digitales.

1. INTRODUCCIÓN

En 1992 se publicó en la revista *Educación Matemática* el artículo "La resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas" (Santos, 1992). En esa contribución se presenta una caracterización de la propuesta de construir ambientes de aprendizaje basados en la resolución de problemas y se incluye una síntesis del trabajo de Schoenfeld (1985), que ha sido una referencia importante en los programas de investigación sobre la resolución de problemas. El artículo se difundió ampliamente; de acuerdo con *Google Scholar* ha sido citado 47 veces y más de 4 mil quinientos lectores lo han consultado.

¿Cuáles han sido los resultados más importantes de los programas de investigación en el dominio de la resolución de problemas? ¿Qué cambios ha mostrado la agenda de investigación y práctica en la resolución de problemas en los últimos 20 años? En este artículo intentamos responder tales preguntas, teniendo como punto de partida los temas abordados en el artículo de 1992. Tres elementos importantes han contribuido al desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: a) el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; b) los desarrollos en la educación matemática, que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes, y c) la

presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales en los procesos de formular y resolver problemas.

Se inicia con una revisión de algunos trabajos que reconocen a la actividad de resolver problemas como la esencia del quehacer matemático. El método introspectivo fue el medio para que algunos matemáticos comunicaran sus experiencias y analizaran sus modos de formular y resolver problemas. Posteriormente se analiza el programa de Schoenfeld, identificando resultados y cambios importantes en la agenda de investigación. Al final, se destaca cómo el desarrollo de tecnologías digitales (Sistemas de Geometría Dinámica) ha influido en las formas de razonar y trabajar los problemas matemáticos, y también cómo las tecnologías o aplicaciones de comunicación han ampliado las oportunidades para que los estudiantes extiendan sus discusiones más allá de los ambientes formales de enseñanza.

2. LOS MATEMÁTICOS Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Cómo se desarrolla el conocimiento matemático? ¿Qué es lo esencial en el quehacer de la disciplina? En la resolución de problemas matemáticos como área de estudio, interesa analizar cómo se construye el conocimiento disciplinario, cómo se formulan los problemas y las formas de caracterizar y explicar el proceso de construcción de conceptos y la resolución de los problemas. Se sostiene que el análisis y la explicación del proceso que se involucra en la resolución de problemas proporciona información importante sobre el diseño de ambientes de aprendizaje que estructuren y promuevan actividades para la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Así, en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Pólya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

La comprensión del problema se relaciona con la importancia de analizar el enunciado del problema como punto de partida para buscar formas o métodos de solución. En esta fase, el individuo o estudiante problematiza el enunciado con la intención de identificar los conceptos y datos relevantes, y se analizan pertinencia, consistencia y sentido del enunciado (¿qué se pide?, ¿qué datos se tienen, son suficientes?, ¿qué conceptos son importantes?, etcétera).

El diseño de un plan de solución se refiere a encontrar relaciones entre los datos del enunciado y lo que se pide encontrar, con la idea de formular un plan de solución. ¿Conoces algún problema relacionado?, ¿puedes replantear el enunciado?, ¿identificas alguna estrategia que puedas aplicar para resolver el problema?, ¿estás usando todos los datos o condiciones del problema?, ¿se puede representar el problema dinámicamente?

La siguiente fase involucra *llevar a cabo el plan* y verificar que los pasos y operaciones realizadas sean correctas. Aquí es significativo que el individuo revise la consis-

tencia de las unidades de los datos en las soluciones, y las diferentes representaciones que sean relevantes en el proceso de solución.

Finalmente, la fase *visión retrospectiva* implica considerar otros caminos para resolver el problema y analizar si los métodos de solución pueden aplicarse en la solución de otros problemas. Además, aquí resulta valioso transformar el enunciado inicial del problema en casos más generales y proponer nuevos problemas.

Pólya (1945) también aborda la importancia de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Las heurísticas son patrones de un razonamiento productivo que resultan trascendentes para lograr avances en la comprensión y solución de problemas no rutinarios. Algunos ejemplos de estrategias heurísticas que Pólya ilustra en la resolución de problemas son el uso de tablas o diagramas, resolver problemas más simples, establecer sub-metas, relajar condiciones iniciales, asumir el problema como resuelto y buscar relaciones, etcétera.

Hadamard (1945) contribuye también al entendimiento del proceso de resolver problemas y presenta un ensayo sobre cómo los matemáticos inventan o generan nuevas ideas. Su método consiste en analizar respuestas que recibe de matemáticos y científicos distinguidos de su época (Pólya, Einstein, Levi-Strauss, etc.) a un cuestionario con preguntas sobre sus experiencias al trabajar o desarrollar conocimiento en sus áreas o disciplinas. También recoge testimonios de matemáticos, revisa el trabajo de psicólogos, filósofos y científicos, e incorpora la introspección de su propio quehacer como elementos para explicar la invención de resultados matemáticos. En términos generales, el modelo que reporta Hadamard distingue un patrón que identifica tres elementos alrededor del proceso de invención: el estudio consciente del tema o problema (revisión), seguido por un proceso de madurez inconsciente (incubación), lo que conduce a un momento de inspiración o iluminación (*insight*) (la invención, revelación de la solución).

Tanto el trabajo de Pólya como el de Hadamard intentan caracterizar el proceso de resolver problemas o de generar conocimiento matemático. Pólya describe el proceso de trabajar los problemas y señala preguntas importantes asociadas con cada fase involucrada en la resolución de problemas. Por su parte, Hadamard centra más la atención en explicar cómo se genera una idea novedosa o resultado importante en el quehacer disciplinario. Este modelo comparte los desarrollos con la psicología de la Gestalt[1] que identifica cuatro fases en la resolución de problemas: a) el individuo se prepara para resolver un problema (revisa información, representa el problema, busca problemas relacionados); b) se involucra en el proceso de incubación del problema, que incluye pruebas de ensayo y error para resolverlo; c) se ilumina y el *insight* ocurre y resuelve el problema, y d) verifica la solución del problema.

La comunidad matemática reconoce que la resolución de problemas es una actividad crucial en el desarrollo del quehacer de la disciplina y varios autores han publicado libros que incluyen el análisis de problemas situados en diversas áreas (Dörrie, 1965; Hilbert, 1902; Steinhaus, 1964). Halmos (1980) expresa que los axiomas, teoremas,

[1] Véase Wertheimer, https://es.wikipedia.org/wiki/Max_Wertheimer

pruebas, conceptos, definiciones, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, pero la principal razón del quehacer matemático es resolver problemas.

> Yo creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que como maestros, en el salón de clase, seminarios, y en los libros y artículos que escribimos, los enfaticemos más y más, y que entrenemos a nuestros estudiantes a ser mejores formuladores y resolutores de problemas que nosotros. (Halmos, 1980, p. 524) *[Traducción propia]*

Para Halmos, el mejor camino para aprender matemáticas es resolver problemas y describe cómo él usa el método Moore[2] en sus cursos universitarios, "método para crear una actitud para resolver problemas en los estudiantes, es una mezcla de método socrático y el espíritu competitivo de los juegos olímpicos" (Halmos, Moise y Piranian, 1975, p. 468). *[Traducción propia]*

Durante su curso de álgebra lineal, en la primera clase les dio una lista de 50 teoremas, sin definiciones, sin explicaciones, sin pruebas. La tarea de los estudiantes fue entenderlos y explicarlos, mostrar ejemplos y contraejemplos, y finalmente demostrarlos. El método Moore ha sido usado en cursos universitarios con estudiantes que muestran interés y motivación en el estudio de las matemáticas (Santos-Trigo, 2014a).

3. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, LOS EDUCADORES Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un trabajo notable que influye en el desarrollo de la resolución de problemas como dominio de investigación es el estudio sobre las habilidades matemáticas de los niños con capacidades sobresalientes o tendencias hacia el estudio de la disciplina (Krutetskii, 1976). En particular, el estudio de Krutestkii no solo caracteriza un conjunto de habilidades matemáticas en los niños dotados o sobresalientes, sino que también contribuye al desarrollo metodológico de estudios de naturaleza cualitativa en la resolución de problemas.

> Analizamos el proceso natural de pensar mientras los problemas experimentales eran resueltos: por un registro de solución, la naturaleza de las operaciones, los diagramas y dibujos hechos por los participantes; por el registro del proceso verbal de reflexión durante el camino de solución; por el material desde la discusión acerca de la solución después de su obtención. (Krutetskii, 1976, p. 94) *[Traducción propia]*

[2] Véase https://en.wikipedia.org/wiki/Moore_method

Krutetskii analiza las habilidades matemáticas de niños de quinto y sexto grado de primaria usando problemas de aritmética ("para numerar el número de páginas de una enciclopedia se necesitan 6 869 dígitos, ¿cuántas páginas contiene?"), geometría y razonamiento lógico. El método de aplicar los problemas también fue novedoso en esa época; al niño se le presentaba un problema difícil, si no lo resolvía se le proporcionaba otro fácil y después otra vez el difícil, etcétera. El propósito era determinar qué tan rápido el niño podía encontrar una generalidad y así observar la habilidad matemática como un proceso, y no solo como un resultado. Entre las habilidades matemáticas que mostraron los niños con talento matemático se destacan: la habilidad para hacer y usar generalizaciones; una habilidad para ofrecer y usar representaciones múltiples del mismo objeto matemático; una tendencia para pensar diferentes maneras de resolver un problema; una habilidad para usar analogías y establecer conexiones; una tendencia para abreviar acercamientos y buscar atajos en la resolución de problemas, etcétera.

Newell y Simon (1972) desarrollan, desde la inteligencia artificial, un programa "General Problem Solver" para resolver problemas de criptoaritmética, jugar ajedrez y probar teoremas. La estructura del algoritmo del programa para resolver los problemas se diseñó a partir de analizar y simular cómo los expertos en esos dominios resolvían los problemas. Así, el estudio del proceso cognitivo del individuo llegó a ser un área de interés y de investigación. En esta perspectiva, el campo de la inteligencia artificial ofreció o aportó a la educación matemática herramientas como el análisis de protocolos de expertos o individuos resolviendo problemas para categorizar los patrones de comportamiento que mostraban durante el proceso de resolución.

El trabajo de Schoenfeld (1985) retoma métodos como el análisis de protocolos y lanza un programa de investigación que lo lleva a implementar las heurísticas mencionadas por Pólya (1945) en un curso de resolución de problemas. Santos (1992) destaca los resultados importantes del trabajo de Schoenfeld, quien enfoca la atención sobre las siguientes preguntas: ¿qué hacen los individuos que resuelven problemas de manera eficiente y qué es lo que les permite resolver problemas difíciles? ¿Qué dificultades muestran y cómo se comportan aquellos que no son efectivos en la resolución de problemas? ¿Qué pueden hacer los profesores para ayudar a los estudiantes a ser exitosos en la resolución de problemas?

Para responder estas preguntas, Schoenfeld (1985) presenta un marco conceptual que explica el éxito o fracaso de un individuo o estudiante al resolver problemas en términos de cuatro dimensiones (Santos-Trigo, 2014a):

1. *El conocimiento o recursos básicos*. Es decir, el conocimiento de hechos y conceptos básicos que el estudiante tiene potencialmente a su disposición resulta esencial durante el proceso de solución de un problema.
2. *Las heurísticas* o reglas generales que ayudan al estudiante a avanzar o progresar en el proceso de solución cuando no encuentra un camino directo para resolver el problema.

3. *Las estrategias metacognitivas* o el monitoreo o autorregulación del proceso de solución. Los que resuelven problemas de manera exitosa planean y monitorean la forma y el proceso de solución. Si observan que van progresando, entonces continúan; si encuentran dificultades, revalúan lo que están haciendo y consideran alternativas.
4. *Las creencias*. Lo que los estudiantes creen acerca de ellos mismos, de la naturaleza del quehacer matemático que se deriva de sus experiencias de aprendizaje, moldea y permea lo que hacen durante sus intentos de solución.

Por ejemplo, aquellos estudiantes que creen que los problemas matemáticos se resuelven en menos de cinco minutos abandonarán sus intentos después de agotar ese tiempo, aun cuando pudieran haber resuelto el problema si hubiesen perseverado en resolverlo. De manera similar, aquellos estudiantes que creen que las pruebas no tienen nada que ver con el desarrollo de alguna relación matemática, muchas veces plantean conjeturas o resultados que se contradicen o no toman en cuenta lo que antes habían probado.

Otro resultado importante del programa de Schoenfeld se relaciona con el uso de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). Schoenfeld (2010b) reportó que los métodos heurísticos identificados por Pólya son complejos y los estudiantes experimentan serias dificultades para aprenderlos y aplicarlos en la resolución de problemas. Schoenfeld señala que cada heurística no se reduce a una sola estrategia que se aplica en la resolución de un problema, sino que representa una colección o familia de estrategias. Así, para que un estudiante identifique lo que una heurística involucra y cómo usarla, debe pensar y experimentar lo que esa estrategia significa en un dominio particular (geometría/triángulos, álgebra/raíces, cálculo/sucesiones, etc.) y ensayar su aplicación o uso en una variedad de casos.

> ...Por ejemplo, en el uso de la estrategia "buscar el sentido o pertinencia del problema a través de ejemplos", uno debe a) pensar en el uso de la estrategia, b) saber qué versión de la estrategia usar, c) generar y examinar los ejemplos apropiados, d) analizar los resultados obtenidos, y d) usarlos para resolver el problema. (Schoenfeld, 2010b, p. 106) *[Traducción propia]*

Schoenfeld (2015) afirma que el programa que desarrolló sobre la resolución de problemas le proporcionó bases para ayudar a los estudiantes a ser más efectivos al resolver problemas. Su agenda de investigación posterior se enfocó en cómo ayudar a los maestros en la construcción e implementación de ambientes de aprendizaje que facilitaran a los estudiantes incrementar una comprensión profunda de la disciplina. Su agenda se centró en el área relacionada con la toma de decisiones e incluyó las siguientes interrogantes:

> ¿Puedo desarrollar una comprensión teórica de la enseñanza que permita entender cómo y por qué toman las decisiones que toman cuando enseñan? ¿Pueden los maestros usar esos desarrollos teóricos y ayudarles a ser más efectivos? Además, ¿puede la descripción teórica de la enseñanza ser usada para caracterizar el proceso de tomar decisiones en otras áreas? (Schoenfeld, 2015, p. 230) *[Traducción propia]*

También, Schoenfeld (2010a) expresa que una actividad con una meta orientada, como la resolución de problemas, la enseñanza o una cirugía de cerebro, puede ser explicada y modelada a través de una arquitectura teórica en términos de: los *recursos* (conocimiento específico), las *metas*; *orientaciones* (una abstracción de creencias, incluyendo valores, preferencias, etc.) y una *toma de decisiones*. La estructura básica de esta teoría es recursiva: Los individuos se orientan hacia situaciones y deciden (a partir de creencias y recursos disponibles) cómo lograr sus metas. Si la situación es familiar, implementan rutinas familiares; si son problemáticas, reconsideran sus caminos.

En este contexto, el conocimiento acumulado en el campo de la resolución de problemas ha aportado información relevante sobre lo que significa e involucra pensar matemáticamente, y también ha identificado diversas maneras para que los estudiantes construyan conocimiento matemático vía la resolución de problemas (Santos-Trigo, 2014b). ¿Qué tipo de innovaciones debe incorporarse en los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes tomen en cuenta los recursos y desarrollos tecnológicos para generar competencias en la resolución de problemas? En la discusión de esta pregunta se presenta un problema (Schoenfeld, 1985) y se muestra un acercamiento que involucra el uso de un sistema de geometría dinámica (Geogebra) que favorece una exploración dinámica del problema. Se argumenta que el uso de la tecnología digital amplía las formas de representar, explorar, resolver los problemas y por lo tanto demanda una revisión de los marcos conceptuales que se generaron a partir de analizar procesos de resolución que esencialmente involucran el uso de lápiz y papel (Santos-Trigo, 2014b; Liljedahl *et al.,* 2016).

El problema involucra la construcción de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia dada y que el área de ese triángulo sea la máxima: "Se escogen tres puntos sobre una circunferencia de radio R y se dibuja el triángulo con vértices esos tres puntos. ¿Cómo escoger los puntos para que el triángulo que resulte tenga la máxima área posible? (argumente)" (Schoenfeld, 1985, p. 319) *[traducción propia]*

1. Se construye una circunferencia cualquiera de centro A y se seleccionan tres puntos móviles C, D y E sobre la circunferencia para formar el triángulo CDE (figura 1a). Posteriormente, se mueve un vértice (E) mientras se mantienen fijos los vértices C & D (lado CD) y se observa que el área de la familia de triángulos que se genera al mover el punto E cambia. ¿Cómo varía el área de la familia de triángulos al mover el punto E sobre la circunferencia?
2. En el plano cartesiano se construye un punto F con coordenadas la misma abs-

cisa del punto E y como ordenada el valor del área del triángulo (F = (x(E), Área CDE)). Se observa que al mover el punto E sobre el triángulo, el punto F también se mueve. Es decir, el punto F describe la variación del área de la familia de triángulos que se genera al mover el punto E sobre la circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto F cuando el punto E se mueve sobre la circunferencia?

3. Con la herramienta lugar geométrico se puede trazar el camino o rastro que describe el punto F (figura 1a) y visualmente se puede localizar la posición de F donde el valor del área alcanza el máximo. En esta posición se pueden medir directamente los ángulos del triángulo con esa área máxima y formular una conjetura: de la familia de triángulos que se genera al mover el punto E, el que alcanza el área máxima es un triángulo isósceles. ¿De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, cuál es el que alcanza el área máxima?
4. Se construye una familia de triángulos isósceles a partir del punto E; trazando la recta AE y una perpendicular a esta por un punto C cualquiera de la circunferencia (figura 1b). Luego se puede analizar la variación del área del triángulo CDE en función de la posición del punto móvil C creando el punto dinámico G = (x(C), Área CDE). Como resultado de esta exploración, se puede conjeturar que el triángulo con mayor área es el equilátero.

Se observa que los lugares geométricos permiten visualizar la posición del triángulo donde el área alcanza su valor máximo. También, la medición de los ángulos proporciona información para formular conjeturas sobre el tipo de triángulo que muestra el área máxima.

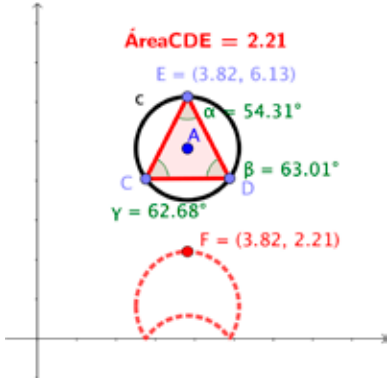


Figura 1a. Primera conjetura: De todos los triángulos inscritos a una circunferencia, el triángulo de máxima área al mantener fijo un lado es el isósceles.

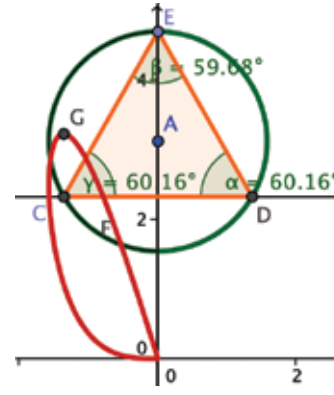


Figura 1b. Segunda conjetura: De todos los triángulos isósceles inscritos a una circunferencia, el triángulo de máxima área es el equilátero.

Comentario: Un aspecto importante en el proceso de solución del problema es la construcción de un modelo dinámico que permite explorar el comportamiento de familia de triángulos y observar sus propiedades. El movimiento ordenado (al mover los puntos E y C, respectivamente), la relación que define los puntos F y G, y el trazo de los lugares geométricos correspondientes, y la cuantificación de atributos (medición de los ángulos) son estrategias importantes que proporcionan información para formular conjeturas, y posteriormente para buscar propiedades y argumentos que las sustenten. Schoenfeld (1985) reporta que los estudiantes al resolver este problema (pp. 316-331) se inclinaron por hacer cálculos o por construir un modelo algebraico del problema, y mostraron serias dificultades en esta tarea. El uso de la herramienta genera oportunidades para que los estudiantes construyan y exploren el comportamiento de los objetos, orientándose a la búsqueda de propiedades y relaciones que los llevan a resolver el problema.

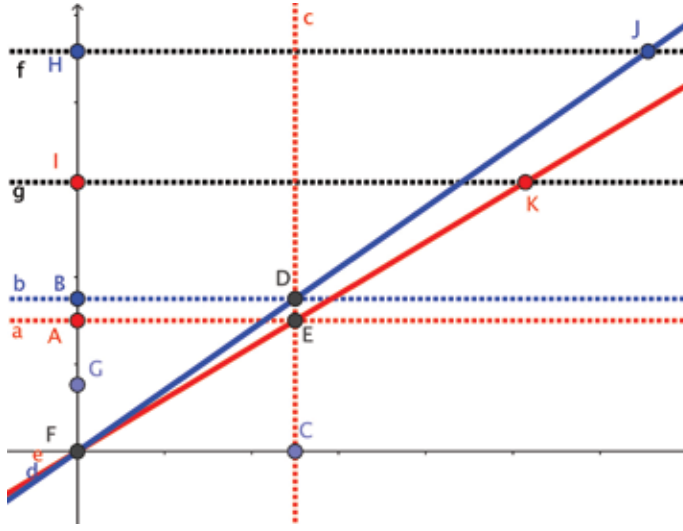
4. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE TECNOLOGÍA DIGITAL

¿Qué ofrece la tecnología digital al estudiante, en términos de formas de razonamiento en la resolución de problemas? ¿Qué información del proceso de resolución resulta importante en la discusión de los marcos conceptuales que explican cómo los estudiantes usan la tecnología en la resolución de problemas? En la discusión de estas preguntas se presentan dos ejemplos, uno que involucra un problema verbal o de palabras que generalmente se abordan desde la enseñanza secundaria, y en general se prioriza la construcción de un modelo algebraico para su resolución. En el segundo ejemplo, se destaca el uso de la herramienta en la aplicación de algunas estrategias heurísticas y la búsqueda de propiedades y relaciones que resultan esenciales en el proceso de solución. En los dos ejemplos, el punto de partida es buscar el significado geométrico de los conceptos involucrados en el enunciado del problema, y construir un modelo dinámico que permita explorar y encontrar relaciones. El uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como Geogebra genera una oportunidad para que el estudiante se involucre en un proceso de formulación de conjeturas y formas de exploración y validación de resultados.

4.1. Un problema verbal o de palabras

> Dos ciclistas corren alrededor de un campo de futbol. La velocidad promedio del primer ciclista es de 18 km/h y la del segundo de 21 km/h. El segundo ciclista empezó la carrera cuando el primero llevaba 300 m. La carrera terminó al completar seis vueltas. ¿Cuál es la distancia recorrida en una vuelta, si se sabe que ambos ciclistas cruzaron la meta al mismo tiempo? (Semanišinová, Harminc y Jesenská, 2017, p. 175) *[Traducción propia]*

En la figura 2 se muestra una representación gráfica del problema que destaca el significado geométrico de la velocidad como la razón entre la distancia y tiempo (pendiente), el uso del sistema cartesiano y la representación dinámica de algunos parámetros (la longitud de una vuelta del recorrido). Otro elemento importante es el uso de una escala apropiada para representar los datos del problema.



- Eje X: tiempo en minutos escala 5:1.
- Eje Y: distancia en metros escala 1:100.
- El punto F es el origen del sistema cartesiano.
- La velocidad de los ciclistas en metros por minuto es de 3 y 3.5.
- Se crean los puntos A = (0,3), B = (0,3.5).
- Se coloca un punto C móvil sobre el eje X y se arrastra hasta la posición (5,0).
- Se trazan las perpendiculares a los ejes por los puntos A, B y C.
- Se encuentran los puntos de intersección D y E de estas perpendiculares.
- La pendiente de la recta FE representa la velocidad del primer ciclista y la pendiente de la recta FD representa la velocidad del segundo.
- Se coloca un punto móvil G cualquiera; la distancia FG representa la longitud de una vuelta de la carrera.
- Se crea el punto H = (0, 6*y(G)); la abscisa de este punto es seis veces la abscisa del punto G. La longitud de FH representa la distancia total recorrida con seis vueltas, es decir, la distancia total recorrida por el segundo ciclista.
- Se crea el punto I = (0, y(H)–3); la abscisa de este punto es tres unidades menor que la abscisa del punto H. La longitud de FI sobre el eje Y representa la distancia total recorrida por el primer ciclista (300 m menos que el segundo ciclista).
- Se trazan las perpendiculares al eje Y por los puntos H e I y se encuentran sus puntos de intersección J y K con las rectas FD y FE, respectivamente.
- Las abscisas de los puntos J y K representan el tiempo que le tomó acabar la carrera a cada ciclista.

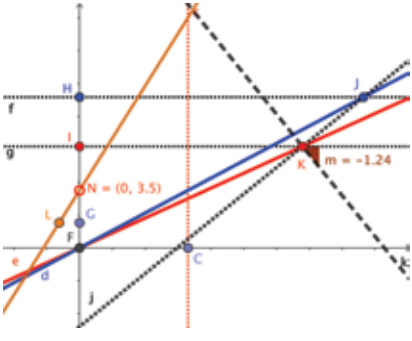
Figura 2. Representación dinámica del problema de los ciclistas

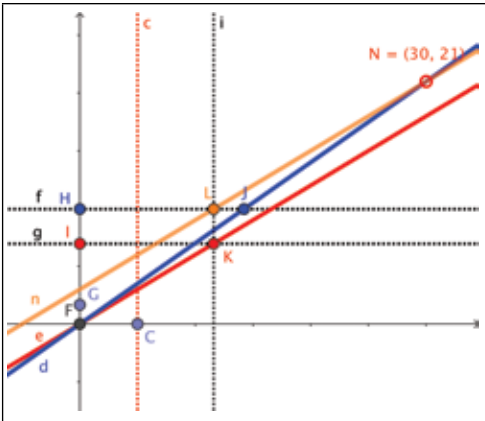
El concepto fundamental involucrado en el problema es el de velocidad, entendido como la razón entre distancia y tiempo. ¿Cómo representar este concepto geométricamente? Geométricamente la velocidad puede representarse como la pendiente de rectas tales que sus puntos cumplen cierta razón entre sus coordenadas (distancia y tiempo). Así, estas rectas pueden usarse para conocer la distancia recorrida en cualquier instante de tiempo.

Al resolver este problema con lápiz y papel, la distancia de una vuelta completa al campo de futbol sería la incógnita y las demás relaciones se tendrían que usar para plantear ecuaciones en términos de dicha incógnita. Por ejemplo, al centrar la atención en la distancia, un modelo algebraico sería $18t + 0.3 = 21t$; $x = \frac{21t}{6}$, t representa el tiempo cuando ambos ciclistas corren, y x es la longitud de una vuelta.

En la representación dinámica del problema, mostrada en la figura 2, la distancia de una vuelta completa FG es un elemento esencial que representa la variable a explorar, a través del punto G en el modelo. Luego, las relaciones de proporción se representan por medio de la relación de distancias variables entre puntos móviles que dependen del movimiento del punto G.

En otras palabras, al mover el punto G se explora una infinidad de casos particulares para la distancia de una vuelta completa y para la distancia total de la carrera. No obstante, existe una única posición del punto G que resuelve el problema. La pregunta relevante que se plantea en este momento es ¿para qué posición del punto G los dos ciclistas terminan la carrera al mismo tiempo? En términos de la representación dinámica, la pregunta sería ¿en qué momento las abscisas de los puntos J y K son iguales? En la figura 3 se muestran algunas formas de responder esta pregunta y resolver el problema.

Configuración	Solución
 Recta KJ y su perpendicular por el punto K. Pendiente m de la recta perpendicular. Punto L = (m, y(G)). Lugar geométrico del punto L al mover el punto G.	*Estrategias dinámicas.* Crear el punto dinámico L = (m, y(G)) que relaciona la pendiente de la recta perpendicular a KJ y la longitud de FG. Visualizar el lugar geométrico (recta) descrito por el punto L al mover G. *Solución.* Cuando la pendiente m sea cero, los puntos J y K tendrán la misma abscisa y la distancia de una vuelta completa estará determinada por la intersección N del lugar geométrico de L con el eje Y. Así, una vuelta completa mide 350 metros y la distancia total 2100 metros.



Recta perpendicular al eje X que pasa por K y su punto L de intersección de esta recta con la recta HJ. Lugar geométrico del punto L al mover el punto G.

Estrategia dinámica. Visualizar el lugar geométrico del punto L al mover el punto G.
Solución. La solución se obtiene cuando los puntos L y J coincidan, es decir, cuando el lugar geométrico (recta) descrito por el punto L interseque a la recta FJ (punto N). El punto N indica que la distancia total de seis vueltas es de 2100 metros, por lo que la distancia de una vuelta es de 350 m.

Figura 3. Algunas soluciones al problema

En la figura anterior se muestran dos formas distintas de resolver el problema; éstas dependen del camino que se elija analizar para determinar la posición del punto G en la que los puntos J y K tienen misma abscisa. Una vez obtenida la representación dinámica del problema, la solución puede encontrarse de distintas formas, lo que puede permitir conectar distintos contenidos y recursos matemáticos.

Otros acercamientos pueden involucrar el comportamiento de la diferencia o razón de las abscisas de los puntos J y K con la posición del punto G (figura 4). Cabe mencionar que las soluciones no dependen de la posición del punto C, pues éste se usa únicamente para determinar la misma unidad de tiempo para las velocidades de ambos ciclistas.

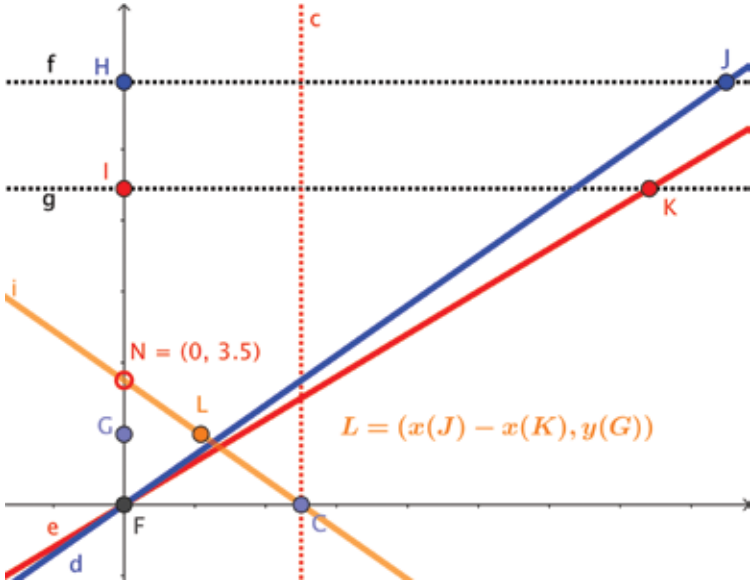
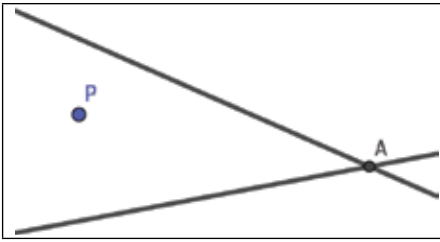


Figura 4. Análisis de la relación entre la posición del punto G y la resta de las abscisas de los puntos J y K

Comentario: El proceso que se muestra en la solución del problema demanda que el estudiante/maestro enfoque la atención en el significado geométrico de los conceptos que aparecen en el enunciado del problema. Un concepto clave en los problemas verbales o de palabras es el concepto de razón y en general la configuración o modelo dinámico de su representación comparte características estructurales similares. En el camino hacia la solución no aparece de manera explícita la construcción del modelo algebraico asociado, más bien, se plantea un razonamiento geométrico que puede involucrar diversas rutas para alcanzar la solución.

4.2. La heurística de relajar las condiciones del problema para formular problemas más simples

Una estrategia importante de resolución de problemas es la heurística de relajar las condiciones de un problema para plantear problemas más simples que ayuden a resolverlo. Esta estrategia se relaciona con el proceso de formular problemas por parte del individuo. ¿Cómo se puede implementar esta estrategia con el uso de Geogebra? Se muestra un ejemplo de la implementación de esta heurística con ayuda de un SGD para resolver un problema que involucra el trazo de una circunferencia tangente a dos rectas:

	**Problema 3.** Dadas dos rectas y un punto P que no pertenece a ellas, trazar una circunferencia que pase por el punto P y sea tangente a las rectas.

Aplicando la heurística de relajar las condiciones del problema inicial para formular un problema más simple, se podría plantear el siguiente problema:

Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.

Así, el Problema 3 se puede descomponer en dos problemas análogos al considerar solo una de las rectas. Una solución dinámica al Problema 3.1 se muestra en la figura 5.

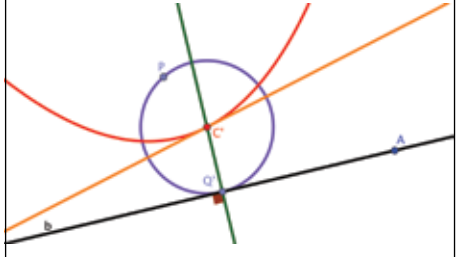
Solución	Análisis
Problema 3.1. Dada una recta y un punto P, trazar una circunferencia que sea tangente a la recta y que pase por el punto P.  *Descripción.* Q' es un punto móvil sobre la recta. Se traza la recta perpendicular a la recta dada que pasa por el punto Q' y la mediatriz del segmento PQ'. Se identifica la intersección C' de la mediatriz y la recta perpendicular. Se traza el lugar geométrico del punto C' al mover el punto Q'.	*Recursos.* El centro de una circunferencia tangente a una recta y el punto de tangencia forma un segmento perpendicular a dicha recta. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos. Lugar geométrico. *Heurísticas.* Relajar las condiciones del problema y formular un problema más simple. Analizar patrones. *Estrategias dinámicas.* Se traza la familia de circunferencias que pasan por el punto P a partir de un punto de tangencia Q' móvil. *Resultado importante.* El lugar geométrico descrito por el centro C' de la familia de circunferencias tangentes a una recta dada que pasan por un punto P dado es una parábola. El foco y directriz de la parábola son el punto P y la recta dada.

Figura 5. Solución dinámica del Problema 3.1

Una actividad valiosa sería argumentar por qué el centro de las circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto describe una parábola. Así, se puede

argumentar que el punto C' siempre está a la misma distancia del punto P y de la recta dada (definición de parábola); por ser el punto de intersección de la mediatriz de PQ' y la perpendicular a la recta por Q'. Por lo tanto, la recta y el punto serían la directriz y el foco de la parábola, respectivamente.

Para este enfoque dinámico, la mediatriz y la parábola son algunos recursos fundamentales. Un aspecto importante en este acercamiento es el movimiento de elementos dentro de la configuración; el movimiento del punto Q' sobre la recta permite generar una familia de circunferencias tangentes a dicha recta y que pasan por el punto P. Posteriormente, se pueden analizar patrones en términos del lugar geométrico descrito por puntos móviles; el lugar geométrico descrito por el centro C' en función del movimiento del punto Q' es una parábola. Así, la visualización de lugares geométricos se convierte en una estrategia que permite resolver problemas. Luego, otra fase del proceso de solución de problemas con ayuda del SGD consiste en analizar los lugares geométricos; se argumentó que el lugar geométrico descrito por el punto C' es una parábola.

Finalmente, el Problema 3 (uno de los problemas de Apolonio) se puede resolver mediante la transferencia de los resultados del Problema 3.1. Si se omite o se considera solo una de las rectas, sabemos que el centro de la familia de circunferencias tangentes a una recta y que pasan por un punto está sobre una parábola que tiene como foco y directriz el punto y la recta dados. Así, para resolver el Problema 3 basta con aplicar el resultado del Problema 3.1 para cada recta. La solución quedará en términos del punto de intersección de dos parábolas (figura 6). La parábola c está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta a y la parábola f está determinada por los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a la recta b. Así, los puntos de intersección de las parábolas c y f determinan los centros de las circunferencias que pasan por el punto P y son tangentes a ambas rectas.

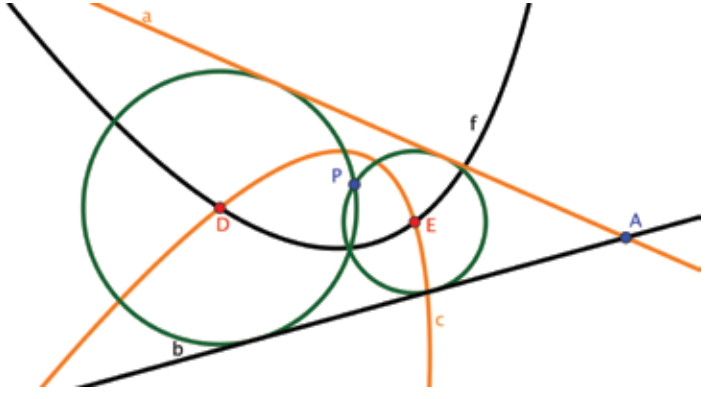


Figura 6. Solución al problema de Apolonio mediante la transferencia de los resultados del Problema 2.1

Una variante de este problema es cuando el punto P se encuentra en una de las rectas, y otra vez el mismo método que involucra el trazo de la parábola ayuda a resolver el problema (figura 7).

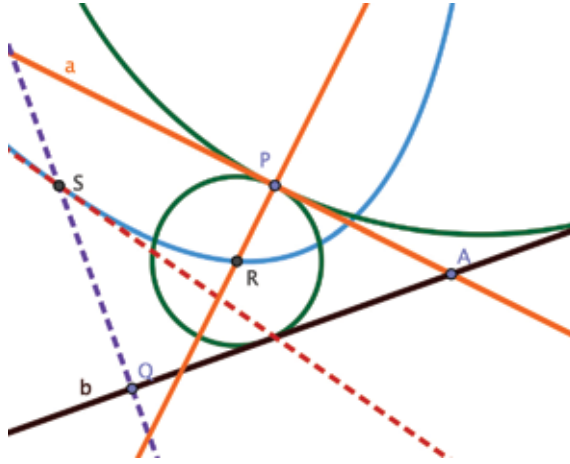


Figura 7. Trazo de circunferencias tangentes a dos rectas en el punto P que pertenece a una recta

Comentario: Las estrategias heurísticas son esenciales en todas las fases de resolución de problemas y con el uso de tecnología digital algunas de ellas se potencian; en el proceso de implementarlas también se generan nuevas heurísticas. La aplicación de la heurística que implica *reducir o relajar* las condiciones del problema inicial proporciona al estudiante una oportunidad para involucrarse en un proceso de formulación de problemas que es una actividad esencial en el quehacer de la disciplina. ¿Cómo trazo una circunferencia tangente a una recta? Es una pregunta que se aborda desde la educación básica y se asocia con el trazo de la perpendicular a la recta que pasa por el punto de tangencia y que luego se conecta con el trazo de la mediatriz. El movimiento de puntos y objetos es otra estrategia fundamental que se robustece con el trazo de lugares geométricos. Así, el lugar geométrico de la intersección de la recta perpendicular y la mediatriz representa una parábola y se convierte en un objeto importante para resolver el problema. Es decir, la estrategia de enfocar la atención hacia un caso particular de trazar la circunferencia tangente a una recta y que pase por el punto dado P no solo proporcionó recursos e información significativa para resolver el problema, sino que también emergieron nuevos conceptos o relaciones que extienden el enunciado inicial del problema.

5. DISCUSIÓN Y REFLEXIONES

Tres temas relacionados se identifican en la estructura y desarrollo de la resolución de problemas como un dominio de investigación y un modelo de enseñanza:

1. La contribución y el reconocimiento de la comunidad matemática hacia la actividad de resolver problemas como un elemento esencial del quehacer de la disciplina.
2. El trabajo desde la educación matemática como disciplina que provee bases metodológicas para estudiar sistemáticamente el comportamiento de los estudiantes o individuos durante la resolución de problemas. Así, los aportes y reflexiones de los matemáticos influyen en la construcción y desarrollo de la agenda de investigación en el área de la resolución de problemas. Schoenfeld (1992) menciona que una caracterización robusta de lo que significa e involucra el pensar matemáticamente resulta fundamental en los temas de estudio de la resolución de problemas. En este contexto, el quehacer de la disciplina que muestran los expertos contribuye a la discusión sobre lo que caracteriza el pensamiento matemático.
3. Un tema transversal en la agenda académica del campo de la resolución de problemas es el uso de distintas herramientas en las distintas fases que se involucran en el proceso de búsqueda de soluciones de los problemas. Camacho y Santos-Trigo (2015) presentan aportes importantes y resultados en un programa de investigación relacionado con la formación de profesores.

Recientemente, los desarrollos y disponibilidad de tecnologías digitales (de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación y de acción matemática como Geogebra) están influyendo y ampliando no solo las formas de representar y explorar los problemas o contenidos matemáticos, sino también las dinámicas que se generan en los ambientes de enseñanza (Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Aguilar-Magallón, 2016).

En la incorporación o uso sistemático y coordinado de tecnologías digitales en la representación y exploración de los problemas y en los escenarios de enseñanza, resulta importante que los mismos profesores inicialmente se involucren en actividades que los lleven a analizar los recursos y estrategias que caractericen las formas de razonamiento que emergen con el uso de las tecnologías (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). Es decir, un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos. Además, los desarrollos en línea o plataformas *ad hoc*[3] ofrecen recursos que los estudiantes pueden consultar y discutir en el estudio de los conceptos como parte de una comunidad de aprendizaje que promueva el intercambio de ideas y la formulación de nuevos problemas.

[3] Por ejemplo, véase https://www.khanacademy.org/coach/dashboard

En los ejemplos que aquí se han presentado, se involucra y destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas; se observa que el movimiento de algunos elementos (movimiento ordenado) dentro del modelo resulta central en la formulación de conjeturas y de nuevos problemas (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2016). Además, la misma exploración dinámica del modelo genera información relacionada con las propiedades de algunos objetos o de sus atributos. En términos de los marcos conceptuales que explican el proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; 1992) existe evidencia del surgimiento de una dimensión importante en el proceso de resolución de los problemas, que se relaciona con la importancia de que el individuo o estudiante se involucre en actividades o en un proceso de apropiación de diversas herramientas (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2016). Además, con el uso de la tecnología digital se amplía el conjunto de estrategias heurísticas disponibles durante todas las fases de resolución de los problemas.

El movimiento ordenado, la cuantificación de atributos (medida de ángulos, longitud de segmentos, perímetro, área, etc.), la generación y visualización de lugares geométricos y el uso de deslizadores son algunas heurísticas propias de un sistema de geometría dinámica. Estas estrategias son vitales en el análisis y la caracterización de las formas de razonamiento que muestra el individuo durante el proceso de resolución de las tareas o problemas.

Finalmente, el uso de tecnologías de usos múltiples como Internet o aplicaciones de comunicación (Skype, FaceTime, Padlet) permiten a los estudiantes y profesores extender las discusiones matemáticas más allá del salón de clase. Es decir, los acercamientos o ideas individuales se pueden compartir en un muro digital (Padlet) y el grupo o la comunidad de aprendizaje le puede dar seguimiento a esas contribuciones individuales para compartir otras ideas, proporcionar retroalimentación o proponer extensiones del problema inicial. En esta perspectiva, el estudiante o profesor se involucra en una discusión continua como parte de un grupo (incluyendo expertos o pares), que puede ser sincronizada (directa, vía alguna aplicación) o a través del uso de correo electrónico, con el objetivo de defender, contrastar y refinar sus ideas y acercamientos a los problemas. Además, el uso de tabletas o teléfonos móviles facilita la interacción entre estudiantes y promueve el intercambio de ideas y la búsqueda de distintos acercamientos o métodos de resolución de los problemas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo parcial recibido de Conacyt-168543 y EDU2017-84276-R durante el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

Camacho, M. y Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre la resolución de problemas, tecnología digital y formación de profesores de matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Avances y Realidades de la Educación Matemática* (pp. 113-131). Barcelona, España: GRAO.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York, USA: Dover.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York, USA: Dover Publications.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524.

Halmos, P. R., Moise, E. E. y Piranian, G. (1975). The problem of learning to teach. *The American Mathematical Monthly, 82*(5), 466-577.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 8*, 437-479.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children* (J. Teller, Trad.). Chicago, USA: The University of Chicago Press.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U. y Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Doi: 10.1007/978-3-319-40730-2_1

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2014a). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos* (2da. ed.). México: Trillas-Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Santos-Trigo, M. (2014b). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). New York, USA: Springer.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. En K. Newton (Ed.), *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes* (pp. 31-50). New York, USA: Nova Science Publishers.

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technologies to frame and foster learners' problem-solving experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 189-207). Cham, Switzerland: Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 827-842.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I. y Aguilar-Magallón, D. (2016). Digital technologies and a modelling approach to learn mathematics and develop problem solving competencies. En L. Uden, D. Liberona, y B. Feldmann (Eds.), *Learning Technology*

for Education in Cloud-The Changing Face of Education (pp. 193-206). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-42147-6_17

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática, 4*(2), 16-24.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2010a). *How We think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Its Educational Applications*. New York, USA: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2010b). Reflections of an accidental theorist. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 104-116.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-243). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-12688-3_16

Semanišinová, I., Harminc, M. y Jesenská, M. (2017). Competition aims to develop flexibility in the classroom. En A. Soifer (Ed.), *Competitions for Young Mathematicians, ICME-13 Monographs* (pp. 171-185). Cham, Switzerland: Springer. Doi: 10.1007/978-3-319-56585-9_7

Steinhaus, H. (1964). *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*. New York, USA: Basic Books.

Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría

Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Resumen: Presentamos cómo iniciamos y hemos desarrollado investigaciones en la línea de la argumentación y la prueba en geometría; algunos resultados han sido publicados en la revista *Educación Matemática*. Nuestro ejercicio investigativo ha estado marcado por el estado de la investigación en nuestro país, Colombia, y por el avance de la investigación en las comunidades europea y anglosajona. Los principales aportes investigativos son: una caracterización de la actividad demostrativa que fundamenta nuestro esfuerzo por promover ambientes de aprendizaje en los diferentes niveles educativos, que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la demostración; y una caracterización y tipificación de enunciados de tareas que se proponen con el ánimo de impulsar la actividad demostrativa.

1. INTRODUCCIÓN

En el año 2005, publicamos en la revista *Educación Matemática* el artículo "La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?" (Camargo, Perry y Samper, 2005), en el que plasmamos el proceso y los resultados de una de nuestras primeras aproximaciones investigativas en la línea de argumentación y prueba. Esta línea comenzó a tener gran relevancia en el campo de la educación matemática en la década de los años 90 del siglo XX, pero nuestro respectivo ejercicio investigativo empezó a principios del siglo XXI.

El estudio partió de una inquietud genuina sobre el efecto en la formación de niños y jóvenes colombianos, debido al escaso desarrollo de la geometría en el currículo escolar implementado en la educación básica. Con la Ley General de Educación (Ley 115, 1994), que descentralizó el currículo escolar en Colombia, la mayoría de las instituciones escolares disminuyeron considerablemente las horas destinadas a la enseñanza de las matemáticas, y la enseñanza de la geometría quedó relegada a unas cuantas horas al final del año escolar. Esto limitó la enseñanza a contenidos sobre algunos conceptos geométricos, clasificaciones y fórmulas para calcular perímetro y área de ciertos objetos geométricos, y dejó de lado, casi completamente, la enseñanza de la demostración.

Una convicción que permea nuestro quehacer investigativo es que la geometría euclidiana aporta a la formación de competencias relacionadas con el sentido espacial

y el razonamiento que toda persona debe desarrollar para poder participar autónoma y propositivamente en el progreso social, cultural y tecnológico del país. Como formadoras de profesores de matemáticas para secundaria, hemos asumido como premisa que solo si los futuros profesores de matemáticas desarrollan una visión multifacética y fundamentada de la geometría, podrán promover su enseñanza en la escuela y contribuir a darle el estatus que tenía décadas antes de la promulgación de la Ley General de Educación. Por ello, nos propusimos encarar el problema desde la investigación enmarcada en asuntos propios de la línea de argumentación y prueba.

En la siguiente sección presentamos el contexto investigativo y académico en el que se desarrolló la investigación reportada en el artículo del año 2005, como una manera de ilustrar los inicios de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en Colombia, en la línea de la argumentación y la prueba. Después nos referiremos al interés por fenómenos relacionados con este asunto en la primera década del siglo XXI. Más adelante describiremos cuál ha sido el desarrollo de nuestra perspectiva sobre el tema, gracias a un trabajo sostenido por más de 12 años, y cuáles han sido algunas de las contribuciones más relevantes. Al final expondremos de manera breve algunas consideraciones sobre la proyección de nuestra investigación.

2. CONTEXTO INVESTIGATIVO Y ACADÉMICO DEL ARTÍCULO

En la primera década del siglo XXI, la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se caracterizó por una vigorosa producción académica, gracias a trabajos seminales como los de Fischbein (1982), Balacheff (1987), de Villiers (1990), Duval (1993), Hanna (1995), Schoenfeld (1994) y Harel y Sowder (1996). Desde diferentes perspectivas, se promulgaba la necesidad de transformar las aproximaciones usuales a la enseñanza de la demostración en la escuela, pues privilegiar la formalidad y el rigor producía aprendizajes poco significativos. Se elaboraron planteamientos como los siguientes:

- La enseñanza de la demostración debe estar ligada a la de otros procesos y conceptos matemáticos.
- La enseñanza de la demostración debe considerar la racionalidad de los estudiantes en los diferentes niveles educativos.
- Se deben considerar las formas personales de convencerse o persuadir a otros de la validez de algún enunciado.
- El significado de la demostración se logra cuando uno se involucra en procesos de demostración, y no solo cuando se recibe información acerca de ellos.

Esos planteamientos llevaron a los investigadores a buscar aproximaciones a la enseñanza de la demostración más cercanas al proceso de producir demostraciones

que al ejercicio de comunicar el producto de tal proceso. A su vez, su aprendizaje comenzó a verse ligado al desarrollo de actividad matemática más que a un ejercicio comunicativo.

Acaballado en dos siglos, el principal indicador del creciente interés por fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración fue un sitio web: *Proof Preuve Prueba (International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof)* (http://www.lettredelapreuve.org/), iniciado en 1997 por el investigador francés Nicolas Balacheff. Según Hanna (2000), desde su inicio y hasta el año 2000, este sitio registró más de 5 mil visitas. En aquel entonces publicaba, cada dos meses, artículos y reseñas de libros sobre investigaciones empíricas y teóricas acerca de la demostración. Se destacaba el lugar prominente de la demostración en las matemáticas y en la educación matemática, y se señalaba la necesidad de encontrar formas novedosas para impulsar su aprendizaje y lograr que, gracias a acercamientos más genuinos al quehacer matemático, los estudiantes llegaran a tener una concepción amplia de la demostración.

En la década de los años 90, surgieron grupos de investigación en las universidades colombianas, y la investigación realizada en Estados Unidos y en Inglaterra y otros países europeos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración empezó a influir el ejercicio académico. Por la misma época, varios profesores universitarios comenzaron estudios doctorales en el exterior y en el primer doctorado en Educación con énfasis en Educación Matemática que se creó en Colombia. En el marco de ese doctorado es importante destacar el seminario que el psicólogo y filósofo francés Raymond Duval hizo en la Universidad del Valle (Cali, Colombia), donde presentó ideas contempladas en su libro sobre semiosis y pensamiento humano (Duval, 1999), aceptadas ampliamente en el ámbito europeo; nosotros apenas comenzamos a usarlas a inicios del siglo XXI.

Hacia el año 2002, con el interés de impulsar el aprendizaje de la geometría en el nivel escolar a través de la formación inicial de profesores de matemáticas para secundaria, nuestro naciente equipo de investigación, Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), decidió centrarse en el desarrollo del razonamiento geométrico. Inicialmente consideramos que razonar en geometría consiste en: establecer relaciones entre conceptos o información geométrica conocida; argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación; dar significado a conceptos y procedimientos geométricos; comprender los elementos que conforman una teoría matemática; investigar situaciones geométricas para descubrir relaciones y establecer conjeturas; justificar informal y formalmente una conjetura; y comunicar, de forma convincente, resultados de indagaciones matemáticas.

Para favorecer el desarrollo del razonamiento, en nuestra primera investigación decidimos concentrarnos en el tipo de tareas que se propone a los estudiantes, convencidas de que estas les son determinantes. Dada la definición que establecimos para razonar, clasificamos las tareas según el tipo de proceso matemático al que apuntan: conceptualización, investigación y demostración. Para diseñar tareas que propiciaran la conceptualización, nos guiamos por las ideas de van Hiele (1984) respecto a los

niveles de razonamiento que se ponen en juego durante el proceso de construcción de conocimiento relativo a un concepto, y en los planteamientos de Vinner (1989) sobre la construcción de definiciones. El diseño de tareas de investigación se basó en la propuesta de Balacheff (2000) sobre cómo se puede proceder al investigar en matemáticas. En cuanto a las tareas de demostración, nos apoyamos en la diferenciación que Duval (1999) estableció entre la producción de discursos informales para argumentar y la organización deductiva de proposiciones, definiciones, etc., a partir de una teoría, cuando se construye una justificación para validar una conjetura.

El acercamiento a la literatura especializada, más insumos empíricos obtenidos en experimentos de enseñanza realizados en un curso de geometría plana del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, nos llevaron a profundizar en nuestra concepción de cada proceso involucrado en las tareas. En los siguientes proyectos de investigación decidimos enfocarnos solo en la demostración, pues reconocimos la envergadura de la empresa que teníamos por delante.

Con respecto a la demostración, empezamos a considerarla desde una perspectiva amplia, ligada a la argumentación y con funciones que van más allá de la validación de enunciados. Asumimos los planteamientos de investigadores como de Villiers (1993), quien concibe la demostración como un medio para descubrir, explicar, validar, comunicar y sistematizar resultados. Así, comenzamos a ver la demostración no solo como un producto del razonamiento sino como una actividad que provee comprensión y conocimiento.

En consonancia con esta mirada, comprendimos que las tareas propuestas para favorecer el razonamiento centrado en la demostración debían invitar a: la exploración de relaciones geométricas; la visualización de representaciones figurales para evocar, percibir o descubrir relaciones geométricas; la formulación de conjeturas, su verificación y la justificación de resultados. En el artículo "La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico?" expusimos lo que, en su momento, concebíamos como actividad demostrativa e ilustramos cómo transformar los enunciados de tareas usuales que aparecen en libros universitarios de geometría euclidiana, para favorecer dicha actividad.

3. INTERÉS POR LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN LA PRIMERA DÉCADA DEL SIGLO XXI

Con retraso respecto a otros grupos de investigación europeos y anglosajones, concentramos nuestros estudios investigativos en la actividad demostrativa (en inglés, *proving*), siendo el foco de interés una problemática amplia del desarrollo de prácticas argumentativas. La profundización en la literatura sobre la línea de argumentación y prueba en geometría nos puso en contacto con los trabajos del grupo de investigadores italianos liderado por Paolo Boero, María Bartolini-Bussi y María Alessandra Mariotti (Boero,

2007). Estos, a finales del siglo XX, habían caracterizado la actividad demostrativa desde un punto de vista sociocultural, en la perspectiva de la psicología cultural (Vygotsky, 1978), y reivindicaban el acercamiento a la demostración vía la argumentación. Sus intereses investigativos, cercanos a los nuestros, estaban asociados a la promoción de ambientes de aprendizaje que impulsaran la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, procurando construir un puente para conectar experiencias empíricas de resolución de problemas y descubrimiento de conjeturas con la práctica de justificar y producir demostraciones según las exigencias de una comunidad matemática de referencia.

Una de las hipótesis del grupo italiano, que compartimos, señala la importancia de proponer tareas que favorezcan la exploración dinámica de construcciones geométricas. Lo anterior, en situaciones problema que permitan a los estudiantes transitar suavemente de la argumentación a la demostración, en la medida en que las situaciones desestimulen formas empíricas de validación, como la ostensión, la medida o los argumentos de autoridad, e impulsen una validación apoyada en hechos geométricos. En busca de artefactos de apoyo para la exploración, los investigadores se interesaron, entre otros recursos, en los programas de geometría dinámica que empezaban a tener auge en Europa. Los problemas de construcción geométrica volvieron a ser considerados parte esencial de los currículos escolares y su papel para estimular la actividad demostrativa empezó a ser explotado investigativamente en diferentes ámbitos.

El renovado interés por la actividad demostrativa en geometría se estimuló notablemente, a nivel mundial, con el advenimiento de programas de geometría dinámica. Como señala Laborde (2000), esto se debió principalmente a las oportunidades que estos programas brindan para explorar representaciones geométricas, descubrir propiedades y relaciones geométricas, establecer dependencias entre propiedades, y apoyar la búsqueda de hechos geométricos para justificar los hallazgos.

Tal fue el interés académico que despertó este movimiento en los currículos escolares de diversos países, que se comenzó a señalar la necesidad de exponer a los estudiantes, desde temprana edad, a la actividad demostrativa. En contraste con orientaciones curriculares previas, el estatus de la demostración a nivel escolar se elevó considerablemente. Por ejemplo, en *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), de gran influencia en Colombia, se hacen las siguientes recomendaciones sobre lo que los estudiantes deben lograr a lo largo de su educación primaria y secundaria:

- reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas;
- formular e investigar conjeturas matemáticas;
- desarrollar y evaluar argumentos matemáticos;
- seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de demostrar. (p. 56)

Paradójicamente, la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría también se vio estimulada por una preocupación creciente

en los ámbitos académicos: el peligro que podría ocasionar el uso de la geometría dinámica para la demostración en matemáticas. Los investigadores se preguntaban si la práctica de demostrar se acabaría al disponer de maneras para verificar relaciones geométricas con alta certeza. El tiempo ha mostrado que cada vez es mayor el número de investigadores que han obtenido evidencias del potencial de la demostración en la comprensión matemática (Laborde, 2000), respecto de los que defienden que en el trabajo matemático siguen siendo igualmente fundamentales la formulación de conjeturas y el desarrollo de demostraciones (Alibert y Thomas, 2002; Reid y Knipping, 2010; Stylianides, Bieda y Morselli, 2016). También, ahora son más los profesores que a nivel escolar intentan impulsar en sus aulas la conformación de comunidades de indagación (Forman, 1996; Goos, 2004), donde la actividad de descubrimiento, con su lógica inherente, se acompaña de la actividad de justificación, con sus formas de validación deductiva. En el marco de estas discusiones, nuestro equipo de investigación ha seguido avanzando en el diseño de tareas, en la caracterización de la actividad demostrativa, y en las formas de promoverla con estudiantes de diversos niveles educativos.

4. EVOLUCIÓN DE NUESTRA PERSPECTIVA SOBRE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Nuestro artículo del año 2005 fue resultado del proyecto de investigación *Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas* (DMA 016-03),[1] desarrollado en 2003 y 2004. Tuvo como escenario experimental un curso de geometría plana del programa de formación de profesores de matemáticas para secundaria, con la intención de obtener resultados que pudieran impactar la educación geométrica escolar. Como ya lo mencionamos, teníamos como premisa que, para impulsar la actividad matemática en el aula, los cambios en los ambientes escolares requieren formar al profesor de modo diferente a como se hacía.

Caracterizamos el diseño investigativo como un experimento de enseñanza; recogimos evidencias del papel de la geometría dinámica para apoyar la actividad demostrativa y el tipo de tareas que la incentivan. En los registros del trabajo de los estudiantes fueron notorias la autonomía, la riqueza de exploraciones y la seguridad en las conjeturas formuladas, condiciones promovidas por el uso de herramientas que brindan los programas de geometría dinámica. Tales herramientas permiten identificar dependencias entre atributos geométricos y determinar las relaciones de necesariedad o suficiencia de estos, acciones estas que posibilitan la adecuada enunciación de las respectivas proposiciones condicionales.

Como uno de los productos de la investigación, propusimos nuestra primera conceptualización de actividad demostrativa, considerando la argumentación como telón de fondo:

[1] Realizado con apoyo financiero del Centro de Investigaciones (CIUP) y del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

> Entendemos que en la actividad demostrativa se combinan dos aspectos estrechamente relacionados: el proceso y el producto. El proceso incluye acciones propias de la heurística, como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, siempre y cuando movilicen el razonamiento hacia la búsqueda de validación, den significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y provean los elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones. El aspecto producto incluye acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones formales. (Camargo *et al.,* 2005, p. 56)

Vista en retrospectiva, después de más de una década de ejercicio investigativo continuo acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, vemos que la definición de actividad demostrativa que propusimos es poco clara, por varias razones:

1. Separa la actividad demostrativa en dos "aspectos" no claramente definidos como actividades: el proceso y el producto. Al primero lo asociamos, en su momento, principalmente con movilizar el razonamiento hacia la validación, con procesos heurísticos tales como la exploración, el análisis y la verificación. Al segundo lo relacionamos con la movilización de la argumentación, únicamente vinculada a la formulación del producto de la actividad (una explicación, una prueba o una demostración), sin alguna injerencia de la heurística.
2. Considera para el primer "aspecto" procesos y acciones sin establecer diferencias. Por ejemplo, incluye la visualización como una acción heurística, sin reconocerla como un proceso de mayor envergadura que abarca diversas acciones heurísticas y no necesariamente está ligado a la actividad demostrativa.
3. Reduce el "aspecto proceso" a acciones heurísticas que movilizan "el razonamiento hacia la búsqueda de validación", desatendiendo el proceso mismo de conjeturación.
4. Omite la conceptualización de razonamiento y argumentación y, en especial, el establecimiento de la relación de tales procesos con la actividad demostrativa. Como señala Balacheff (2002), es necesaria la explicitación de la idea de demostración y de actividad demostrativa que tienen quienes investigan algún asunto relacionado con el tema, para evitar confusiones conceptuales y dificultades en la comunicación de los hallazgos investigativos.

Sucesivos proyectos de investigación, realizados en el programa de formación de profesores de matemáticas para secundaria y con profesores de instituciones educativas de educación básica secundaria y media en Colombia, nos llevaron a revisar varias veces la conceptualización de actividad demostrativa y a ampliar nuestra perspectiva, combinando análisis cognitivos con otros orientados por una perspectiva sociocultural.

Un segundo producto de la investigación reportada en el artículo del año 2005 es una caracterización del efecto, en la actividad demostrativa, del enunciado modificado

de tareas propuestas en la clase de geometría. Para ello, propusimos tres modificaciones del enunciado de un problema sugerido en un libro de geometría, en busca de impulsar lo que llamábamos acciones de tipo heurístico, como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar. En el artículo reportamos que los enunciados dieron lugar a diferentes formas de actuar de los estudiantes, relacionadas con la actividad demostrativa, apoyando nuestra hipótesis de que es posible dar a la demostración un papel protagónico en la clase de geometría, si los estudiantes se involucran en tal actividad.

A continuación, exponemos nuestros avances investigativos en relación con el tema, desde el año 2005 hasta ahora. Nos referimos a nuestra conceptualización de actividad demostrativa, a la aproximación sociocultural a la actividad demostrativa, al proceso de conjeturación, a cerrar la brecha entre el mundo empírico y el mundo teórico, y al papel de los enunciados de las tareas para favorecer la actividad demostrativa.

4.1. Sobre la actividad demostrativa

La última definición de actividad demostrativa que hemos propuesto es la siguiente:

> La *actividad demostrativa* involucra los procesos de conjeturación y justificación, relacionados entre sí por el hecho de que se justifica lo que se conjetura. El proceso de *conjeturación* tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto. Sin embargo, tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual las conjeturas son candidatas para la realización de un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado. Son acciones propias de este proceso: detectar un invariante y verificarlo siempre que surjan elementos de incertidumbre, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general, un hecho matemático que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura, y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles. El proceso de *justificación* tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento (e. g., creencias, representaciones gráficas, sistema teórico). En este proceso es posible reconocer tres acciones: seleccionar entre elementos identificados, teóricos o empíricos, aquellos que podrían sustentar la afirmación; organizar esos elementos de manera deductiva; formular la justificación. (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013, pp. 15-16)

Esta definición presenta varios cambios notorios. En primer lugar, destacamos dos procesos, cada uno de los cuales tiene su propio producto (una conjetura o una justificación, respectivamente). En segundo lugar, establecemos un vínculo explícito entre los dos procesos, al señalar que se espera justificar lo que se conjetura; así, queda más evidente que la actividad demostrativa es integradora. En tercer lugar, la nueva definición aporta elementos para guiar de forma más clara las tareas que se pueden proponer para favorecer la actividad demostrativa. Adicionalmente, esta reconceptualización aclara el papel de dos procesos –de índole heurística– que apoyan la conjeturación y la justificación: la visualización y la exploración. Además, diferenciamos la exploración empírica de la exploración teórica:

> Mediante la *visualización* se consigue información geométrica de una figura ya sea identificando los elementos que la componen y algunas configuraciones que se pueden formar o interpretando símbolos que representan propiedades geométricas, con el ánimo de encontrar relaciones geométricas subyacentes. Requiere establecer nexos entre la figura y el saber previo para identificar, aislar y enfocar elementos de interés por medio de la vista, detectar o descubrir propiedades que inicialmente pasan inadvertidas, o evocar propiedades geométricas. (Perry *et al.,* 2013, p. 16)
>
> Mediante la *exploración*, realizada en el mundo de los fenómenos y/o en el mundo de la teoría, se buscan regularidades (propiedades o relaciones geométricas). En el mundo de los fenómenos, la exploración recae sobre representaciones (gráficas y materiales) de figuras geométricas y tiene un carácter empírico. Puede llevarse a cabo tomando medidas, calculando o haciendo construcciones (auxiliares, para enriquecer la figura; de referencia, para comparar; de casos, para llegar a un resultado por ensayo y error). Nos referimos entonces a una *exploración empírica*. Cuando esta se lleva a cabo en un entorno dinámico, es decir, uno en el que las representaciones son susceptibles de movimiento, la denominamos *exploración dinámica* y su objetivo es detectar invariantes. En el mundo de la teoría, la exploración recae sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. La designamos *exploración teórica* y se lleva a cabo con el propósito de reconocer o encontrar enunciados que permitan justificar una afirmación o tomar decisiones sobre hacia dónde dirigir la exploración empírica. (Perry *et al.,* 2013, pp. 16-17)

La actividad demostrativa forma un entramado con el razonamiento y con la argumentación, pues no se da sin razonamiento que movilice las ideas y acciones, ni sin la argumentación asociada. Esta consideración nos llevó a revisar nuestras ideas de razonamiento y argumentación, y a hacerlas explícitas:

> Razonar matemáticamente es conectar, atendiendo reglas de la disciplina, experiencias y saberes, enraizados en ella, con el propósito de indagar, obtener nueva información, interpretar información, explicar, determinar una manera de proceder,

> formular dudas, contradecir, refutar, concluir, etc. El *razonamiento matemático* es el producto de razonar matemáticamente. (Perry *et al.,* 2013, p. 17)
>
> Por *argumentación* entendemos la formulación de argumentos para apoyar una idea. Un *argumento* es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una general (garantía). Las proposiciones podrían no estar todas explícitas, pero debería ser posible identificarlas en un esfuerzo por formalizar lo expresado. (Perry *et al.,* 2013, p. 17)

4.2. Sobre la aproximación sociocultural a la actividad demostrativa

Reiteramos que los programas de geometría dinámica en sí mismos son poderosas herramientas de reorganización cognitiva, y tenemos el convencimiento, cada vez más hondo, de que su provecho para promover la actividad demostrativa se aumenta notablemente si su uso se acompaña de tareas apropiadas y de la generación de un entorno de interacción social que impulse la comunicación de exploraciones, descubrimientos y justificaciones (Samper, Perry, Camargo y Ruiz, 2006). Este reconocimiento nos llevó a enfocar la atención en la búsqueda de ambientes de aprendizaje favorables a la actividad demostrativa, desde el punto de vista sociocultural.

A finales del siglo XX, la aproximación sociocultural al aprendizaje empezó a influir la investigación en educación matemática (Lerman, 2006). Con mayor frecuencia, se empezó a señalar que el conocimiento se origina en la interacción social, y por tanto los roles de la cultura, las prácticas sociales y los valores son centrales y no secundarios en la construcción de conocimiento. Una de las corrientes de esta aproximación es la psicología cultural (Vygotsky, 1978), en la que tienen cabida estudios sobre el papel de la interacción social, las comunidades de práctica y la mediación semiótica en el aprendizaje. En esta corriente ubicamos nuestro trabajo actual sobre la actividad demostrativa, indudablemente influenciado por los estudios de investigadores como Yackel y Cobb (1996), Mariotti (2000; 2009), Stylianides *et al.* (2016) y Pedemonte (2018).

Uno de nuestros retos consiste en planear, implementar y evaluar secuencias de enseñanza en las que, coherentes con el enfoque sociocultural, promovamos la participación de estudiantes de cualquier nivel educativo, incluso primaria, en la empresa de conformar colectivamente un sistema teórico local para la geometría euclidiana. Tal participación consiste en involucrarse en la actividad demostrativa de manera genuina (i. e., con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa conjunta), autónoma (i. e., con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independiente de los otros como autoridad), y relevante (i. e., con aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos).

Por sistema teórico local entendemos un conjunto lógicamente estructurado de afirmaciones sobre los objetos involucrados, las cuales se diferencian unas de otras por su estatus teórico. Los postulados son afirmaciones básicas aceptadas como verdade-

ras, sin que ello signifique que tengan carácter universal; las definiciones caracterizan los objetos geométricos involucrados; y los teoremas son afirmaciones deducidas de las definiciones, los postulados y otros teoremas del sistema (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, 2012).

Teniendo como foco la conformación de comunidades de práctica de indagación (Forman, 1996; Goos, 2004) conducentes a la actividad demostrativa, hemos avanzado en la creación de vías productivas para gestionar en las clases las tensiones que varios investigadores (e. g., Mariotti, 2000) señalan como existentes entre la argumentación propia de las actividades de carácter empírico y la argumentación propia de la justificación, y entre conocimiento geométrico empírico y conocimiento geométrico teórico. El proceso de conformación de comunidades de práctica es lento; demanda modificar la cultura de las aulas con los retos de: promover ambientes de resolución de problemas que movilicen el conocimiento de los estudiantes, impulsarlos para que se responsabilicen de la verdad de las afirmaciones que formulan, y promover la generación de mecanismos para validar enunciados socialmente, en consonancia con las formas institucionales de validación matemática.

Los desarrollos investigativos de nuestro equipo de investigación se han movido entre determinar aproximaciones metodológicas socioculturales para favorecer el aprendizaje de la geometría –donde los roles del profesor y de artefactos mediadores son centrales– e identificar los retos que impone la comprensión de la actividad demostrativa. Estos avances nos han impulsado a buscar mecanismos didácticos para favorecer el establecimiento de conexiones entre: *(i)* la actividad experimental sobre construcciones geométricas realizadas en un ambiente de geometría dinámica, *(ii)* la actividad comunicativa de argumentación para exponer descubrimientos y persuadir a otros sobre la certeza de estos, y *(iii)* el reconocimiento de que las propiedades de objetos geométricos son consecuencia lógica del sistema teórico en el que son conceptualizados.

Acerca de este último interés, determinamos un posible uso de los programas de geometría dinámica, en el marco de la resolución de problemas de conjeturación, para comprender el valor epistémico de "necesidad lógica" referida en las proposiciones geométricas, y la importancia de este reconocimiento en relación con el valor lógico de "verdad". A partir de proponer construcciones geométricas cuyos pasos puedan justificarse con elementos del sistema teórico que se está conformando, intentamos que nuestros estudiantes identifiquen la estructura operatoria de una demostración y el papel de las demostraciones en la construcción de conocimiento geométrico. Además, caracterizamos el rol de la geometría dinámica en el reconocimiento de la condicionalidad lógica para producir demostraciones en el marco de un sistema teórico, identificando aspectos que influyen en la formulación de proposiciones condicionales por parte de los estudiantes (Samper, Perry, Camargo y Molina, 2012).

4.3. Sobre el proceso de conjeturación

Además de centrar la atención en el proceso de justificación, en la última década también nos hemos ocupado a fondo del proceso de conjeturación. Este ha cobrado importancia en el ámbito de la educación matemática en el currículo escolar colombiano, a raíz del cambio de foco de los contenidos hacia la actividad matemática. Hace casi 20 años se invitó a los profesores a hacer de las clases ámbitos de descubrimiento y justificación. Infortunadamente, las propuestas curriculares en Colombia no se acompañan de procesos masivos de formación de profesores y de trabajo investigativo suficientemente consolidado para que su puesta en práctica tenga los efectos deseados.

En un ejercicio investigativo reciente, documentamos el proceso mediante el cual las conjeturas producidas por estudiantes de un curso de geometría plana de nivel universitario, cuando resuelven problemas geométricos, fueron usadas por el profesor, miembro del equipo de investigación, para organizar el contenido temático y el desarrollo de la enseñanza. Disponer de un programa de geometría dinámica como apoyo para la exploración permite que los estudiantes hagan aportes valiosos que influencian las decisiones del profesor y determinan la interacción de los miembros de la clase (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014; Camargo, Perry, Samper, Molina y Sáenz-Ludlow, 2015). Para el análisis, tomamos como referente conceptual la propuesta de Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), optamos por una aproximación semiótica al proceso de conjeturación y analizamos el tipo de signos que producen los estudiantes, en el marco de la actividad demostrativa, para resolver un problema y formular una conjetura.

Observamos que en la medida en que el profesor abre un espacio para que los estudiantes comuniquen sus interpretaciones, puede promover acciones pertinentes para que ellos logren la evolución de significado de los objetos matemáticos en juego hacia el que tiene la comunidad de discurso matemático de referencia. Vimos la pertinencia de conceptualizar lo que denominamos el "objeto dinámico didáctico" del profesor, para dar cuenta y razón de sus decisiones didácticas encaminadas a mediar la construcción de significado sobre aspectos específicos propios del objeto real matemático.

Lo anterior nos llevó a proponer una caracterización de mediación semiótica (Molina, Perry, Camargo y Samper, 2015), distinta a la propuesta por Mariotti (2009). De un lado, esta investigadora hace un acercamiento general a la construcción de significado matemático derivada de acciones realizadas con artefactos que tienen potencial semiótico, y no profundiza en la construcción de significado propia de objetos geométricos específicos; de otro lado, ella basa su análisis en producciones escritas de los estudiantes que reportan su actividad con el artefacto, mientras que nosotros hacemos el análisis de la construcción de significado *in situ*.

Al estudiar la actividad semiótica colectiva en el aula, relacionada con el proceso de conjeturación en la actividad demostrativa, identificamos elementos que deberían considerarse para apoyar el aprendizaje; por ejemplo, la importancia de dedicar tiempo de la clase a analizar las interpretaciones de los estudiantes acerca de los objetos y relaciones

matemáticas en juego, incluso en detrimento del número de temas que se aborden en el curso, y el tratamiento cuidadoso para favorecer la construcción de significado de las justificaciones de teoremas que aluden a la existencia de los objetos geométricos. Lo anterior, para evitar que se produzcan errores como el de tomar al azar un objeto y luego forzarlo para que satisfaga condiciones que se necesitan (en inglés, *Randomly Choose an object and then Force it to satisfy the needed Properties* [RCFP]), reportado en Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina (2016).

4.4. Sobre la brecha entre el mundo empírico y el mundo teórico

La investigación descrita en los párrafos precedentes consolida, adicionalmente, un aporte sobre un asunto que hemos estudiado hace más de una década: la búsqueda de alternativas de enseñanza para cerrar la brecha entre el mundo empírico y el mundo teórico de la geometría. Se prefigura una instancia intermedia entre ambos mundos, en la cual los procedimientos empíricos que reportan los estudiantes, ya sea para representar la situación geométrica descrita en un problema de conjeturación o para explorar dicha situación, los justifican teóricamente. Esto parece constituir un puente entre los dos mundos, que favorece la construcción de significados. Esta hipótesis de trabajo la hemos puesto en juego en la dirección de tesis de maestría de profesores de matemáticas en ejercicio –de educación básica primaria y secundaria–, para impulsar el acercamiento temprano al mundo teórico de la geometría, con tareas cuidadosamente diseñadas y con una gestión del profesor encaminada a una actividad semiótica rica en la que se promueve el aprendizaje significativo.

4.5. Sobre el papel de los enunciados de las tareas en la actividad demostrativa

El ejercicio investigativo de nuestro equipo comenzó con el interés de proponer en clase tareas que estimularan el razonamiento y posteriormente impulsaran la actividad demostrativa. Este interés ha estado presente en los diversos proyectos de investigación que hemos adelantado y sigue siendo uno de los motores de nuestra actividad académica.

Las reflexiones acerca de las tareas y su papel en la actividad demostrativa, alimentadas por la fundamentación teórica alcanzada y discusiones permanentes sostenidas por el equipo de investigación, nos han permitido avanzar en dos asuntos. En el año 2009, propusimos una tipificación de posibles tareas que permitieran a los profesores universitarios introducir cambios en sus clases, usualmente centradas en proporcionar matemáticas prefabricadas a sus estudiantes, para involucrarlos de manera genuina en la consolidación colectiva de un sistema teórico (Perry, Camargo, Samper, Molina y Echeverry, 2009). Cuatro años más tarde, en 2013, propusimos una clasificación de

enunciados de tareas para problemas abiertos de conjeturación, resueltos con el apoyo de un programa de geometría dinámica, que exigen formular una conjetura y expresarla como un enunciado condicional (Samper, Molina, Camargo, Perry y Plazas, 2013). El enunciado de las tareas determina el foco de la búsqueda, dando lugar a la siguiente clasificación:

- *Problemas de búsqueda del consecuente.* Dadas las condiciones suficientes, hallar las consecuencias necesarias de estas. En estos problemas, la representación gráfica de la situación descrita en el enunciado consiste en la construcción de objetos que cumplen las condiciones dadas; la búsqueda de invariantes (reportados en el consecuente) se hace mediante la exploración directa de la representación.
- *Problemas de búsqueda de antecedente.* Hallar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria. Resolver estos problemas exige no solo representar gráficamente los objetos mencionados en el enunciado, sino también realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas suficientes para determinar, mediante la exploración, las propiedades de un objeto existente o las que aseguren la existencia de un objeto (que se deben reportar en el antecedente).
- *Problemas de determinación de dependencia.* Dado un conjunto referencial de figuras geométricas y unas propiedades, establecer dependencias entre "tipos de figuras del conjunto referencial" y las "propiedades dadas". Hay libertad de decidir si el conjunto referencial o las propiedades son el antecedente de la conjetura; en ese momento se convierte en uno de los tipos de problema ya descritos.

Recientemente, a partir del interés en la semiosis relacionada con la actividad demostrativa, nos hemos enfocado en la mediación semiótica ejercida por los enunciados de tareas cuando los estudiantes las resuelven con la mínima ayuda del profesor. Queremos alertar sobre la necesidad de tomar decisiones informadas respecto a los enunciados de las tareas, decisiones que consideren la viabilidad de la generación de interpretaciones útiles para la interacción del estudiante con el profesor y sus compañeros, y eviten trabas innecesarias que podrían obstaculizar la construcción colectiva de significados y la actividad demostrativa.

5. PROYECCIÓN INVESTIGATIVA

El recorrido por nuestro ejercicio investigativo nos ha permitido reconocer la productiva utilidad de las perspectivas individuales y socioculturales para impulsar la actividad demostrativa en sus diversas aristas. Esta permite que tanto niños como jóvenes experimenten personalmente el ejercicio de suponer una vía para resolver un problema,

experimentarla, verificar propiedades y construir justificaciones para asegurar que su propuesta es válida (Camargo y Sandoval, 2017).

El siguiente planteamiento formulado por Hanna en 1995 aún sigue vigente, pese a innumerables esfuerzos investigativos hechos en diferentes latitudes: "El reto más importante para los educadores matemáticos en el contexto de la demostración es destacar su rol en la clase, encontrando formas más eficaces de usarla como un vehículo para promover la comprensión matemática" (p. 42).

Hemos querido difundir nuestras propuestas investigativas en diversas aulas escolares y universitarias, para generar ambientes de enseñanza y aprendizaje que propicien la actividad demostrativa en comunidades de indagación. Sin embargo, nuestros esfuerzos en ese sentido se han visto empañados por la poca experticia de los profesores para gestionar un ambiente de diálogo y participación genuina, donde los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar discursos claros y completos, disentir, objetar y ser escuchados por sus compañeros. Generalmente presentan ideas sueltas, muchas veces escuchadas e interpretadas solo por el profesor, quien parafrasea y acomoda lo dicho según sus intereses. Así las cosas, es muy poco probable que se produzca la construcción colectiva de significado y se desarrollen prácticas argumentativas socialmente constituidas.

Actualmente, nuestro equipo de investigación tiene la pretensión de atender con especial énfasis dos problemáticas de la educación básica primaria y secundaria, detectadas en nuestro ejercicio investigativo.

- Por una parte, las ideas de los estudiantes comúnmente no se usan como impulsoras de la construcción de conocimiento, hecho asociado a la mínima atención que les prestan los profesores, el poco interés de promover la interacción académica entre estudiantes, y la persistencia del conocido patrón de interacción pregunta-respuesta-evaluación.
- Por otra, usualmente no se promueve la producción de discursos coherentes en la clase para explicar, argumentar y justificar las propuestas de solución que aportan los estudiantes.

Esperamos impulsar esfuerzos investigativos que llamen la atención frente a este hecho, ahonden en la problemática y propongan alternativas para modificar el estado de cosas. De esta forma, la educación matemática contribuirá a la formación de nuevas generaciones que aprendan a escuchar, a negociar sus ideas y a valorar la argumentación razonada.

REFERENCIAS

Alibert, D. y Thomas, M. (2002). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). New York, USA: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (P. Gómez y Á. Pinilla, Trads.). Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof. En F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding proof and proving to understand* (pp. 23-44). Taipei, Taiwan: NSC y NTNU.

Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Camargo, L. y Sandoval, I. (2017). Acceso equitativo al razonamiento científico mediante la tecnología. *Revista Colombiana de Educación,* 73, 179-211.

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Revista Educación Matemática, 17*(3), 53-76.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, Ó. y Sáenz-Ludlow, A. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 99-116.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x,* 31, 37-61.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18, 24.

Forman, E. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: Implications of sociocultural theory for educational reform. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115-129). Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1, 2, 3), 5-23.

Harel, G. y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 59-65). Valencia, España: Universitat de València.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1, 2, 3), 151-161.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 347-366). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ley 115 (1984). Ley General de Educación. *Diario Oficial No. 41.214*, Colombia, 8 de febrero de 1994.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1, 2, 3), 25-53.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema de Localización de Puntos. *Educación Matemática, 27*(2), 37-66.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, USA: Autor.

Pedemonte, B. (2018). How can a teacher support students in constructing a proof? En A. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2009). Pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 130-135). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 4, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon, 29*(3), No. 82, 41-56.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*.

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de

conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (2012). Un ejemplo de articulación de la lógica y la geometría dinámica en un curso de geometría plana. *Tecné, Episteme y Didaxis-TED, 32,* 125-139.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Ruiz, M. (2006). ¿Apoya Cabri la práctica de justificación? *Epsilon,* 66, 395-410.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 35-50.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal for Mathematical Behaviour, 13*(1), 55-80.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Van Hiele, P. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. En D. Fuys (Ed.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele.* New York, USA: Brookling College School Education.

Villiers, M. de (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Villiers, M. de (1993). El papel y las funciones de la demostración en matemáticas. *Epsilon,* 26, 15-30.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1, 2), 149-156.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society, the development of higher psychological processes.* Harvard, USA: Harvard University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos

Carmen Batanero
Universidad de Granada, España

Resumen: En este capítulo se reflexiona sobre las circunstancias y razones que llevaron a nuestra propuesta de que el análisis de datos, además de ser un instrumento indispensable en la investigación didáctica, debiera también ser un objeto propio de estudio de la Educación Matemática. Se describe el estado de la investigación en análisis inferencial de datos en el momento de la publicación del artículo que sirve de base a este texto. Así mismo, se analizan las diferentes acciones que colaboraron a lo largo de estos 25 años a la evolución y desarrollo actual de la investigación sobre el análisis de datos, señalando mi aportación personal a este desarrollo. Se finaliza con algunas reflexiones y sugerencias para orientar la investigación futura sobre el tema, llamando también la atención sobre algunas confusiones que pueden ser transmitidas al estudiante en algunas aproximaciones informales a la inferencia.

1. INTRODUCCIÓN

Hace 25 años escribí, junto con mis compañeros, el artículo "El análisis de datos como útil y objeto de la didáctica de la matemática" (Batanero, Godino y Vallecillos, 1992). Hoy, me sirve de apoyo para reflexionar sobre la evolución de la investigación centrada en el análisis inferencial de datos y de mi propia trayectoria investigadora, con motivo del 30 aniversario de la revista *Educación Matemática*.

El artículo mencionado tenía la finalidad de resaltar que el empleo de la inferencia estadística como herramienta en las ciencias sociales en general, y en particular en la educación matemática, era un objeto específico para la investigación en este campo, debido tanto a la dificultad de los conceptos relacionados con el análisis de datos en educación y otras disciplinas, como a los procesos didácticos implicados en la colaboración entre el investigador y el analista de datos, por lo que merecerían ser estudiados desde la educación matemática.

Mirando hacia atrás y recordando aquella época llena de ilusiones, pero también con escasez de medios para la investigación y las limitaciones de una persona proveniente de otro campo científico (la estadística), he sido testigo de la impresionante evolución de la educación matemática como disciplina científica en España e Iberoamérica. Al mismo tiempo, he asistido y he podido contribuir al nacimiento y desarrollo de la educación estadística.

Sirva esta reflexión para recordar también a mi compañera Angustias Vallecillos, coautora de aquel artículo y de muchos otros sobre análisis de datos. Posiblemente, las lecturas que juntas realizamos para fundamentar su tesis doctoral que dirigí (Vallecillos, 1994) fueron el germen que nos llevó a reconocer la importancia del análisis inferencial de datos, no sólo como un instrumento necesario para la obtención de conclusiones en la investigación en educación matemática, sino también como un tema prioritario de investigación dentro de la misma, pero que estaba olvidado en aquella época.

Considerando las sugerencias recibidas en la amable invitación para contribuir en esta publicación especial, a continuación describo el contexto en que se elaboró el artículo, el posible interés que el tema tenía –al menos para nosotros– en aquel momento, la evolución de la investigación sobre la inferencia estadística y la de nuestro propio trabajo. Finalizo con algunas recomendaciones para orientar la investigación futura.

2. EL CONTEXTO DEL ARTÍCULO

Con mi incorporación al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en 1988 para colaborar en la organización de un programa de doctorado específico, me responsabilicé de los cursos de carácter metodológico, entre ellos dos de análisis de datos en educación matemática. En los siguientes años impartí cursos similares en otros programas de doctorado que se estaban iniciando en varias universidades o en otras ramas de la educación, algunos de cuyos estudiantes no habían cursado previamente estudios sobre inferencia estadística, pues provenían de licenciaturas en ciencias humanas. La búsqueda de ejemplos sencillos para mostrarles, de forma comprensible, los principales métodos estadísticos y su aplicación en sus respectivos campos, me hizo consciente de la dificultad de enseñar este tema a personas de formación tan variada y su necesidad de adquirir una comprensión suficiente de las técnicas estadísticas para interpretar los artículos de investigación en las revistas científicas de su especialidad y para realizar sus investigaciones.

Por otro lado, la tarea de dirigir algunas tesis en el programa de doctorado de Didáctica de la Matemática me llevó a crear el primer curso de didáctica de la estadística, y a organizar la investigación de mis doctorandos alrededor de este tema. Puesto que varios de ellos también eran o habían sido profesores de estadística a nivel universitario, realizaron sus investigaciones sobre temas de estadística enseñados en la universidad, en los que tenían un interés especial pues deseaban mejorar su propia labor docente y la comprensión de sus estudiantes.

La dirección de tesis también me obligó a realizar una búsqueda sistemática de antecedentes de investigación en educación estadística, que en aquel momento se estaba iniciando y se desarrollaba casi por completo fuera de la educación matemática. En 1982, gracias al apoyo del Instituto Internacional de Estadística se organizó por primera vez el congreso ICOTS (International Conference on Teaching Statistics), que posterior-

mente se ha venido celebrando cada cuatro años (Vere-Jones, 1991). En 1991 se creó la International Association for Statistical Education (IASE), que desde entonces organiza los congresos ICOTS, así como otros de menor tamaño pero también importantes sobre educación estadística. La finalidad inicial de estas actividades fue impulsar la mejora de la enseñanza de la estadística y discutir nuevos desarrollos de materiales didácticos y software. Poco a poco se fue introduciendo la investigación de tipo didáctico, que ha tenido una presencia cada vez más importante dentro de estos congresos.

De hecho, las investigaciones recogidas en el primer trabajo de síntesis sobre estadística –publicado en un libro internacional de investigación en educación matemática (Shaughnessy, 1992)– en su mayor parte se centraron en la didáctica de la probabilidad; la investigación reseñada sobre estadística se limitó a temas muy elementales, como los gráficos estadísticos o las medidas de posición central. En colaboración con investigadores ingleses, preparamos nuestra propia síntesis de la investigación, integrando temas más avanzados como las tablas de contingencia, la correlación y la inferencia (Batanero, Godino, Vallecillos, Green y Holmes, 1994). Aunque posteriores trabajos (Garfield y Ben-Zvi, 2007; Shaughnessy, 2007; Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996) consideraron la estadística con mayor amplitud, se enfocaban preferentemente en la enseñanza no universitaria. Los marcos teóricos usuales dentro de la educación matemática apenas se tenían en cuenta; estaban fundamentados principalmente en marcos teóricos desarrollados en el campo de la psicología, tanto en la psicología del desarrollo como en la psicología del razonamiento. Sin embargo, hubo interés desde los años 50 por la estadística y la probabilidad. Destacaron los trabajos de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), a partir de los cuales hubo un programa de investigación muy amplio sobre el razonamiento probabilístico de los niños, que ha continuado hasta nuestros días.

Otra razón del interés por la estadística proviene del análisis de la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre, que incidentalmente llevó a estudiar las ideas y estrategias intuitivas de profesionales diversos ante problemas de probabilidad, muestreo o correlación, entre otros conceptos. Ejemplo de estas investigaciones fue el programa de investigación sobre heurísticas y sesgos, algunos de cuyos resultados se resumieron en Kahneman, Slovic y Tversky (1982), y cuyas repercusiones en la investigación sobre toma de decisiones se discuten en Gigerenzer y Gaissmaier (2011). Como resultado, se llegó a la conclusión de que la persona no es un estadístico intuitivo, sino que cae en sesgos y utiliza ideas preconcebidas en la toma de decisiones bajo incertidumbre. Kahneman *et al.* (1982) describen heurísticas o reglas de conducta inconscientes, que hacen prescindir parcialmente de información relevante y reducen tareas complejas de probabilidad a problemas más simples. Dichas heurísticas funcionan bien en muchas ocasiones, pero en otras llevan a sesgos sistemáticos en los resultados, y no sólo aparecen en estudiantes sino incluso en personas de amplia formación estadística.

La difusión de los resultados de las investigaciones sobre los sesgos en que incurren los adultos en la toma de decisiones bajo incertidumbre provocó que progresivamente los educadores se interesaran por investigar la posible influencia de la enseñanza de la

estadística para la superación de los sesgos descritos. Personalmente contribuí al inicio de grupos de trabajo sobre educación estadística, que reunieron cada vez más investigadores interesados en estos temas en congresos internacionales, como los de PME (Psychology of Mathematics Education), CERME (Conferences of the European Society for Research in Mathematics Education) e ICME (International Congress on Mathematics Education), entre otros. Igualmente, junto con Flavia Jolliffe pusimos en marcha la revista *Statistics Education Research Journal,* en 2001, de la cual fuimos coeditoras los dos primeros años, con el objetivo específico de impulsar la investigación relacionada. Estas actividades han llevado hoy día a la educación estadística a estar en igualdad de condiciones con otras ramas de investigación en educación matemática.

3. POR QUÉ EL INTERÉS EN EL ANÁLISIS INFERENCIAL DE DATOS

El análisis de los antecedentes de investigación sobre inferencia, realizado como parte de varias tesis doctorales elaboradas en nuestro departamento, nos reveló toda una corriente de investigadores en el campo de la psicología que alertaban sobre la falta de comprensión o el mal uso de la inferencia en diferentes campos disciplinares, especialmente del contraste de hipótesis (p. ej. Falk, 1986; Morrison y Henkel, 1970; Pollard y Richardson, 1987).

Diferentes autores, además, evidenciaban una contradicción en la política editorial de muchas revistas científicas: mientras se exigía, por un lado, incluir contrastes de hipótesis en los artículos aceptados para publicación, a la vez la interpretación que se hacía de sus resultados era sesgada o incorrecta (p. ej. Menon, 1993 o Levin, 1988). La polémica era tan fuerte, que incluso la American Psychological Association nombró un comité para estudiar el uso de la estadística dentro de las publicaciones en revistas de psicología. Años después, este comité publicó un artículo (Wilkinson *et al.,* 1999) sugiriendo cambios sustanciales en la metodología, tales como incorporar la estimación de intervalos de confianza o la magnitud de los efectos, junto con los contrastes de hipótesis en los artículos de investigación.

Descubrir la extensión de los errores en su aplicación nos llevó a indagar sobre la problemática filosófica asociada con la inferencia estadística, así como sobre el debate existente entre las diferentes escuelas de inferencia (Rivadulla, 1991; Seidenfeld, 1979), desde el origen de la creación de estos métodos. Yates (1951), por ejemplo, sugirió que los científicos dedicaban demasiada atención al resultado de sus contrastes de hipótesis, olvidando la estimación de la magnitud de los efectos que investigaban. Posteriormente, encontramos también razones de tipo psicológico para la persistencia de los errores (Gigerenzer, 1993).

Tales hallazgos produjeron en nosotros un gran impacto al descubrir que no sabíamos tanto de inferencia como suponíamos; nos faltaban las bases filosóficas, históricas y psicológicas para comprenderla a fondo. También fueron un acicate para indagar,

desde el punto de vista didáctico, las posibles causas de la extensión de los errores de aplicación de la inferencia estadística.

El análisis del proceso de contraste de hipótesis (Batanero, 2000; Vallecillos, 1994; 1995) nos llevó a comprender su complejidad, pues son muchos los conceptos diferentes (como población y muestra, parámetro y estadístico, hipótesis nula y alternativa, región crítica y de aceptación, error tipo I y tipo II y sus probabilidades) que el estudiante debe comprender y discriminar para aplicarlo en forma correcta. Por otro lado, la lógica del proceso de un contraste de hipótesis es compleja, pues se relaciona –pero es diferente, en el sentido de trabajar con probabilidad y no con certeza– con el razonamiento por reducción al absurdo.

Además, en el trabajo con inferencia se manejan tres distribuciones diferentes, que habitualmente los alumnos confunden (Schuyten, 1991):

a) La distribución en la población (por ejemplo, la altura de los chicos españoles de 18 años, cuya media queremos conocer).
b) La distribución de los datos de la muestra (las alturas de una muestra de 100 chicos de esta edad, con una media concreta, por ejemplo 186 cm).
c) La distribución muestral del estadístico (la distribución de todas las posibles medias muestrales que obtendríamos en el conjunto de todas las posibles muestras de 100 chicos españoles).

El trabajo con estos tres niveles de distribución y el uso de cada uno en el proceso de inferencia tienen una gran complejidad semiótica y, por tanto, no es de extrañar que los alumnos cometan errores, como se muestra en algunas investigaciones. Añadido a esta complejidad, Liu y Thompson (2009) indican que los estudiantes solo consideran la muestra dada en los ejercicios que resuelven, sin ser capaces de imaginar las infinitas muestras potenciales que pueden tomarse de una población. En el ejemplo dado, solo tienen en cuenta la media de 186 cm obtenida en la muestra particular y no conciben el estadístico (media muestral) como una variable aleatoria que puede variar de una muestra a otra; por tanto, no visualizan la distribución muestral del estadístico.

En resumen, nuestro trabajo nos llevó a añadir razones de tipo didáctico –no muy investigadas por entonces– a las posibles causas filosóficas, cognitivas y psicológicas de los errores de aplicación de la inferencia. Sobre dichas razones didácticas era posible actuar –al menos en teoría–; por tanto, nos planteamos cuestiones como, ¿comprenden realmente los estudiantes los conceptos subyacentes en el contraste de hipótesis? ¿Cuáles comprenden y cuáles no? ¿Será la falta de comprensión de los mismos lo que lleva a una aplicación rutinaria e incorrecta de la inferencia? El interés por dar respuesta a estas preguntas y otras semejantes llevó al trabajo de Vallecillos (1994; 1999), quien realizó un amplio estudio de evaluación de dicha comprensión con estudiantes universitarios de diferentes especialidades en la Universidad de Granada. La autora incluyó en su evaluación aspectos como el planteamiento de las hipótesis, la interpretación del

nivel de significación o de los tipos de errores en un contraste y la interpretación de sus resultados.

La desmoralizadora conclusión del estudio de Vallecillos fue que los mismos errores se repetían en estudiantes muy variados, algunos con sólida formación en matemática y en estadística; incluso se daban en estudiantes que comprendían bien la probabilidad condicional, en la cual está basada la definición del nivel de significación y otros conceptos que intervienen en el contraste de hipótesis (Vallecillos y Batanero, 1996). Los resultados me animaron a escribir yo misma algunos artículos que contribuyesen a denunciar las aplicaciones incorrectas de la inferencia y reflexionar sobre el tema (Batanero, 2000; Batanero, Godino y Vallecillos, 1992), y posteriormente a continuar la investigación sobre inferencia como con otras tesis doctorales que he dirigido y que han continuado realizándose hasta la fecha en nuestro grupo de investigación (Alvarado, 2007; Cañadas, 2012; Olivo, 2007; Tauber, 2001; Vera, 2015).

Otra línea de investigación que abrí a partir de estas reflexiones fue el análisis de los procesos didácticos involucrados en el análisis inferencial de datos, ya discutidos en Batanero *et al.* (1992) y protagonizados por los investigadores y los consultores estadísticos (estadísticos que colaboran en una investigación en otro campo analizando los datos de la misma). Este proceso didáctico tiene un doble sentido: por un lado, el investigador (por ejemplo, un educador) debe transmitir al estadístico los suficientes conocimientos del problema que se está estudiando, para que el estadístico pueda analizar sus datos. El consultor estadístico, por su parte, debe ser capaz de "traducir" los elementos de los métodos empleados en el análisis de datos y los principales resultados de los mismos al investigador para que éste elabore sus conclusiones. La importancia de este trabajo en colaboración y las dificultades inherentes en los dos procesos didácticos descritos y en la comunicación entre investigador y consultor estadístico han sido reconocidas por la IASE, que me encargó organizar una conferencia sobre el tema (Batanero, 2001). También ha sido recogida en libros como el de Hand y Everitt (2007) o Cabrera y McDougall (2013) y en sesiones de trabajos invitados en los congresos ICOTS.

En definitiva, fueron tres las razones que nos hicieron en aquel momento tomar el análisis inferencial de datos como objeto de nuestra investigación y me han llevado personalmente a continuarla: *a)* la importancia de dicho análisis para apoyar la investigación en diferentes campos y a la vez el mal uso que se realizaba de la inferencia en la investigación, especialmente en psicología y educación; *b)* nuestra conjetura sobre la existencia de razones didácticas que explicaban los errores de aplicación de la inferencia, y *c)* la necesidad de mejorar la didáctica de la inferencia estadística, no solamente en contextos educativos formales –como la universidad– sino también como parte del trabajo del consultor estadístico.

4. EVOLUCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE ESTADÍSTICA

Como se ha indicado, la investigación en educación estadística ha experimentado en los últimos años un avance muy grande, incluso mayor que el relacionado con otras ramas de la matemática, tanto por su extensión como por su profundidad. Una de las principales razones para este desarrollo fue la inclusión de contenidos estadísticos en la educación primaria en muchos países, siguiendo la tendencia marcada por las directrices del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). En dicho currículo, y comenzando desde los grados de preescolar a tercero de educación primaria, se sugería que los niños debieran diseñar investigaciones, formular preguntas de investigación, recoger datos usando observaciones, encuestas o experimentos, y proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos, junto con adquirir un lenguaje probabilístico elemental.

Esta propuesta llevó a la necesidad de investigar sobre la forma en que los niños razonan sobre los conceptos estadísticos involucrados en los procesos descritos, así como sobre la presentación de la estadística en los materiales curriculares. Al mismo tiempo, se creó la necesidad de una formación estadística del profesorado, especialmente de educación primaria, que hasta ese momento no había sido formado ni en estadística ni en la didáctica de la estadística. Esta preocupación fue recogida por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) que quiso organizar un ICMI Study sobre estadística. Personalmente, pude contribuir al acercamiento entre educación matemática y estadística, ya que en el momento que se puso en marcha era Presidenta de IASE (2001-2003) y miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (2003-2006). Como fruto de conversaciones entre ambas instituciones, acepté la responsabilidad de organizar el ICMI Study 18, *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education,* cuyos resultados se reflejan en el libro resultante (Batanero, Burrill y Reading, 2011) y permitieron formular una agenda de investigación que hoy día se está llevando a cabo.

Centrándonos en el caso de la inferencia estadística, un cambio curricular reciente es la inclusión en los cursos de bachillerato (y a veces incluso en los de secundaria) de contenidos de inferencia. Por ejemplo, los currículos australiano, español y francés (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015; Raoult, 2013; Senior Secondary Board of South Australia, 2002) introdujeron elementos de muestreo e intervalos de confianza para la media y la proporción. En el caso español, además, las pruebas de acceso a la universidad de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales han venido proponiendo en los últimos años problemas de inferencia, dando prioridad a este tema sobre otros contenidos estadísticos o matemáticos (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016).

La necesidad de enseñar contenidos de inferencia estadística a este tipo de alumnos, cuyos conocimientos de las distribuciones de probabilidad –y en general de álgebra o análisis matemático– son escasos, relanzó el interés por la investigación sobre su compren-

sión de la inferencia y sobre posibles propuestas didácticas para simplificar el tema. Para paliar la dificultad de la inferencia y mejorar su comprensión, varias investigaciones proponen una aproximación informal a la inferencia (véase, por ejemplo, Batanero, 2015; Noll, Gebresenbet y Glover, 2016; Rossman, 2008; Sánchez e Inzunza, 2006; Sánchez y Silvestre, 2016; Zieffler, Garfield, delMas y Reading, 2008). Dicha aproximación tiene en cuenta que, dentro de la estadística, coexisten diferentes metodologías de inferencia, y han cuestionado el excesivo énfasis que se hace en la enseñanza a nivel de bachillerato, de la inferencia frecuencial.

La potencia de la simulación, facilitada por la tecnología, ha llevado a algunos autores a recomendar la sustitución de la metodología frecuencial por el re-muestreo. En dicha aproximación, en lugar de trabajar con la distribución muestral teórica del estadístico (generalmente, la distribución normal cuando se puede aplicar el Teorema Central del Límite) se utiliza un simulador para obtener una distribución muestral empírica, repitiendo un gran número de veces el proceso de tomar una muestra, calcular el estadístico en esta muestra y representar gráficamente el valor obtenido de dicho estadístico. Por ejemplo, se pueden obtener con este procedimiento las medias de 1 000 muestras aleatorias generadas por el simulador y representar su distribución. Esta distribución no sería la distribución muestral exacta, sino una aproximación, pero si el número realizado de simulaciones es muy alto, la aproximación obtenida es bastante buena, con lo cual se puede usar esta distribución muestral aproximada para resolver problemas de intervalos de confianza y contrastes de hipótesis.

En consecuencia, la simulación puede utilizarse al comenzar la enseñanza del contraste de hipótesis (en vez del cálculo formal) para poder concentrar al alumno en el aprendizaje de la lógica del proceso y en los conceptos que son necesarios: muestra y población, media muestral y poblacional, distribución de la media muestral, hipótesis nula, nivel de significación, etcétera. Es importante, sin embargo, ser riguroso con esta aproximación informal y no querer adelantarla demasiado para la edad y conocimientos del estudiante, pues de todos modos se requieren conceptos básicos de estadística descriptiva y probabilidad para adquirir una comprensión razonable.

5. NUESTRA INVESTIGACIÓN ACTUAL

Como he ido analizando, he tenido el privilegio de aportar mi granito de arena a diferentes organismos y acciones relacionados con la educación estadística. Además, he recibido una ayuda constante de las agencias españolas de investigación, que financiaron durante estos 25 años diferentes proyectos que permitieron esta participación. En la actualidad nuestro grupo continúa la investigación sobre educación estadística en diversos temas, uno de ellos la inferencia estadística, respecto a la cual se tienen otras tesis doctorales en marcha. Nuestro actual proyecto financiado de investigación (EDU2014-75848-P) se centra en el desarrollo del razonamiento inferencial de los estu-

diantes de educación secundaria y bachillerato y del conocimiento relacionado de los profesores que han de enseñar el tema.

La premisa de muchos trabajos sobre lo que se denomina *inferencia informal* es alargar la enseñanza de la inferencia, comenzando desde el final de la educación primaria con ideas informales sobre la misma. Un aspecto cuestionable de esta corriente es que parte de los trabajos publicados dentro de la misma se detienen en los primeros pasos. En consecuencia, no se llega, finalmente, a una inferencia estadística completa, sino que se reduce a un simple análisis exploratorio de datos (cuyos resultados no pueden generalizarse más allá de los datos analizados). En nuestro caso, nos interesamos por analizar la posibilidad de utilizar aproximaciones informales pero rigurosas a la inferencia, desde diversas metodologías (frecuencial, subjetiva y re-muestreo), para desarrollar y formalizar progresivamente el razonamiento inferencial en estudiantes y profesores.

Para ello se ha comenzado con estudios previos del currículo, los libros de texto y las pruebas de evaluación actuales para tratar de proponer mejoras a los mismos. Un punto importante en esta propuesta es considerar que el uso reflexivo de la simulación, por parte de los estudiantes, lleva implícita una actividad intensa de modelización matemática (cuya importancia se resalta en el estudio dirigido por Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). En este caso, una situación o experimento aleatorio del mundo real se sustituye por otra que se puede manipular en el ordenador (Borovcnik, 2014; Chaput, Girard y Henry, 2011). Los datos proporcionados por la simulación servirán para obtener información de la situación de partida, pero no se debe olvidar la diferencia entre modelo y realidad, ni las diferentes fases en el proceso de modelización. Al mismo tiempo, la enseñanza de la inferencia con base en la simulación proporciona una buena oportunidad para la enseñanza de la modelización (Borovcnik y Kapadia, 2011).

Simultáneamente, se propone atender a la formación de los profesores de educación secundaria y bachillerato para la enseñanza de la inferencia con un enfoque informal. Dicha formación atendería preferentemente las facetas del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015) necesarias para llevar a cabo esta enseñanza, pues es posible que los futuros profesores tengan un conocimiento formal suficiente del tema, pero no estén familiarizados con las experiencias de enseñanza desde un enfoque informal.

6. MIRANDO AL FUTURO

La reflexión personal realizada al escribir este artículo me lleva a la conclusión de que el camino emprendido hace casi 30 años era acertado y que la educación matemática necesariamente tenía y tiene mucho que contribuir a la mejora de la enseñanza y de la aplicación de la inferencia estadística.

A punto de celebrarse el ICOTS 10, encontramos dos de los diez tópicos (líneas principales dentro del congreso) que se relacionan con la inferencia estadística, pues están

dedicados a la educación estadística después de la secundaria y a la estadística en el lugar del trabajo, el gobierno y en diferentes disciplinas. Las sesiones que se ofrecen no se limitan ya a la inferencia frecuencial, sino que encontramos la aleatorización y la simulación intensiva como métodos inferenciales, inferencia basada en rangos y estadística no paramétrica o inferencia bayesiana. A ello se une otro tópico completo dedicado a la investigación en educación estadística que incluye tres sesiones sobre el desarrollo del razonamiento inferencial de los estudiantes.

Como se muestra en estas iniciativas, queda mucho por investigar en relación con el tema. Por nuestra parte, pensamos que merece la pena analizar algunas propuestas recientes sobre la enseñanza de la inferencia que se basan en la simulación, y en algunas de la cuales hemos observado las siguientes confusiones que pueden ser transmitidas al estudiante y contribuir a la prevalencia de errores en la aplicación de la inferencia:

- Se confunde la estimación de la probabilidad dada por las frecuencias relativas en una muestra grande de repeticiones de un experimento con el valor teórico de probabilidad. El método frecuencial, donde la probabilidad se concibe como el límite de dichas frecuencias relativas, nunca proporciona el valor de la probabilidad, sino solo una estimación del mismo (Chaput *et al.,* 2011); por tanto, es engañoso utilizar la expresión *probabilidad experimental* o *probabilidad empírica,* que a veces encontramos en estos trabajos.
- No se señala que la distribución muestral obtenida mediante simulación es diferente de la distribución muestral teórica, y, por tanto, se añade un error de estimación, debido a la fluctuación aleatoria del muestreo. Solo podemos controlar el error introducido por la simulación aumentando considerablemente el número de simulaciones, pues la distribución muestral empírica, obtenida mediante simulación, converge a la teórica únicamente cuando el número de muestras tomadas tiende a infinito. Para un número finito de simulaciones, las distribuciones muestrales empíricas pueden variar bastante de una simulación a otra, por lo que pueden confundir a los estudiantes al comparar sus resultados.
- Algunas propuestas simplifican excesivamente los conceptos cuya comprensión se requiere en la inferencia; por ejemplo, no se analizan los posibles errores asociados a un contraste de hipótesis, con lo que se puede transmitir una visión muy determinista de dicho contraste. Otras veces no se resalta la naturaleza condicional de conceptos como el nivel de significación o el valor *p*, es decir, no se relaciona la probabilidad asociada a estos conceptos con la hipótesis supuesta y se podrían transmitir los errores frecuentes de interpretación de estos conceptos.
- Finalmente, en casos aislados el trabajo de inferencia informal se reduce a la simulación y una decisión final (subjetiva) sobre el rechazo de una hipótesis utilizando solo procedimientos descriptivos, lo cual no sería una verdadera inferencia estadística. No se realiza un estudio posterior de los conceptos implicados

o del proceso de inferencia, lo que en la práctica supone que no se realiza un aprendizaje adecuado que permita avanzar posteriormente con la inferencia desde un punto de vista formal.

En consecuencia, todos estos puntos deben ser investigados desde la educación estadística, sin olvidar la formación adecuada de los profesores de bachillerato e incluso universitarios. Dicha formación debe englobar no solo los aspectos matemáticos, sino los filosóficos, psicológicos y didácticos implicados en la enseñanza de la inferencia.

AGRADECIMIENTO

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER)

REFERENCIAS

Alvarado, H. (2007). *Significados del teorema central del límite en la enseñanza de la estadística en ingeniería* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical thinking and learning, 2*(1-2), 75-97.

Batanero, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras (Ed.), *II Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 135-144). Granada, España: SEIEM.

Batanero, C. (Ed.). (2001). *Training researchers in the use of statistics.* Tokyo, Japan: International Statistics Institute.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education.* New York, USA: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D. y Vallecillos, A. (1992). El análisis de datos como útil y objeto de la didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 4*(1), 46-53.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education.* New York, USA: Springer.

Borovcnik, M. (2014). Modelling and experiments – An interactive approach towards stochastics. En T. Wassong, D. Frischemeier, P. Fischer, R. Hochmuth y P. Bender (Eds.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen [Using tools for learning mathematics and statistics]* (pp. 267-281). Berlin, Germany: Springer.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2011). Modelling in probability and statistics–Key ideas and innovative examples. En J. Maaß y J. O'Donoghue (Eds.), *Real-world problems*

for secondary school students-Case studies (pp. 1-44). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Cabrera, J. y McDougall, A. (2013). *Statistical consulting.* New York, USA: Springer.

Cañadas, G. R. (2012). *Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Chaput, B., Girard, J.-C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 85-95). New York, USA: Springer.

Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning, 9,* 83-96.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372-396.

Gigerenzer, G. (1993). The superego, the ego and the id in statistical reasoning. En G. Keren y C. Lewis (Eds.), *A handbook for data analysis in the behavioral sciences: Methodological issues* (pp. 311-339). Hillsdale, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Gigerenzer, G. y Gaissmaier, W. (2011). Heuristic decision making. *Annual Review of Psychology, 62,* 451-482.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, 20,* 13-31.

Hand, D. J. y Everitt, B. S. (Eds.). (2007). *The statistical consultant in action.* Cambridge, United Kingdom: University Press.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge, United Kingdom: University Press.

Levin, J. R. (1998). To test or not to test H_0? *Educational and Psychological Measurement, 58,* 313-333.

Liu, Y. y Thompson, P. W. (2009). Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. *Pedagogies, 4*(2), 126-138.

López-Martín, M. M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. M. (2016). La inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 5*(8), 33-59.

Menon, R. (1993). Statistical significance testing should be discontinued in mathematics education research. *Mathematics Education Research Journal, 5*(1), 4-18.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD). (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid, España: Autor.

Morrison, D. E. y Henkel, R. E. (Eds.). (1970). *The significance tests controversy. A reader.* Chicago, Illinois, USA: Aldine.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia, USA: Autor.

Noll, J., Gebresenbet, M. y Glover, E. D. (2016). A modeling and simulation approach to informal inference: Successes and challenges. En D. Ben-Zvi (Ed.), *The teaching and learning of statistics* (pp. 139-150). New York, USA: Springer.

Olivo, E. (2008). *Significados de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris, France: Presses Universitaires de France.

Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pollard, P. y Richardson, J. T. E. (1987). On the probability of making Type I errors. *Psychological Bulletin, 10,* 159-163.

Raoult, J. P. (2013). La statistique dans l'enseignement secondaire en France. *Statistique et Enseignement, 4*(1), 55-69.

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia científica.* Barcelona, España: Anthropos.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Sánchez, E. e Inzunza, S. (2006). Meanings' construction about sampling distributions in a dynamic statistics environment. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador de Bahia, Brasil: International Association for Statistical Education. Disponible en: https://iase-web.org/documents/papers/icots7/7C3_SANC.pdf

Sánchez, E. y Silvestre, E. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informal: Introducción a las pruebas de significancia en el bachillerato. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández, A. Jiménez, M. T. Sánchez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 509-518). Málaga, España: SEIEM.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Seidenfeld, T. (1979). *Philosophical problems of statistical inference: Learning from R. A. Fisher.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Senior Secondary Board of South Australia (2002). *Mathematical studies curriculum statement.* Adelaida, Australia: SSBSA.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics education* (pp. 465-494). New York, USA: MacMillan.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. K. Lester,

Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Charlotte, North Carolina, USA: Information Age Publishing.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. B. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos* (tesis doctoral). Universidad de Sevilla, España.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(3), 53-81.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2, pp. 201-204). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1996). Conditional probability and the level of significance in tests of hypotheses. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4) (pp. 271-378). Valencia, España: PME Group.

Vera, O. (2015). *Comprensión del análisis de varianza elemental por estudiantes universitarios* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Vere-Jones, D. (1997). The coming of age of statistical education. *International Statistical Review, 63*(1), 3-23.

Wilkinson, L. and the Task Force on Statistical Inference. (1999). Statistical methods in psychology journals: Guidelines and explanations. *American Psychologist, 54,* 594-604.

Yates, F. (1951). The influence of "Statistical methods for research workers" on the development of the science of statistics. *Journal of the American Statistical Association, 46,* 19-34.

Zieffler, A., Garfield, J. B., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas

Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo
Universidad de Extremadura, España

Resumen: El conocimiento profesional, la formación del profesorado y la resolución de problemas fueron los tópicos centrales que conformaron el proyecto de investigación que dio origen al trabajo publicado en la revista *Educación Matemática* hace 22 años (Blanco, 1996). Presentamos la revisión de investigaciones centradas en los tres aspectos mencionados, con referencia explícita a concepciones, creencias, actitudes, emociones y prácticas de los estudiantes para profesores realizadas en estos años. Todo ello nos llevó a diseñar un programa de intervención y un modelo de resolución de problemas para trabajar la Resolución de Problemas (RP) como contenido en los programas de formación de profesores. Así mismo, mostramos algunas prácticas y concepciones de los profesores de matemáticas sobre la evaluación de la resolución de problemas, como última agenda de investigación desarrollada.

1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS AÑOS 80 Y 90: CONTEXTO E INTERÉS DEL TRABAJO

En la década de los años 80 del siglo XX se impulsaron importantes cambios en la educación matemática, transformaciones que ya venían gestionándose en décadas anteriores (Blanco, 1991; Malaty, 1988), específicamente en relación con la resolución de problemas y al conocimiento de los profesores. Además, se fomentó de manera significativa su investigación y se realizaron aportaciones para la formación de profesores (Cooney, 1994). Ello marcó nuestro trabajo pues eran referentes en la actividad investigadora de aquella época:

1. Se asumió que aprender a resolver problemas debería ser el principal objetivo a la hora de estudiar matemáticas. Así, el National Council of Teachers of Mathematics señaló entre sus recomendaciones que la resolución de problemas debía ser el objetivo primordial de la enseñanza de las Matemáticas en esa década (NCTM, 1980), destacando el papel que debe tener la Resolución de Problemas de Matemáticas (RPM) en la escuela. Desde entonces, la RPM ha aumentado su presencia en agendas de investigación y en los currículos, considerándose básicamente desde tres perspectivas: *a)* como contexto para el aprendizaje de las matemáticas; *b)* como aplicación y justificación de los conceptos y procedimientos matemáticos, y c) como contenido específico a aprender (Puig, 2008; Santos, 2008).

La RPM debe ser el eje vertebrador del contenido matemático al evidenciar la capacidad de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación. Es también un contenido específico, al ser una competencia básica que los estudiantes deben adquirir. Según Puig (2008), esa presencia en primer plano de la RPM se acompañó de una tensión mal resuelta entre la doble consideración de la Resolución de Problemas (RP) "como contenido y como metodología", lo que resultó en detrimento de su tratamiento como contenido en los diseños curriculares y diluyó su presencia en la práctica en el aula, no solo como contenido sino también como metodología.

La RPM como contenido específico es la perspectiva que nos preocupa y ocupa en los últimos años (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015; Blanco, Guerrero y Caballero, 2013; Cárdenas y Blanco, 2015), al comprobar que los estudiantes de enseñanza obligatoria y los estudiantes para profesores de primaria (EPPS) tienen dificultades importantes para abordar problemas de matemáticas como se evidencia, por ejemplo, en los resultados del informe PISA (PISA, 2003; OECD, 2014).

2. También en la década de los años 80 aparecen diferentes aportaciones que intentan describir y caracterizar la naturaleza del conocimiento de los profesores. Por su importancia posterior, recordamos los trabajos de L. S. Shulman y R. Marks sobre el *pedagogical content knowledge* (Marks, 1989; Shulman, 1986). Ellos señalaban que los profesores desarrollan, además del conocimiento de la materia y del conocimiento psicopedagógico general, un conocimiento específico sobre la forma de enseñar su materia, que tiene diferentes componentes. Precisaban diferentes tipos de conocimientos: el que los profesores tienen de la materia, que sería diferente al de otros especialistas de la misma materia; el adquirido desde la práctica de la enseñanza, y el conocimiento que hace referencia a la capacidad de razonamiento y acción pedagógica. El razonamiento pedagógico *(pedagogical reasoning)* sería el proceso de transformación del conocimiento de la materia en formas adaptadas a la habilidad, conocimiento y nivel de los estudiantes (Livingston y Borko, 1989).

Para Ernest (1989), el conocimiento de matemáticas es la fuente para el conocimiento pedagógico de los profesores y sus habilidades para la enseñanza de las matemáticas. Señalaba que es necesario comprender cuáles son sus conocimientos, creencias y actitudes, así como las formas en que desarrollan su enseñanza; propuso para ello un modelo analítico de los diferentes tipos.

Ya Clandinin y Connelly alertaban sobre la importancia de entender el conocimiento que los profesores adquieren como consecuencia de su experiencia docente, "ese cuerpo de convicciones y de significados conscientes o inconscientes, que han surgido de la experiencia íntima, social o tradicional, y que se expresa en las acciones de una persona" (Clandinin y Connelly, 1988, p. 41). Al respecto Calderhead, dentro de su línea de estudio del pensamiento de los profesores *(Teachers' Thinking)*, expresaba que "los profesores son agentes activos de la construcción de su propia práctica (en interacción con los demás profesores e inmersos en las limitaciones de la escuela) y adquieren y utilizan un cuerpo de conocimientos en sus actividades docentes" (Calderhead, 1988, p. 22).

Cooney (1985) trabajó con profesores noveles de matemáticas centrados en la RPM, quienes revelaron un conflicto entre el idealismo del profesor novel y la realidad de las clases, donde su planificación y actividad docente en el aula reflejaba esquemas de la práctica tradicional condicionada por el libro de texto. Su trabajo mostraba una contradicción entre los conocimientos y concepciones manifestadas por los profesores noveles sobre la enseñanza de las matemáticas y la RPM, y la práctica que desarrollaban. Livingston y Borko (1989) justificaban esta situación al indicar que los profesores noveles tenían poco desarrollada su capacidad de razonamiento pedagógico. También en nuestra investigación consideramos los trabajos con profesores expertos y noveles (Berliner y Carter, 1986; Leinhardt, 1989), que señalaban las dificultades de estos últimos para aprender a enseñar matemáticas, a partir de las diferencias cualitativas en el conocimiento, pensamiento y acciones docentes.

El trabajo de Ball y Wilson (1990) con estudiantes para profesores advertía las dificultades que tienen para representar ideas matemáticas útiles para el aprendizaje de matemáticas en la enseñanza obligatoria; para generar ejemplos útiles para la enseñanza en algunos temas; para responder a preguntas inusuales de los alumnos o discriminar entre los puntos importantes o no, lo que les llevaba a situaciones de incertidumbre cuando tenían que tomar decisiones sobre cómo responder a los alumnos ante situaciones nuevas que, en algunos casos, provoca inseguridad.

La consideración de estos trabajos nos llevó a realizar una propuesta para caracterizar el conocimiento de los profesores partiendo de dos componentes interrelacionadas, a las que llamamos académica y profesional, y que conformarían el conocimiento didáctico del contenido (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995; Mellado, Blanco y Ruiz, 1998), que fue nuestra traducción al castellano del *pedagogical content knowledge*.

Como conclusión general, consideramos que los EPPS tendrían que asumir un conocimiento práctico específico para realizar eficazmente su trabajo como profesores de matemáticas. Deberían alcanzar un conocimiento "de" y "sobre" matemáticas porque se van a dedicar a enseñar matemáticas en un contexto específico y particular: el de la enseñanza/aprendizaje (E/A) de las matemáticas en la enseñanza obligatoria. Esta finalidad establece una diferencia importante a considerar en la formación inicial, respecto de los conocimientos matemáticos que necesitará un estadístico, o aquellos que necesitan de las aplicaciones de las matemáticas, como un ingeniero. Es decir, el conocimiento de la materia para un profesor de matemáticas tiene que ser específico, ya que está relacionado con el contexto y con el propio proceso de enseñanza del contenido matemático (SEIEM, 2011). Además, el conocimiento profesional es un conocimiento dinámico que no resulta de la suma de las diferentes componentes que podamos describir, sino una relación compleja entre todas ellas y con otros aspectos, sociales o culturales, relacionados con el desarrollo de la personalidad.

Evidentemente, los trabajos sobre la naturaleza y caracterización del conocimiento de los profesores han continuado hasta nuestros días, asumiendo nuevos marcos de referencia y una nueva nomenclatura según las tendencias y líneas de trabajo, de lo

que actualmente hay abundante literatura. A modo de ejemplo, Ribeiro *et al.* (2014) muestran diferentes perspectivas teóricas y metodológicas que permiten una mejor comprensión de la práctica educativa y de los instrumentos que sustentan dichos análisis, al estudiar un episodio de la práctica desde: Knowledge Quartet (Rowland, 2014); Mathematical Knowledge for Teaching (Ball, Thames y Phelps, 2008) y Mathematics Teachers Specialized Knowledge (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), la perspectiva sociocultural de Sfard (2008), y la resolución de problemas (Chapman, 2015) en el grupo de Investigación Desarrollo Profesional Docente de la SEIEM.

2. INTERÉS/RELEVANCIA Y EVOLUCIÓN/DESARROLLO DEL TEMA

Se abrió un nuevo campo de estudio con el objetivo de que los estudiantes para profesor de matemáticas aprendieran a enseñar matemáticas. En nuestra actividad de formador de profesores manejábamos la expresión "aprender a enseñar matemáticas en primaria o secundaria", diferente del "aprender matemáticas". Esto era importante porque, en aquella época, "el modus operandi de la mayor parte de los programas de educación de profesores era intentar que los profesores fueran matemáticos competentes y, de paso, introducir alguna pequeña parte de pedagogía" (Cooney, 1994, p. 225). En España la situación era similar (Sierra, 1987). Esta perspectiva llevó a plantearnos nuevas preguntas en nuestra actividad docente e investigadora:

- ¿Qué y cómo aprenden los EPPS a enseñar matemáticas?
- ¿Asimilan realmente los conocimientos y procesos desarrollados sobre la naturaleza del conocimiento matemático, o sobre la naturaleza del conocimiento didáctico del contenido?
- ¿Son capaces de utilizar conscientemente estos conocimientos en las prácticas docentes?
- ¿Hasta qué punto analizan y/o modifican sus conocimientos, creencias, actitudes y emociones durante su estancia en los centros de formación inicial?
- ¿Qué objetivos, contenidos, metodología y competencias tenemos que considerar a partir de la respuesta a las preguntas anteriores?
- ¿Cómo debe ser la evaluación en la formación de profesores?

Estas y otras preguntas, válidas actualmente, generan una nueva agenda de investigación en la formación de los profesores, con referencia a tópicos específicos de matemáticas; en nuestro caso nos centramos en la resolución de problemas matemáticos.

2.1. Los estudiantes para profesor de primaria de matemáticas como aprendices del conocimiento profesional

La situación descrita provoca que aparezcan numerosas investigaciones enfocadas en los EPPS para analizar sus conocimientos de y sobre matemáticas en tópicos específicos, sus concepciones, creencias, actitudes y emociones sobre las matemáticas y sobre su E/A, y otros aspectos que entendíamos era necesario comprender para poder fundamentar un programa de formación de profesores (Blanco, 2009).

2.1.1. Sobre el conocimiento

En Blanco (2009) se reseñan numerosos trabajos que indican las deficiencias del conocimiento matemático de los EPPS, incluso sobre aspectos importantes de las matemáticas escolares (Barrantes y Blanco, 2006; Moreno, Hernández y Socas, 2004; Valverde y Castro, 2009; Walen, Williams y Garner, 2003; Zevenbergen, 2004, entre otros). Esto es importante, ya que el dominio del contenido es directamente proporcional a la capacidad de gestión de la clase y condiciona las elecciones curriculares. Los profesores que tienen bajos conocimientos de la materia a enseñar presentan dificultades para realizar cambios didácticos, evitan enseñar los temas que no dominan, dependen del libro de texto, muestran inseguridad y falta de confianza y refuerzan los errores conceptuales de los alumnos (Mellado *et al.,* 1998). Por el contrario, cuando adquieren un conocimiento adecuado pueden aportar explicaciones conceptuales y procedimentales, una mayor conexión del conocimiento y manifiestan una mayor seguridad en su habilidad para enseñar (Climent, Domínguez y Santiago, 1999; Manoucheri, 1998).

Es decir, el contenido matemático debe ser el núcleo de la formación inicial (SEIEM, 2011), pero deberemos "enfocarlo de otra manera y plantearlo no dentro de un contenido puramente matemático, sino inmerso en lo que va a ser la futura labor de los maestros" (Climent *et al.,* 1999, p. 186). Es decir, tienen que aprender matemáticas en un proceso coherente con las características de la nueva cultura matemática escolar que deberán generar como profesores.

2.1.2. Sobre las concepciones

Además del conocimiento matemático, durante su paso por la enseñanza primaria y secundaria los EPPS generan concepciones sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje. Ello, junto con la influencia del dominio afectivo, les permite organizar y filtrar las informaciones recibidas para formar su visión de las matemáticas, incidir en su formación, limitando las posibilidades de actuación y comprensión del conocimiento profesional y condicionando sus decisiones sobre la práctica docente (Ponte, 1992). El estudio de las concepciones se inicia en la década de los años 80 (Thompson, 1992).

Una revisión de las publicaciones al respecto nos recuerda que los profesores en formación de primaria tienden a ver las matemáticas como una disciplina difícil y accesible a pocos, abstracta y basada en reglas, donde predomina la memorización y aplicación de fórmulas y procedimientos rutinarios, algorítmicos y algebraicos, para resolver ejercicios que habitualmente tienen muy poca aplicación en el mundo real y que están en el libro de texto (Blanco, 1997; Mellado *et al.,* 1998; Contreras, 1999; Pino, 2013; Cárdenas, 2014; Bohórquez y D'Amore, 2018). Todas estas concepciones están vinculadas a vivencias personales, lo que las hace muy persistentes y difícilmente modificables.

Las concepciones de los EPPS determinan la imagen que tienen de las matemáticas en el aula, influyendo en sus actitudes y emociones y en la conducta del profesor y el aprendizaje de los alumnos. La falta de reflexión sobre estos aspectos y la carencia de conexión del conocimiento formalizado en la formación de profesores con situaciones escolares concretas, es una de las causas por las que persisten en los estudiantes para profesor concepciones inadecuadas, a pesar de su paso por los centros de formación inicial, donde no reconceptualizan su papel como profesores.

Consecuentemente, deberemos considerarlas en los programas de formación inicial, dentro de un proceso de discusión y reflexión que permita explicitar y contar sus concepciones (Córcoles y Valls, 2006; Oliveira y Hannula, 2008; Blanco, 2009), y potenciar el cambio en sus posiciones (Bohórquez y D'Amore, 2018).

2.1.3. Sobre los descriptores del dominio afectivo

Las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la E/A de las matemáticas y, en particular, en la RPM (McLeod y Adams, 1989). El dominio afectivo sería un extenso rango de sentimientos/estadios de ánimo, diferenciados de la pura cognición, que incluye las creencias, actitudes y emociones. Desde entonces, los trabajos al respecto son muy numerosos (Blanco, 2012; Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, 2010).

Las *creencias* permiten al individuo organizar y filtrar las informaciones recibidas, construyendo su noción de realidad y su visión del mundo educativo, y específicamente de las matemáticas. Los estudiantes, como consecuencia de su experiencia discente, van generando creencias acerca de la matemática (objeto), de su enseñanza y aprendizaje, y creencias acerca de sí mismos como aprendices (confianza, autoconcepto o atribución causal del éxito o fracaso).

En términos generales, las creencias pueden influir negativamente sobre las actividades matemáticas, específicamente sobre la RP, provocando una actitud de recelo y desconfianza que les lleva a creer, entre otras cuestiones, que la comprensión del conocimiento matemático puede ser inalcanzable. Consecuentemente, son determinantes primarios de la motivación y de la conducta, y un condicionante del rendimiento académico.

Las *actitudes* constituyen una predisposición, favorable o desfavorable, que influye en sus comportamientos frente a las matemáticas. Lo que el estudiante piensa y cree sobre

las matemáticas (componente cognitivo) influye en los sentimientos que afloran hacia la materia (componente afectivo) y, consecuentemente, le predisponen (componente intencional) a actuar de modo consecuente (componente comportamental). Las *actitudes hacia las matemáticas* se refieren a su valoración, aprecio e interés por las matemáticas y su E/A, que se apoyan más en la componente afectiva; las *actitudes matemáticas* se vinculan al modo de manejar las capacidades cognitivas generales, como la flexibilidad y la apertura mental, el espíritu crítico y la objetividad, aspectos importantes en tareas matemáticas.

Las *emociones* son respuestas afectivas, positivas o negativas, y resultado del proceso de E/A y de la influencia del entorno. Los estudios sobre la emoción han versado sobre el papel de la ansiedad y sus consecuencias en los logros matemáticos. La ansiedad por la dificultad de comprender y/o acabar la tarea, el miedo al fracaso, etc., generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en su manera de abordar la actividad matemática, lo que puede llevar al abandono, a la evitación de la tarea y al bajo rendimiento académico. Por ello, es importante controlar los niveles de ansiedad para favorecer una activación óptima, que tendría un efecto positivo sobre el aprendizaje.

Los EPPS manifiestan ansiedad hacia las matemáticas y hacia la enseñanza de las matemáticas (Bursal y Paznokas, 2006; Gómez y Caballero, 2015; Peker, 2009). Esto es importante por cuanto la ansiedad y el miedo que un docente procese hacia las matemáticas repercutirán en su conducta y en el rendimiento de sus alumnos.

2.1.4. Sobre el análisis de las producciones de los alumnos y gestión del aula

Cuando se describen las competencias deseables para los EPPS (Blanco, 2009; Ivars, Buforn y Llinares, 2016), se indica la capacidad de desarrollar tareas que exijan el análisis y la gestión de los fenómenos que se producen durante la enseñanza (preactiva, interactiva y posactiva). Es por ello que deberemos tener en cuenta los resultados de las investigaciones que se han centrado en las prácticas docentes de los EPPS, algunos de los cuales señalamos en el listado siguiente, y que han sido mencionados por autores como Berliner y Carter (1986), Blanco (1991), Leinhardt (1989), Livingston y Borko (1989), y Mellado *et al.* (1998).

1. Acceder a esquemas cognitivos claros que les permitan utilizar las actividades instruccionales.
2. Percibir y discernir la información que es relevante y útil para los procesos de enseñanza y aprendizaje y para tomar decisiones sobre el sentido y utilidad de la información.
3. Realizar razonamientos pedagógicos y representar ideas matemáticas que permitan a los alumnos de primaria establecer un puente entre sus conocimientos previos y los conocimientos matemáticos que tienen que aprender.

4. Generar ejemplos útiles para determinados conceptos.
5. Utilizar recursos didácticos dentro del proceso de E/A.
6. Responder a preguntas inusuales de los alumnos.

Actualmente, podemos comprender con mayor intensidad la actividad de los EPPS durantes sus prácticas de enseñanza y caracterizar su actuación (Barnhart y Van Es, 2015; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ivars *et al.,* 2016; Montes *et al.,* 2015).

3. LOS ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE PRIMARIA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Una de las agendas de investigación frecuente a partir de los años 90 se centró en analizar diferentes aspectos de la relación entre los estudiantes para profesores de primaria y la RPM. Nuestro grupo de investigación abordó el tema desde distintas perspectivas (Blanco, 1991; 1996; 1997; Blanco *et al.,* 2015; Caballero, 2013; Caballero, Blanco y Guerrero, 2011; Cárdenas, 2014; Pino, 2013).

Los resultados de nuestras investigaciones, contrastados con los contenidos de las publicaciones específicas, nos llevaron a señalar algunas características de los conocimientos, concepciones y creencias, actitudes y emociones de los EPPS. Así, podemos afirmar que sus concepciones reflejan una idea muy tradicional de la RPM, ligada a un tipo determinado de problemas, mayoritario en los libros de texto. Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática. La utilización de métodos aritméticos o algebraicos en su mayoría, o conceptuales en menor medida, sigue siendo el recurso más importante para resolver problemas, dándole poca importancia a otras alternativas, como estrategias de ensayo y error o el uso de representaciones gráficas. Al respecto, destacamos que consideran a la RPM como un procedimiento mecánico y memorístico; tienen escasos recursos para representar y analizar los problemas; no buscan distintas estrategias o métodos para su resolución; no hacen uso de indicaciones que se le sugieren; si no saben resolver el problema inmediatamente, abandonan, generando una visión de sí mismos como resolutores incompetentes ("es que se me dan mal las matemáticas"). Sin embargo, cuando comparten sus sentimientos e ideas y comunican sus conjeturas y resultados, son capaces de reflexionar sobre sus reacciones y comportamientos y, consecuentemente, de aprender.

En relación con los descriptores del dominio afectivo, señalaríamos que los EPPS: muestran falta de confianza a la hora de abordar/resolver problemas, manifiestan resistencia, malestar, miedo, descreimiento y escepticismo. Consecuentemente, no se consideran capaces y hábiles pues la inseguridad, la desesperación y el nerviosismo les llevan al atasco o bloqueo ante la tarea. Un ejemplo de su inseguridad se manifiesta

en las dudas tras la resolución de un problema, aunque sea fácil, y sobre el resultado obtenido ("Profe, ¿está bien?").

En otro sentido, los trabajos sobre las prácticas de los profesores noveles y EPPS mostraron sus dificultades para gestionar una clase de matemáticas en torno a la RP. El artículo referencia de este trabajo (Blanco, 1996) analizaba una práctica docente de un estudiante para profesor de primaria, y señalaba que las indicaciones imprecisas del informante hacían difícil la dirección de la clase y el establecimiento de los distintos pasos en la resolución del problema que el EPP conocía previamente. También, se ponía de manifiesto la diferencia entre aprender a resolver problemas y aprender a gestionar una clase de problemas en primaria, evidenciando que lo primero no implica lo segundo.

Estas referencias nos indican la relación intensa entre cognición y afectividad en la resolución de problemas. Es por ello que "el papel de la educación de profesores es desarrollar en los profesores noveles confianza y competencia como usuarios de las matemáticas en orden a mejorar su enseñanza de las matemáticas" (Zevenbergen, 2004, p. 4).

Tanto DeBellis y Goldin (2006) como Furinghetti y Morselli (2009) recuerdan que tradicionalmente las investigaciones en RP se han centrado, primero, en aspectos cognitivos, y segundo en aspectos afectivos, pero pocas veces en la interacción de los aspectos cognitivos y afectivos. Sin embargo, cada vez son más los trabajos que reconocen la importancia de considerar las dimensiones afectiva y cognitiva de manera integrada en la E/A de las matemáticas (Amato, 2004; Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006), y en los programas de formación de profesores dentro de un proceso de discusión y reflexión (Caballero, 2013; Furinghetti y Morselli, 2009; Pino, 2013).

4. NUEVO MARCO PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

La caracterización del conocimiento y desarrollo profesional de los profesores y las investigaciones sobre los EPPS nos indican nuevas referencias en la formación de profesores (Barnhart y Van Es, 2015; Ivars *et al.,* 2016; Montes *et al.,* 2015; Ribeiro *et al.,* 2014), que nos llevarían a considerar las expresiones "enseñar/aprender a enseñar matemáticas" y "enseñar/aprender a resolver problemas de matemáticas", ya que asumimos que la RPM es un contenido específico de las matemáticas escolares (Cárdenas y Blanco, 2015; Puig, 2008), todo ello condicionado actualmente por la aparición del modelo de competencias. Sobre este asunto, pensamos que las competencias que deben adquirir los estudiantes para profesores son específicas de la profesión para la que se les prepara, por lo que estarían estrechamente vinculadas a los avances educativos y a la habilidad para desarrollar una enseñanza de calidad.

En este sentido señalaríamos cuatro referencias, íntimamente relacionadas entre sí, que conformarían las competencias profesionales de los profesores de matemáticas y que, por lo tanto, tendrían que tener referencia en los programas de formación:

- Dominio de las matemáticas escolares.
- Planificación y organización de los contenidos matemáticos para su E/A.
- Gestión del contenido matemático en el aula, como objeto de E/A.
- Análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos, a través de sus producciones.

Todo lo anterior está relacionado con los procesos de activar los conocimientos, habilidades y estrategias necesarios para desarrollar tareas docentes en diferentes contextos y situaciones como resultado del aprendizaje (aprender a enseñar), y no de manera espontánea o de ocurrencia. Las tareas a realizar deberían desarrollar acciones cognitivas como observar, predecir, criticar, generalizar y analizar, y afectivas para ganar confianza y seguridad en su actividad.

En definitiva, la formación de los EPPS estaría encaminada a responder la pregunta "qué hacer" ante situaciones concretas de enseñanza, fundamentando la decisión en postulados claros y asumidos por el profesor. Entendemos, pues, que el proceso de aprender a enseñar matemáticas es un proceso continuo de construcción de un conocimiento específico que necesita situaciones de aprendizajes, también específicas, y de marcos teóricos necesarios para generar un nuevo conocimiento útil para los profesores de matemáticas (Carrillo y Climent, 1999; Contreras y Blanco, 2002). Los programas de formación debieran preparar a los futuros profesores para la profesión como docentes, al finalizar su proceso de formación, y estar preparados para seguir aprendiendo de forma autónoma en el desarrollo de su actividad profesional.

Ello nos sugiere abandonar los modelos en los cuales los aprendices son meros receptores, para sustituirlos por modelos activos de aprendizaje. Así, el aprendiz será un agente clave y activo en la gestión de su propio conocimiento y emociones, siendo él mismo quien lo generará, individual/colaborativamente, a partir de sus conocimientos previos y experiencias discentes. Esta enseñanza debe fomentar el análisis de los procesos mediante los resultados que pueden alcanzarse, sugiriendo una nueva demanda en la formación de profesores: aprender a aprender. De esta manera, ayudaremos a los profesores en formación a buscar su propia identidad a través de la interacción entre su experiencia discente, su experiencia en los centros de formación inicial, y los objetivos y prácticas promovidos en los cursos de estos centros (Goos *et al.,* 2009).

En este contexto, podemos encontrar trabajos que tratan de diseñar marcos teóricos y tareas concretas ("tareas didácticas contextualizadas y personalizadas", "entornos de aprendizaje", "itinerarios de formación", "trayectoria hipotética de E/A" o "ámbitos de investigación profesional"), para crear ambientes de aprendizaje donde los EPPS puedan aprender a explorar matemáticas y construir su propio conocimiento profesional. En las publicaciones de miembros de Grupo de Trabajo "Conocimiento y desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas" (CPPM) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (www.seiem.es) encontraremos referencias a estas expresiones.

5. DOS REFERENCIAS ACTUALES

Asumiendo el recorrido narrado, consideramos de interés llevar a las aulas de formación inicial los resultados de la investigación con EPPS sobre RPM. En este sentido, desarrollamos un programa de intervención para enseñar a resolver problemas de matemáticas, integrando aspectos cognitivos y afectivos, dirigido a profesores en formación de primaria (Blanco *et al.,* 2013; Caballero, 2011; 2013; Caballero *et al.,* 2011) y de secundaria (Pino, 2013). Como resultado de este trabajo propusimos, además, un Modelo Integrado de Resolución de Problemas (MIRP), contemplando de manera simultánea la cognición y la afectividad en cada uno de los pasos del modelo (Blanco y Caballero, 2015; Caballero, 2013).

Éste se desarrolla en un ambiente de RP, donde los estudiantes abordan de manera personal la RP, generando sus propias estrategias y comparándolas con otras alternativas. No se trata de mostrar solo los heurísticos, deseamos ayudarles a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones, y a controlar sus actitudes y emociones hacia la RPM, partiendo de su experiencia como resolutores. Todo ello enmarcado en un proceso de acción/reflexión.

El programa consta de cinco bloques que se describen en la bibliografía aportada. Iniciamos las sesiones analizando, con el uso de cuestionarios y puesta en común, sus concepciones, creencias y emociones ante la RP, lo que sirve de introducción al programa. Es necesario considerar actividades matemáticas sugerentes y motivadoras, que planteen diferentes formas de resolución, ilustrando ideas matemáticas importantes aplicables a otros contextos, renunciando a trucos o soluciones sin explicación (Santos, 1996; Blanco *et al.,* 2015). Mediante la acción/reflexión diferenciamos entre problema y ejercicios, aportamos diferentes clasificaciones de problemas, y analizamos los factores que condicionan su comprensión y resolución, partiendo de su propia experiencia.

Resaltamos la importancia de monitorizar los procesos de aprendizaje mediante el control y la regulación de sus propios procesos cognitivos y afectivos, y reflexionando sobre su propio conocimiento. Es decir, es importante ejercitar el metaconocimiento. Ello requiere de un proceso de acción/reflexión por parte de los aprendices, con objeto de generar conocimiento sobre las actividades que vayan realizando.

El MIRP (Blanco y Caballero, 2015; Caballero, 2013; Blanco *et al.,* 2015), elaborado con aportaciones desde las matemáticas y desde la psicología, se desarrolla de manera metódica y secuencial, siempre a partir de problemas concretos. Finaliza con un proceso de evaluación sobre aspectos cognitivos, afectivos y de control de los propios recursos habilitados por los EPPS.

Nuestro objetivo es llevarlos a una concepción más amplia sobre problemas, a la necesidad de ir más allá de los procesos mecánicos y de aplicación de fórmulas, propiciando un aumento del control emocional, mejorando la confianza y seguridad en sí mismos ante la RPM, y una valoración positiva de las técnicas de control emocional en nuestros estudiantes. En la investigación hemos observado una disminución en los bloqueos y abandonos, aumentando la búsqueda de otros caminos de solución, incluyendo

procesos gráficos y/o manipulativos, y valorando la importancia de la comprensión y el análisis de los enunciados.

Además, se constata una mejora en sus prácticas docentes, que fueron estudiadas mediante la observación directa y el seguimiento del foro en la plataforma Moodle y del diario de los EPPS, para recoger sus actuaciones, reflexiones y preocupaciones cuando se enfrentan al trabajo en el aula de primaria. Así, advertimos numerosas intervenciones referentes a considerar las etapas seguidas en la RPM; lo interpretamos como un intento de presentar la actividad de resolver problemas de una manera sistemática y ordenada, incluyendo el uso de heurísticos. Los EPPS empiezan a evaluar y dar pautas de actuación en algunas dificultades concretas que tienen los alumnos de primaria, como resolutores de problemas, sobre la comprensión de los enunciados o los procedimientos a seguir, lo que supone un avance sobre investigaciones anteriores.

Es interesante su aprecio por las estrategias de control emocional y su intento de llevarlas a la práctica, lo que evidencia una modificación en su conducta docente respecto al control del grupo de alumnos. Estos aspectos relacionados con la educación emocional son destacados en sus diarios. Nos parece importante resaltar la integración que realizan de los aspectos cognitivos y afectivos en la RPM pensando en su actuación futura como profesores. Como escribía uno de los EPPS participantes en la investigación: "El taller es útil a la hora de dar clases para que tengamos en cuenta no solo los conocimientos del alumno, sino también sus actitudes y sus emociones que por experiencia sé que influyen mucho, tanto de forma positiva como negativa".

El desarrollo del programa evidenció la falta de referencia a la evaluación sobre la RP, lo que provocó la realización de un nuevo proyecto de investigación, en este caso con profesores de matemáticas en ejercicio (Cárdenas, 2014). Los resultados nos mostraron la necesidad de profundizar sobre este tópico, ya que las prácticas de evaluación de la RP continúan siendo muy tradicionales, desoyendo las recomendaciones curriculares.

Entre los resultados resaltamos que los profesores consideran más importante evaluar lo cognitivo que lo afectivo, que casi obvian, y en lo cognitivo se considera más importante evaluar lo conceptual que lo heurístico (Cárdenas, Blanco, Gómez y Guerrero, 2013). Al igual que en los trabajos iniciales, se constata una contradicción en sus manifestaciones sobre la evaluación y su actuación en el aula, que analizamos por las observaciones, y los instrumentos de evaluación que utilizan (Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero, 2016). El predominio sobre la concepción de la RP como la aplicación y justificación de conceptos matemáticos se constata a través de las pruebas de evaluación, donde difícilmente se encuentran tareas que permitan la evaluación de heurísticos o de aspectos de tipo afectivo. La mayoría de las tareas propuestas por los profesores para evaluar la RP se caracteriza por el uso de contextos matemáticos y realistas, donde los formatos empleados y demandados son básicamente el textual y el numérico; en ellos la demanda cognitiva se limita usualmente al recuerdo y aplicación de una fórmula matemática, y en varios casos requiere la traducción del problema. Los datos que aparecen en los enunciados son suficientes y necesarios e implican una única respuesta (Cárdenas, Blanco y Cáceres, 2016).

6. REFLEXIÓN FINAL

La revisión realizada nos ha permitido tener una visión global de los aspectos que encierra la formación inicial de los profesores de primaria en la RP de matemáticas. No es, y no lo podría ser, una aportación definitiva; la educación es algo dinámico, influido por la personalidad, la época, la sociedad, etc., pero entendemos que algunos aspectos que denotamos en los títulos de los apartados tienen que ser considerados necesariamente y de forma integrada en la formación de los profesores, inicial y permanente. La RPM sigue siendo un contenido específico que nuestros estudiantes adquieren escasamente durante su paso por la enseñanza primaria y secundaria, y del que se ha venido perpetuando la imagen de la RPM como la mera aplicación del tema que se está tratando, lo que hace que, en este aspecto, la formación inicial de profesores se convierta en un lugar fundamental que debería posibilitar el cambio de esta situación en el futuro. Ese es nuestro deseo y hacia ello encaminamos nuestros esfuerzos.

REFERENCIAS

Amato, S. A. (2004). Improving student teachers' attitudes to mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 25-32). Brasilia, Brasil: Universidade de Brasilia.

Ball, D. L. y Wilson, S. (1990). Knowing the subject and learning to teach it: Examining assumptions about becoming a mathematics teacher. *Research Report.* NCRTE Michigan, USA: National Center for Research on Teacher Education.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barnhart, T. y Van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship between pre-service science teachers' ability to attend, analyse and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83-93.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(5), 411-436.

Berliner, D. y Carter, K. (1986). Differences in processing classroom information by expert and novice teachers. Congreso de la Association International d'étude sur pensée des enseignants, ISATT, llevado a cabo en la Universidad de Leuven, Bélgica.

Blanco, L. J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de Profesores de EGB y estudiantes para Profesores.* Badajoz, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Blanco, L. J. (1996). Resolución de problemas aritméticos y formación práctica de los maestros. *Educación Matemática, 8*(1), 53-64.

Blanco, L. J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estu-

diantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação, 6*(2), 45-65.

Blanco, L. J. (2009). *Proyecto Docente e investigador. La Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Maestros.* (Inédito). Universidad de Extremadura, España.

Blanco, L. J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171-185). Madrid, España: Editorial Graó.

Blanco, L. J. y Caballero, A. (2015). Modelo Integrado de Resolución de Problemas de Matemáticas MIRPM. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria* (pp. 109-122). Cáceres, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria.* Cáceres, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Recuperado de: http://dehesa.unex.es/handle/10662/5241

Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2013). Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. *The Mathematics Enthusiast.* [Special Issue] *International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, 10*(1-2), 335-364.

Blanco, L. J., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de Profesores. *Revista de Educación,* (307), 427-446.

Bohórquez, L. A. y D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 85-103.

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics, 106*(4), 173-180.

Caballero, A. (2011). Descripción de un Programa de Intervención en Resolución de Problemas y Control Emocional con Maestros en Formación Inicial. *International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1*(2), 45-54.

Caballero, A. (2013). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial* (tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Badajoz, España. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2011). Problem Solving and Emotional Education in Initial Primary Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 7*(4), 281-292.

Calderhead, J. (1988). Conceptualización e investigación del conocimiento profesional de los profesores. En L. M. Villar (Ed.), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el currículum y la formación del profesorado* (pp. 21-39). Alicante, España: Marfil.

Cárdenas, J. A. (2014). *La evaluación de la Resolución de Problemas en Matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria* (tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Badajoz, España. Recuperado de: http://dehesa.unex.es/handle/10662/2050

Cárdenas, J. A. y Blanco, L. J. (2015). La Resolución de Problemas de Matemáticas como contenido en el Currículo de Primaria. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria* (pp. 23-37). Cáceres, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J. y Cáceres, M. J. (2016). La evaluación de las matemáticas: Análisis de las pruebas escritas que se realizan en la secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (48), 59-78.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Gómez, R. y Guerrero, E. (2013). Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En V. Mellado, L. Blanco, B. Borrachero y J. Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp. 67-88). Badajoz, España: DEPROFE.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2016). Manifestaciones de los Profesores de Matemáticas sobre sus Prácticas de Evaluación de la Resolución de Problemas. *Bolema, Rio Claro (SP), 30*(55), 649-669.

Carrillo, J. y Climent, N. (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas.* Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT, 3*(1), 19-36.

Clandinin, J. y Connelly, M. (1988). Conocimiento práctico personal de los profesores. Imagen y unidad narrativa. En L. M. Villar (Ed.), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el currículum y la formación del profesorado* (pp. 39-63). Alicante, España: Marfil.

Climent, N., Domínguez, M. D. y Santiago, R. (1999). Una experiencia de reflexión sobre la formación Matemática del maestro de Primaria. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas* (pp. 183-190). Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.

Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Badajoz, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Cooney, T. J. (1985). A beginining teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(5), 324-336.

Cooney, T. J. (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the psychology of Mathematics education* (vol. 2, pp. 225-232). Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Córcoles, A. C. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKÉ, 14*(25), 7-28.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 131-147.

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A model. *Journal of Educational for Teaching, 15*(1), 13-33.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (13), 39-61.

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics,* (70), 71-90.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista Unión,* (2), 15-32. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/2/Union_002_004.pdf

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). Lérida, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gómez, R. y Caballero, A. (2015). La ansiedad de los estudiantes para maestro ante la enseñanza de las matemáticas. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria* (pp. 59-80). Cáceres, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Goos, M., Arvold, B., Bednarz, N., DeBlois, L., Maheux, J., Morselli, F. y Proulx, J. (2009). School experience during pre-service teacher education from the students' perspective. En R. Even y D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 83-91). Boston, USA: Springer.

Ivars, P., Buforn, A. y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

Leinhardt, G. (1989). Math Lessons. A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 52-75.

Livingston, C. y Borko, H. (1989). Expert-Novice differences in teaching: a cognitive analysis and implications for teacher education. *Journal of Teacher Education, 40*(4), 36-43.

Malaty, G. (1988). What is wrong with the 'back to basics' movements, and what wrong with the 'new math' movement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 19*(1), 57-65.

Manoucheri, A. (1998). Mathematics curriculum reform and teachers: What are the dilemmas? *Journal of Teacher Education, 49*(4), 276-286.

Marks, R. (1989). *What exactly is Pedagogical Content Knowledge? Examples from Mathematics*. San Francisco, California, USA: American Educational Research Association.

McLeod, D. B. y Adams, V. M. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*. New York, USA: Springer-Verlag.

Mellado, V., Blanco, L. J. y Ruiz, C. (1998). A framework for learning to teach sciences in initial primary teacher education. *Journal of Science Teacher Education, 9*(3), 195-219.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación,* (367), 36-62. Recuperado de: https://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulos367/re36702.pdf?documentId=0901e72b81b52850

Moreno, M. D., Hernández, V. y Socas, M. (2004). Respuestas del alumnado de magisterio a un cuestionario sobre números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación matemática, 6*, 53-275.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1980). *Problem solving in school mathematics. 1980 Yearbook*. Virginia, USA: NCTM.

Oliveira, H. y Hannula, M. S. (2008). Individual prospective Mathematics Teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 13-34). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD). (2014). *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems* (vol. 5). PISA, OECD Publishing. Recuperado de: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-V.pdf

Peker, M. (2009). Pre-service teachers' teaching anxiety about mathematics and their learning styles. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 5*(4), 335-345.

Pino, J. A. (2013). *Concepciones y prácticas de los estudiantes de Pedagogía Media en Matemáticas con respecto a la Resolución de Problemas, y diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problema*s (tesis doctoral). Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. En M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos y J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática:*

Temas de Investigação (pp. 185-239). Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação Matemática da SPCE.

Programme for International Student Assessment (PISA). (2003). *Learning for tomorrow´s world. First results from PISA 2003.* OCDE.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. *Actas del XII Simposio de la SEIEM* (pp. 93-111). Badajoz, España: SEIEM.

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D., Montes, M. A., Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica – distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca, España: SEIEM.

Rowland, T. (2014). The Knowledge Quartet: The genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education, 1*(3), 15-43. Recuperado de: http://revistas.rcaap.pt/sisyphus/issue/view/293

Santos, L. M. (1996). Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Educación Matemática, 8*(2), 57-69.

Santos, L. M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Actas del XII Simposio de la SEIEM* (pp. 157-187). Badajoz, España: SEIEM.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Vittrock (Ed.), *Handbook of Research on teaching* (pp. 3-36). New York, USA: Macmillan.

Sierra, M. (1987). El currículum de Matemáticas y su Didáctica en las escuelas de Formación del Profesorado de E.G.B. *Studia Pedagógica, 19,* 101-114.

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (2011). *La formación inicial del profesorado de Matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y máster de secundaria.* Seminario celebrado en Castro Urdiales, España. Recuperado de: http://www.SEIEM.es/sem/2011_castro.shtml

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, USA: Macmillan.

Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Razonamiento proporcional: Un análisis de las actuaciones de maestros en formación. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII,* 121-137.

Walen, S. B., Williams, S. R. y Garner, B. E. (2003). Pre-Service Teachers Learning Mathematics

Using Calculators: A Failure to Connect Current and Future Practice. *Teaching and Teacher Education, 19*(4), 445-462.

Zan, R., Brown, L., Evans, J. y Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 113-121.

Zevenbergen, R. (2004). Study groups as tool for enhancing preservice students' content knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 6*, 4-22.

El esquivo dominio del conocimiento del profesor de matemáticas

Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva, España

Resumen: Las concepciones de los profesores sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje fueron el punto de partida de nuestras investigaciones acerca del conocimiento del profesor (Carrillo y Contreras, 1995). Este documento pretende mostrar cómo ha evolucionado nuestra investigación, donde el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) es el hilo conductor y resultado más patente, y donde las concepciones forman parte de su núcleo. En la introducción se justifica la elección de la temática y se presenta su estructura, que contendrá elementos de una trayectoria de investigación, con sus antecedentes, fundamentos teóricos, fundamentos metodológicos, resultados y conclusiones, enmarcados en un momento temporal y contextual diferente.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a que el contexto de descubrimiento, donde se muestran los procesos que conducen a nuevas ideas, es más cercano a nuestro posicionamiento que el de justificación, mostraremos una trayectoria donde pasado (estudios sobre concepciones), presente y futuro (conocimiento especializado del profesor) pongan de relieve la evolución de los intereses de un grupo que comenzó investigando las concepciones de los profesores sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello hemos elegido aquellas investigaciones que permitan comprender, como un proceso, nuestras aportaciones en la elaboración del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, que hoy centra nuestra investigación. Además, con ello expresamos nuestro agradecimiento a quienes han contribuido a la consolidación de un equipo de investigación internacional, el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), coordinado desde la Universidad de Huelva.

Desde hace 25 años nuestras investigaciones se han centrado en el estudio del conocimiento del profesor. De nuestro interés inicial por las concepciones y creencias del profesor (Carrillo y Contreras, 1995), pasamos a analizar su desarrollo profesional, constituyendo las concepciones una dimensión importante dentro de dicho desarrollo. Estos elementos conformarán la primera parte del trabajo. A continuación, se expondrá

el objeto de investigación actual del grupo, centrado en el MTSK. Acabaremos compartiendo nuestras reflexiones sobre la investigación futura del grupo.

2. PRIMEROS ANTECEDENTES: LA INVESTIGACIÓN SOBRE CONCEPCIONES Y CREENCIAS

Nuestro interés por las concepciones y creencias surgió en el transcurso de actividades de formación permanente del profesorado de educación secundaria y bachillerato, caracterizadas por su enfoque proposicional. Nuestro trabajo, centrado en la Resolución de Problemas (RP), entendida como un conocimiento útil para el profesor en su doble vertiente de resolutor y gestor en el aula, parecía obstaculizado por aspectos muy vinculados a la experiencia personal. Pensábamos que trabajar con profesores una forma diferente de hacer matemáticas (a través de la resolución de problemas) contribuiría a un cambio en sus aulas, pero parecía no ser así.

Comenzamos a buscar razones de ello desde una perspectiva cualitativa, utilizando como informantes a profesores de matemáticas de las etapas mencionadas. Elaboramos nuestros primeros instrumentos de recogida de información y también los primeros instrumentos de análisis. Los instrumentos de recogida de información eran, frecuentemente, recursivos: cuestionarios, a modo de detonantes, que luego se seguían de entrevistas semiestructuradas, antes y después –evocación del recuerdo– de la acción; observación de la acción e invitación a analizar la acción de otro docente; análisis de los artefactos –programaciones, instrumentos de evaluación, entre otros. Los instrumentos de análisis de la información se organizaron en forma de sistema de categorías e indicadores que emergieron en un proceso *bottom-up* y *top-down*. Los modelos para el análisis de las concepciones de los profesores sobre la matemática (CM), sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje (CEAM) y sobre la resolución de problemas (CRP) fueron parte de nuestras primeras producciones (p. ej. Carrillo y Contreras, 1995), modelos que estuvieron inspirados en trabajos del ámbito de la didáctica de las ciencias experimentales de miembros del grupo IRES (Investigación y Reforma Escolar, de la Universidad de Sevilla) al que pertenecimos nuestros primeros años como investigadores. Los resultados de aquellas investigaciones nos permitieron conjeturar que el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas necesitaba tener en cuenta sus concepciones y creencias, y que los propios profesores necesitaban tomar conciencia de las mismas (Guevara, Contreras y Carrillo, 1997).

Cuando introdujimos la RP como un vértice en la investigación con concepciones, establecimos algunas relaciones entre las concepciones y la capacidad de resolver problemas, como la relación entre una visión instrumentalista de la matemática y la escasa dedicación al control en la RP, o cómo una visión platónica o dinámica se relacionaba con una dedicación mayor a las fases del proceso de RP.

Respecto a las relaciones entre concepciones sobre la matemática y las tendencias

didácticas,[1] encontramos que las tendencias tradicional y tecnológica estaban más cerca de una concepción platónica o instrumentalista de la matemática, o que una concepción de la matemática sobre resolución de problemas estaba más cerca de las tendencias didácticas espontaneísta e investigativa (Carrillo y Contreras, 1994). Además, vimos cómo el papel que un profesor otorga a la RP en su aula nos informa de su tendencia didáctica (Contreras y Carrillo, 1998) y que las concepciones del profesor pueden guardar relación con su modo de resolver problemas matemáticos [como resolutor, no como profesor]. Desde ese momento, el papel de la gestión de la RP en el aula fue determinante en nuestra participación en programas de formación inicial y continua (Carrillo y Contreras, 2000).

Las concepciones parecían tener un papel relevante en el desarrollo profesional de los profesores (Carrillo, Contreras y Climent, 1998; Contreras, Carrillo y Climent, 1999; Climent, Contreras y Carrillo, 1999), impulsando ese desarrollo u obstaculizándolo, lo que justificaba la escasa eficacia de determinadas estrategias de formación del profesorado. Manteníamos en aquellos momentos una romántica visión del desarrollo profesional, evolucionando desde la tendencia tradicional hasta la investigativa (Carrillo y Contreras, 1993), con la RP como el vehículo ideal para ello. Hoy estamos más cercanos a la comprensión de la complejidad que supone ese desarrollo; a partir del trabajo de Climent (Climent y Carrillo, 2003), asumimos el desarrollo profesional del profesorado más como el fruto del progreso en su reflexión (profundidad y complejidad de la misma) que como el acercamiento a tendencias didácticas o concepciones establecidas externamente.

Las concepciones y creencias, que hoy forman parte central del MTSK, siguen interesándonos, no por su estudio en sí mismas, sino porque nos permiten explicar algunas de las decisiones que el profesor toma en el aula cuando intentamos acceder a su conocimiento, y sobre todo por sus relaciones con cada uno de los subdominios del MTSK y para comprender mejor las relaciones entre esos subdominios.

3. EL PASO A LA INVESTIGACIÓN SOBRE FORMACIÓN INICIAL Y DESARROLLO PROFESIONAL

Nuestra producción sobre desarrollo profesional (DP) ha estado muy vinculada al Proyecto de Investigación colaborativa (PIC). Destacamos la elaboración de un modelo cognitivo para interpretar el DP de un profesor de matemáticas en un entorno colaborativo (Carrillo, Climent Contreras y Muñoz-Catalán, 2007), a partir del trabajo de Sfard (1991), en relación con las fases de interiorización, condensación y cosificación para explicar los procesos cognitivos referidos al aprendizaje de las matemáticas. Este trabajo mejoró nuestra comprensión de la complejidad del desarrollo profesional. Supuso nuestro primer uso de la teoría emergente de los datos (concretamente el método de comparación constante) como elemento metodológico, un uso que es ahora frecuente

[1] Término que pone de relieve la dificultad de encontrar muestras de concepciones en estado puro.

en las investigaciones con MTSK. Este trabajo, como veremos, será de gran ayuda para adentrarnos en el conocimiento del formador de profesores de matemáticas. Además, ese análisis nos abrió las puertas a la investigación sobre el conocimiento del profesor, al intentar comprender qué elementos del conocimiento respaldaban sus acciones y decisiones.

Hemos trasladado esta visión del DP a la formación inicial, como lugar donde promover una actitud reflexiva. En Climent, Romero, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras (2013) diseñamos un experimento de enseñanza con estudiantes para maestro[2] (EPM), con objeto de fomentar la vinculación entre la teoría y la práctica, sobre la base de procesos reflexivos, a través del análisis de un video de una situación real de enseñanza de una maestra de educación primaria. La investigación mostró cómo los EPM adoptan con bastante naturalidad, de este modo, su rol como docentes, relegando su papel como aprendices (de matemáticas), pasando su interés por los procesos de enseñanza y aprendizaje del contenido a tener tanta relevancia como el contenido en sí.

En formación inicial, nuestra preocupación por el conocimiento del contenido matemático de los EPM ha sido constante estos últimos años, de ahí la variedad de nuestras aportaciones en este ámbito y la determinación del contenido de dicha formación. Ambos aspectos han influido en la elaboración de MTSK y en la planificación de su desarrollo futuro. Esta preocupación ha sido compartida por investigadores del área de conocimiento de otras universidades españolas, lo que ha supuesto que parte del trabajo desarrollado entre congresos por el grupo de Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor, de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), se haya dedicado a estos temas. Así, en Contreras y Climent (1999) recogemos las aportaciones realizadas en un encuentro transfronterizo de educación matemática en el que se reflexionó sobre modelos de formación y DP, en un momento en el que las universidades españolas revisaban los planes de estudio para la formación de maestros.

En esta misma línea se encuentra el trabajo sobre el método de casos en la formación de maestros (Contreras, 1999), donde, tras un análisis de los modelos bajo los que se desarrollaba entonces la formación de maestros, se abordaban dilemas que ese análisis suscitaba y, dentro del marco teórico sobre pensamiento del profesor, se realizaba una aproximación desde una perspectiva cognitiva, incidiendo particularmente en el conocimiento didáctico del contenido. Tres años después, desde la misma perspectiva, editamos una monografía (Contreras y Blanco, 2002) que pretendía ser un referente para los formadores de maestros. Buscábamos un marco teórico para fundamentar nuestras propuestas formativas, algo que hoy proporciona MTSK y que caracterizará parte de nuestro trabajo en los próximos años, partiendo de la idea de conocimiento matemático profesionalizado (para diferenciarlo del usado en otras profesiones), que tiene una relación muy estrecha con el conocimiento especializado que caracteriza a MTSK.

Un obstáculo para la formación inicial mostrado en nuestros trabajos con EPM ha

[2] En España, se llama maestro al profesor de las etapas educativas de Infantil (3-5 años) y Primaria (6-11 años).

sido su deficiente formación matemática. En las investigaciones realizadas con EPM en tres universidades españolas (Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012; Montes *et al.*, 2015), pudimos determinar con precisión el estado de la cuestión. En el primero de los trabajos, un estudio exploratorio con un enfoque interpretativo-cualitativo, participaron 42 EPM de educación primaria del último curso de la formación, quienes realizaron una prueba escrita de siete problemas sobre contenidos relacionados con el sentido numérico, la estimación, la jerarquía de operaciones, el cálculo algorítmico, la proporcionalidad, la división con divisor no entero y la identificación y ordenación de números expresados como fracciones y decimales. Solo algunos informantes mostraron una adecuada adquisición de los conocimientos medidos; la mayoría presentaba dificultades operativas a la hora de descomponer una cantidad no entera de todas las formas posibles, también para comparar y contrastar propiedades numéricas con números racionales, para trabajar con flexibilidad números racionales y porcentajes, y para argumentar y establecer razonamientos numéricos. Así mismo, manifestaban dificultades en la comprensión del significado de las operaciones, para aventurar los resultados de las mismas y para analizar y aplicar razonamientos proporcionales.

Los otros dos trabajos fueron estudios con una metodología tipo *survey,* donde se analizaron dimensiones del conocimiento geométrico, en el primero, y aritmético en el segundo, y se organizaron en un cuestionario de respuesta cerrada con cuatro opciones de las que solo una era correcta y, dentro de las incorrectas, había una *respuesta esperada,* inspirada en resultados de la literatura. Los cuestionarios fueron respondidos por 740 EPM sin formación en didáctica de la matemática relativa a los tópicos estudiados. La mayoría mostraba dificultades en el concepto de altura de un triángulo, en el conocimiento de las características críticas y la clasificación de las figuras planas y cuerpos geométricos, establecían relaciones incorrectas entre área y perímetro, manifestaban conflictos en las relaciones de proporcionalidad en figuras planas y cuerpos geométricos, y tenían dificultades relativas al significado y representación de fracciones, el uso y aplicación de porcentajes, o el uso significativo del sistema de numeración decimal.

Los subdominios de nuestro modelo MTSK, y particularmente las categorías del KoT (conocimiento de los temas) analizadas en este tercer estudio mencionado, conforman una estructura fundamentada de lo que debería abordarse en la formación inicial de los maestros. Para ello, es imprescindible partir de un conocimiento matemático base, sólidamente construido en etapas educativas anteriores, que permita abordar, durante la formación inicial, las componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido y profundizar (en el sentido de Ma, 1999) en el conocimiento matemático (especializado) que requiere un maestro para realizar una buena práctica docente. Estas categorías también han proporcionado una mayor sensibilidad teórica (Glaser y Strauss, 1967) que ha mejorado nuestra capacidad de analizar la práctica.

4. CONFIGURANDO EL MODELO MTSK

Como se ha señalado, nuestros trabajos nos han ido mostrando que el conocimiento matemático que necesita un profesor de matemáticas es de diferente naturaleza del que necesitan otros profesionales que utilizan la matemática. Al intentar comprender esa diferenciación nos encontramos con la inestimable aportación del grupo de Michigan, principalmente por su consideración del subdominio denominado *conocimiento especializado del contenido* (specialized content knowledge).

Los antecedentes principales de MTSK se encuentran en los trabajos de Shulman (1986; 1987), en *Profound understanding of fundamental mathematics* (Ma, 1999) y en *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT)[3] (Ball, Thames y Phelps, 2008). MTSK avanza en la caracterización operativa, desde el punto de vista analítico, del conocimiento matemático y del didáctico del contenido y considera la especificidad de la enseñanza de la matemática; en ese sentido, la matemática inspira y vertebra todo el modelo, en su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Si el Pedagogical Content Knowledge (PCK) de Shulman puede considerarse un avance especialmente importante, y el HCK (Horizon Content Knowledge) y el SCK (Specialized Content Knowledge) de Ball fueron las aportaciones más relevantes de su modelo (especialmente el SCK), como hemos justificado en Carrillo, Contreras y Flores (2013), MTSK pretende mejorar la comprensión de los aspectos considerados en HCK,[4] solventar los problemas de delimitación entre el SCK y, respectivamente, el CCK (Common Content Knowledge), KCS (Knowledge of Content and Students) y KCT (Knowledge of Content and Teaching), contempla las concepciones del profesor (sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje) como núcleo que permea el conocimiento y considera todo este como especializado.

Dentro del subdominio HCK (Ball y Bass, 2009) se establecían tres subdominios de segundo nivel: HCK (Tópicos), HCK (Práctica) y HCK (Valores). Desde nuestra perspectiva, estos tres subdominios de segundo nivel tienen una naturaleza diferente, dando la impresión de que el HCK abarcaba todo el conocimiento matemático (lo que colisionaba con la existencia de conocimiento matemático común y especializado), manteniendo como nexo relevante la idea de *Matemática elemental desde un punto de vista avanzado* y *Matemática avanzada desde un punto de vista elemental.* HCK(T) incluía, a su vez, dos elementos diferenciados. Como pusimos de relieve en Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán (2013), las ideas principales de la disciplina y la estructura de la misma tienen capacidad de contener todo el conocimiento matemático desde la perspectiva de

[3] El modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) tiene dos dominios: conocimiento matemático (MK), compuesto por los subdominios del conocimiento matemático común (CCK), conocimiento matemático especializado (SCK) y conocimiento en el horizonte matemático (HCK); y conocimiento didáctico del contenido (PCK), compuesto por los subdominios conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), y conocimiento del contenido y el currículo (KCC).

[4] Como señalan Herbst y Kosko (2014), "percibimos que los dominios del KCC y el HCK necesitan una mejor conceptualización" (p. 24).

qué es la matemática, vista como un conjunto de *temas* incardinados en una *estructura*, mientras que los conocimientos relativos al *cómo* se construye formarían parte del HCK (P). Esto justifica nuestra propuesta de clasificación que diferencia tres subdominios: KoT, KSM y KPM.

El conocimiento de los temas (KoT) incluye, además del conocimiento de la matemática como disciplina, la fundamentación teórica de los procedimientos estándar y alternativos, las distintas formas de representación, la fenomenología de los conceptos (en el sentido de Rico, 1997), que enriquece los contextos en los que es posible situar el contenido, y los aspectos de epistemología matemática vinculados a los significados de un contenido. El subdominio del conocimiento de la estructura matemática (KSM) que conforman los conocimientos, tanto más avanzados como más elementales, mediante los que el profesor puede trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa, constituye una visión integrada y relacionada de aquello que es objeto de enseñanza. Consideramos aquí también las grandes ideas (Kuntze *et al.*, 2011) estructurantes de la matemática. Por último, en el conocimiento de la práctica matemática (KPM) hemos incluido aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas, como las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática.

La especificidad de todo el conocimiento del profesor de matemáticas emerge, en gran medida, de los problemas de delimitación entre CCK y SCK. En efecto, la caracterización del CCK de Ball *et al.* (2008) como el conocimiento matemático que puede poseer una persona instruida presenta problemas operativos, pues requeriría la observación de la puesta en práctica del conocimiento de todos esos ciudadanos medios; además, está vinculado a un conocimiento algorítmico (saber hacer). Entendemos más adecuado caracterizar el conocimiento matemático de un modo intrínseco, sin referirlo a otras profesiones que usan la matemática (Flores, Escudero y Carrillo, 2013); entendemos también que el saber hacer se complementa con el saber por qué se hace de una determinada forma, así como el conocimiento de los conceptos que lo fundamentan. Por eso, nuestra propuesta incluye el conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos.

El KFLM (conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas) tiene su origen en el KCS, y trata de superar problemas de delimitación entre KCS y SCK. Además, intenta hacer patente que la matemática condiciona al subdominio, que, por tanto, no debe entenderse como intersección de conocimiento pedagógico general y de conocimiento matemático. El conocimiento de la procedencia de los errores y aquellos elementos que permiten comprender el razonamiento de algunos alumnos cuando resuelven una tarea matemática, que forma parte del SCK de Ball, es un conocimiento específico de la tarea de enseñar matemáticas. Pero en el modelo de Michigan, el conocimiento de las dificultades de los alumnos y de sus errores típicos se asocia al KCS, mientras que el conocimiento de la procedencia matemática del error se ubica en el SCK. Esto justifica el KFLM donde, además del conocimiento de las fortalezas y difi-

cultades, incluimos también el conocimiento de las *teorías de aprendizaje matemático* generadas en la investigación en educación matemática, o de carácter personal, así como el conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con un contenido matemático, y el conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes.

En el mismo sentido de integración de la matemática, hablamos de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), en lugar de conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). En KMT incluimos el conocimiento de las estrategias de enseñanza, los recursos y materiales y el conocimiento (institucional o personal) de teorías de enseñanza generadas en la investigación en educación matemática, como la basada en la resolución de problemas.

Finalmente, el conocimiento del currículo debe enriquecerse con las aportaciones de las diferentes sociedades de profesores de matemáticas, de educación matemática y los diferentes responsables internacionales de educación matemática acerca de lo que cabe esperar que un estudiante aprenda en cada momento y de los argumentos que lo justifican. Esto supone ampliar la noción de Shulman (1986) y Ball *et al.* (2008), de conocimiento curricular, en lo que denominamos conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS), conformado por todos aquellos referentes que muestran en qué momento debe/puede aprenderse cada contenido y con qué nivel de profundidad.

Estos son los seis subdominios del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017): KoT, KSM y KPM dentro del MK, y KFLM, KMT y KMLS dentro del PCK (véase la figura 1).

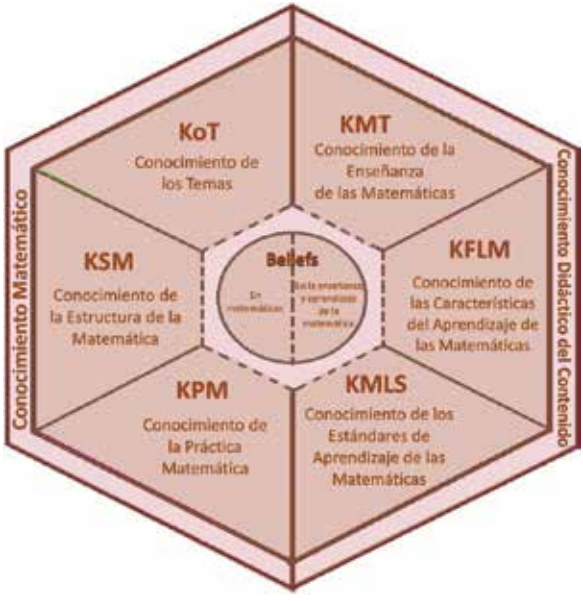


Figura 1. Subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

En Montes, Contreras y Carrillo (2013) mostramos detalles de las diferencias operativas entre MKT y MTSK mediante el análisis de un episodio de un profesor de educación secundaria. En la representación aparecen las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma como elemento que el investigador ha de considerar a la hora de entender de una forma más completa el conocimiento del profesor.

5. NUESTRA INVESTIGACIÓN Y NUESTRAS PERSPECTIVAS CON MTSK

La primera tesis doctoral sobre MTSK fue realizada por Rojas (2014), quien realizó un estudio de caso con un profesor de educación primaria y otro de educación secundaria con el contenido de las fracciones. Se eligieron profesores expertos, con el objeto de aportar información rica para obtener elementos caracterizadores del MTSK. Se aplicó el Análisis Didáctico para desarrollar categorías del modelo. Moriel (2014) también abordó las fracciones, concretamente los modos de justificar el algoritmo de la división de fracciones. Diferentes subdominios del MTSK se pusieron de relieve a partir de los indicios encontrados entre algunos profesores y estudiantes para profesor. La tesis doctoral de Vasco (2015) se dedicó al estudio del conocimiento especializado (MTSK) de dos profesores universitarios de álgebra lineal (tema de matrices y determinantes). Se estudió el conocimiento y las concepciones evidenciadas por los profesores (a través de la observación no participante en sus aulas y entrevistas previas y posteriores a las sesiones). Se interpretó el conocimiento de los profesores con las relaciones que se observaron entre aquél y sus concepciones. En la tesis de Montes (2015), se estudió el conocimiento especializado de un profesor de secundaria y bachillerato acerca del concepto de infinito, como elemento subyacente a multitud de conceptos presentes en el currículo.[5] Se desarrollaron entrevistas que permitieron dar contenido a los diferentes subdominios para el caso del conocimiento del infinito. En su tesis, Flores-Medrano (2015) profundizó en algunos elementos del modelo, obteniendo indicadores del conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas y del conocimiento de la enseñanza de esta disciplina; avanzó en la caracterización del conocimiento de la práctica matemática y obtuvo algunos indicios de relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y sus concepciones. La investigación de Escudero-Ávila (2015) se desarrolla en un contexto de formación continua que tiene la particularidad de ser un entorno virtual interactivo. Es un estudio cualitativo realizado a través de un estudio de caso instrumental con un enfoque interpretativo. Las conclusiones de este trabajo muestran avances en la caracterización de los subdominios KFLM y KMT, principalmente. Se ofrecen categorías y subcategorías de conocimiento, así como ejemplos potentes que ilustran cada una de ellas, proporcionando información sobre la forma en la que puede aproximarse el investigador a este conocimiento y sobre el tipo

[5] En Montes, Contreras y Carrillo (2018) volvemos a explorar el concepto de infinito como un elemento transversal del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

de interacciones con otros subdominios del MTSK. Por su parte, la tesis de Aguilar (2016) supone el abordaje en profundidad de relaciones entre subdominios del MTSK y entre estos y el dominio de las concepciones.

La observación y el análisis de la práctica de profesores de matemáticas nos está permitiendo el desarrollo del modelo y el afinamiento del sistema de categorías al ser aplicado a diferentes temas matemáticos y niveles educativos. Además, nos parece aún más relevante la oportunidad que nos aportan los escenarios que hemos observado como situaciones de aprendizaje, tanto para la formación inicial como para el DP. Por ello, junto con el objetivo de continuar el desarrollo del modelo, hemos comenzado a utilizarlo como organizador del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, de forma que la estructura del modelo, junto con una selección de episodios extraídos de la observación de la práctica, se constituyan en objeto de análisis y reflexión con profesores en formación. El análisis de un episodio permite desgranar el conocimiento que se pone en juego en una acción de enseñanza, y ayuda a reflexionar sobre qué otros conocimientos habrían permitido al profesor una gestión diferente de la situación analizada. En ambos casos, por tanto, y lejos de una consideración evaluativa, MTSK puede convertirse en un poderoso instrumento para la formación de los profesores de matemáticas. Ese potencial para la reflexión se ha manifestado en la tesis doctoral de Liñán (2017).

En los últimos años hemos explorado las relaciones entre los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) (Kuzniak, 2011) y MTSK (Flores-Medrano *et al.,* 2016), y hemos mostrado que la estructuración del conocimiento del profesor que proporciona MTSK, particularmente la consideración de sus subdominios, permite comprender el conocimiento que el profesor pone en juego en la transición entre los distintos ETM (idóneo, personal y de referencia), así como las relaciones entre estos.

6. MIRANDO HACIA DELANTE

Nuestra investigación nos ha dejado algunos temas abiertos a la vez que, como acabamos de señalar, nos ha guiado hacia nuevas perspectivas. Entre los temas abiertos, o de *desarrollo* de MTSK, podemos destacar la delimitación de categorías dentro del conocimiento de la práctica matemática (KPM), el papel de la fenomenología (inicialmente situada en el KoT, pero que por sus relaciones con otros subdominios, como el KMT, nos invita a seguir profundizando), las relaciones entre los distintos subdominios (que especialmente las tesis de Aguilar, 2016, y de Liñán, 2017, nos han evidenciado), la profundización en el estudio del dominio afectivo o el papel de la ejemplificación en MTSK (que, a su vez, forma parte de la línea de estudio que denominaremos MTSK *y tareas de enseñanza,* que veremos más adelante).

El conocimiento de los ejemplos, cuyo uso y calidad hemos puesto de relieve que es diferente en profesores noveles y expertos (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2012), puede ubicarse en distintos subdominios que es preciso determinar. Los ejemplos y espacios

de ejemplo nos pueden informar del KoT (de su calidad y de su riqueza), así como del KSM –conocimiento de ejemplos que potencian conexiones interconceptuales–, y si a través del uso de ejemplos indagamos sobre la intencionalidad con la que el profesor los usa, nos podrán informar del KMT, en el sentido del conocimiento de ejemplos que ayudan a construir conceptos o superar obstáculos de aprendizaje o disponer de criterios –usando transparencia y variación (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2009; Figueiredo y Contreras, 2013)– que permitan construir una adecuada secuencia de ejemplos, o del KFLM (por qué los elige en relación con dificultades de sus estudiantes). Pero, además, como queda sugerido antes, también el uso de los ejemplos podría informar del KPM (por ejemplo, a través del uso que el profesor hace de los contraejemplos).

Dentro de los temas abiertos, estamos interesados en analizar qué conocimiento especializado se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje de *temas matemáticos* (como la relación área-perímetro, la idea de infinito, la clasificación de figuras planas o las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes), y cómo desarrollar conocimiento especializado a partir del análisis de situaciones reales de aula. Por ello, a partir del trabajo de Liñán (2017) nos planteamos utilizar parcialmente aquellas situaciones de aula potencialmente ricas para movilizar MTSK en los profesores o futuros profesores a partir del diseño de viñetas, y analizar qué conocimiento se moviliza con esa estrategia formativa. Nos preguntamos en qué medida la discusión y el análisis de las viñetas darán la oportunidad a los profesores de observar y reflexionar sobre el aprendizaje de sus alumnos, movilizando conocimiento previo y creando la posibilidad de generar nuevo conocimiento, considerando las interacciones entre maestro y alumnos en las viñetas (Climent *et al.,* 2016).

En la línea *MTSK y tareas de enseñanza*, además del aspecto ya citado del papel de la ejemplificación en MTSK, incluiremos el estudio de los subdominios del MTSK puestos en juego en procesos de enseñanza con soporte tecnológico (como Cabri o Geogebra) o en el tratamiento del error como estrategia formativa.

Otro tema, abierto recientemente, es la caracterización del *conocimiento del formador de profesores de matemáticas* (MTEK). La literatura acerca de este conocimiento (desde la perspectiva de la educación matemática) no es abundante, lo que hace que el ámbito sea de interés en nuestros proyectos de investigación.

Algunos autores han sugerido que el conocimiento del formador de profesores es cualitativamente diferente al de los profesores (Jaworski, 2008; Perks y Prestage, 2008; Smith, 2003; Zopf, 2010), señalando que las diferencias radican esencialmente en el alcance y la profundidad del conocimiento que manejan, de alguna forma, fruto de un proceso madurativo en el que la matemática es vista, progresivamente, desde una mayor complejidad y desde una perspectiva más holística, donde las relaciones son más profundas y patentes. Conviene en este punto recordar los procesos de interiorización, condensación y cosificación de Sfard (1991) para la construcción de nociones abstractas, que fueron extendidos por Carrillo *et al.* (2007) para la construcción del conocimiento profesional. Podríamos ver estos procesos madurativos como ciclos continuos que

comienzan centrados exclusivamente en el contenido matemático, donde después ese contenido matemático es visto como objeto de enseñanza y aprendizaje, para continuar viéndolo como un conocimiento profesional. Jaworski y Huang (2014) contemplan esta idea desde la perspectiva de la transformación del conocimiento disciplinar en formas a través de las que los aprendices (estudiantes o estudiantes para profesor) pueden desarrollar sus propias versiones de ese conocimiento. Este proceso de transformación lo contemplan en dos niveles (de formadores a profesores y de profesores a estudiantes) que interactúan entre sí.

Para Zopf (2010), el conocimiento matemático para la enseñanza de los formadores abarca todo el conocimiento matemático para la enseñanza, y algo más,[6] formando una parte importante de ese algo más las conexiones y el conocimiento de cómo se construye y valida el conocimiento matemático. Así, sospechamos que dos de los elementos diferenciadores los podremos encontrar en el KSM y en el KPM.[7] Necesitamos profundizar en estas diferencias y también en aquellos conocimientos que son propios del formador. Vislumbramos que hay elementos nuevos, como el conocimiento sobre las ideas erróneas que los futuros profesores pueden tener acerca de un tema, sobre cómo abordar su reconstrucción (usando, en su caso, su conocimiento sobre las características y relaciones de cada modelo de representación). Con el fin de promover conexiones entre conceptos para fortalecer la comprensión de los futuros profesores, los formadores de profesores han de tener *conocimiento sobre la estructura matemática* de mayor profundidad que la que esperan que tengan sus estudiantes y, sobre todo, un conocimiento sobre cómo construir en ellos esas conexiones (conocimiento de corte metacognitivo que es preciso ubicar en algún subdominio).

Las dos últimas líneas que queremos incorporar se refieren a las diferencias entre el *MTSK de cada nivel educativo*, desde educación infantil hasta los estudios universitarios, y análisis del conocimiento especializado del profesor de otras disciplinas (que hemos llamado XTSK), de momento solo iniciado en el ámbito de la biología y en el de la química.

Nuestro propósito ha sido y es comprender mejor el fenómeno objeto de estudio, sin pretensiones de establecer generalizaciones. Por ello, nuestra investigación se enmarca en una perspectiva interpretativa (Latorre, del Rincón y Arnal, 2003) y su diseño corresponde al estudio de casos (Stake, 2000).[8] Tomamos la información de las observaciones de clases, entrevistas previas y posteriores a las clases, entrevistas temáticas y cuestionarios (al profesorado), así como foros de discusión online (que utilizamos en Escudero *et al.,* 2015). Los informantes son elegidos intencionalmente, coincidiendo con Lincoln y

[6] Centrado solo en las diferencias en MK, establece las siguientes características diferenciadoras: carácter panorámico y conectado (más allá del conocimiento fragmentado que manejan los estudiantes), fluido e intencional.

[7] El KPM parece que puede actuar de vehículo principal de comunicación cuando se reconstruye el conocimiento matemático para su enseñanza.

[8] Salvo los estudios en los que expresamente se ha citado otro procedimiento, como los experimentos de enseñanza mencionados.

Guba (1985), quienes sostienen que este tipo de selección incrementa el rango de datos en relación con la transferibilidad, y con Patton (1990), quien afirma que de este modo el estudio se provee de datos más ricos.

Somos conscientes de la necesidad de profundizar en los criterios de validez y calidad de la investigación, particularmente aquella en la que se usan métodos cualitativos, dada la íntima relación existente entre, por un lado, el proceso y los métodos de investigación y, por otro, los resultados que produce. Por ello, efectuamos una doble aproximación, *top-down* y *bottom-up* (Grbich, 2007), combinando la búsqueda de evidencias (con el referente de nuestros modelos) con la implementación de nuestra sensibilidad teórica para captar la emergencia de elementos que puedan modificar las herramientas teóricas. Así mismo, para reforzar el rigor de nuestro estudio, solemos buscar explicaciones alternativas a los datos, así como datos que pongan en tela de juicio nuestros resultados.

Para el análisis de los datos, partimos del marco teórico del MTSK. La modelización de la enseñanza está basada en los trabajos de Schoenfeld y colaboradores (Schoenfeld, 2000; Schoenfeld, Ministrell y Van Zee, 2000), y en la adaptación de Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2012). El análisis de creencias y concepciones se realiza con los instrumentos desarrollados por miembros del equipo de investigación (Carrillo y Contreras, 1994; 1995). Los trabajos en los que pretendemos avanzar en la configuración de MTSK como herramienta para el diseño de tareas y programas en la formación (inicial y continua) del profesorado, se abordarán como un *experimento de enseñanza* enmarcado dentro de la *investigación de diseño* (Steffe y Thompson, 2000).

7. REFLEXIONES FINALES

Un elemento esencial del trabajo desarrollado es nuestro vínculo con el proyecto de investigación educativa de la Junta de Andalucía "Resolución y formulación de problemas en el aula de matemáticas", que cuenta entre sus miembros con profesorado de educación infantil, primaria, secundaria y universidad, potenciado por la estructura organizativa y el hábito de discusión y trabajo en equipo del SIDM, en la Universidad de Huelva, que desde el año 2001 se reúne mensualmente, con la participación de todos sus integrantes a través de conexión por videoconferencia.

Las concepciones de los profesores fueron el punto de arranque de nuestras investigaciones (Carrillo y Contreras, 1995) y siguen siendo objeto de nuestros estudios. Es más, son el centro de nuestro modelo de análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, desarrollado con la intención de realizar análisis comprensivos de la práctica, que nos han permitido identificar el conocimiento que un profesor utiliza en el desarrollo de tareas profesionales en diferentes niveles educativos, diferentes contextos de enseñanza y aprendizaje, y también con diferentes contenidos matemáticos. Ello ha contribuido al desarrollo profesional de los miembros del equipo, sobre todo

de los profesores cuya práctica ha sido objeto de análisis. Si nuestro punto de partida fue el inconformismo con los resultados de las actividades de formación permanente en las que participábamos hace casi tres décadas, nuestro objetivo actual es trasladar a la formación inicial todo lo que hemos aprendido en los procesos de investigación colaborativa en los que se ha generado el modelo MTSK.

Hemos ido ampliando nuestras lentes y hemos sido capaces de cubrir el camino trazado hasta aquí, sin duda, por la riqueza que supone el factor humano del equipo del que formamos parte. Esa ha sido y será nuestra mayor baza.

AGRADECIMIENTOS

El Gobierno español (EDU2013-44047-P and EDU2016-81994-REDT) y el Centro de Investigación COIDESO (Universidad de Huelva, España) apoyaron esta investigación.

REFERENCIAS

Aguilar, Á. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Oldenburg, Germany.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1993). La identificación de las concepciones del profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de estrategias de formación del profesorado. *VI Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* Sevilla, España.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1994). The Relationship Between the Teachers' Conceptions of Mathematics and of Mathematics Teaching. A Model Using Categories and Descriptors for their Analysis. *18th PME Conference*, Lisboa, Portugal.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática, 7*(3), 79-92.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2000). Formación inicial de los maestros y resolución de problemas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 3*(3), 515-528.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(1), 33-44.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining spe-

cialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Climent, N. (1998). Teacher's Beliefs: Starting Point for Professional Development. *CIEAEM 50*, Neuchâtel, Switzerland.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-205.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(3), 387-404.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, *61*, 23-35.

Climent, N., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (1999). The heterogeneous character of the student teachers thought. *23rd PME Conference*, Haifa, Israel.

Climent, N., Montes, M. Á., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *AIEM, 9*, 85-103.

Climent, N., Romero, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Relime, 16*(1), 13-36.

Contreras, L. C. (1999). El método de casos en la formación de maestros. Una aproximación desde la educación matemática. En J. Carrillo y N. Climent (Eds.), *Modelos de formación de maestros en matemáticas* (pp. 149-162). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Contreras, L. C. y Blanco, L. (Eds.). (2002). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente*. Cáceres, España: Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Contreras, L. C. y Carrillo, J. (1998). Diversas concepciones sobre la resolución de problemas en el aula. *Educación Matemática, 10*(1), 26-37.

Contreras, L. C. y Climent, N. (eds.). (1999). *La formación de profesores de matemáticas. Estado de la cuestión y líneas de actuación*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (1999). The role of professional knowledge in the gap between wishes and practice. *CIEAEM, 51,* Chichester, United Kingdom.

Contreras, L. C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M. C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio de las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Bolema, 26*(42B), 433-458.

Escudero, D., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. Á. (2015). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *ZETETIKE, 17*(32), 31-61.

Figueiredo, C. A., Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2012). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación Matemática, 24*(1), 73-106.

Figueiredo, C. A., y Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *AIEM, 3*, 45-68.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII,* (pp. 275-282). Bilbao, España: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: ERME.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Flores-Medrano, E., Montes, M. Á., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C. y Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221.

Glaser, B. y Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. New York, USA: Aldine Publishing Company.

Grbich, C. (2007). *Qualitative Data Analysis: An Introduction*. London, England: Sage.

Guevara, F., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (1997). Un programa de formación de profesores de matemáticas desde una aproximación al conocimiento sobre sus creencias. *RELIEVE, 3*(2). (Edición electrónica).

Herbst, P. y Kosko, K. (2014). Mathematical Knowledge for Teaching and its Specificity to High School Geometry Instruction. En J.-J. Lo, K. R. Leatham y L. R. van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 23-45). New York, USA: Springer.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education, Volume 4: The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 335-361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jaworski, B. y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education, 46*, 173-188.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S. y Winbourne, P. (2011). Development of pre-service teachers' knowledge related to big ideas in mathematics. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 105-112). Ankara, Turkey: PME.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 16*, 9-24.

Latorre, A., Rincón, D. del. y Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona, España: Experiencia.

Liñán, M. M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Lincoln, Y. y Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, California, USA: Sage.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Montes, M. Á., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España: Universidad del País Vasco.

Montes, M. Á., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *AIEM, 13,* 5-20.

Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*, 36-62.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the cerme 8* (pp. 3185- 3194). Antalya, Turkey: ERME.

Moriel, J. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações* (tesis doctoral). Universidad Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil.

Patton, M. (1990). *Qualitative evaluation and research methods*. Beverly Hills, California, USA: Sage.

Perks, P. y Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education, Volume 4: The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 265-280). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do

professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Relime, 15*(2), 277-310.

Rico, L. (ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A., Ministrell, J. y Van Zee, E. (2000). The detailed analysis of an established teacher's non-traditional lesson. *Journal of Mathematical Behaviour, 18*(3), 281-325.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Smith, K. (2003). So, what about the professional development of teacher educators? *European Journal of Teacher Education, 26*(2), 201-215.

Stake, R. E. (2000). Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research second edition* (pp. 134-164). Thousand Oaks, California, USA: Sage Publications.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, New Jersey, USA: Erlbaum.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario* (tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (tesis doctoral inédita). Michigan University, United States.

Tercera parte

Investigación, currículum y práctica educativa

La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente

Teresa Rojano
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen: A la luz de investigaciones sobre pre-álgebra, álgebra temprana y experimentación con diferentes enfoques de enseñanza, así como a partir de los resultados de un estudio comparativo del currículo mexicano con el de otros países, en este artículo describo y analizo la presencia del álgebra en el currículo de la educación básica de 2017. Aquí hago referencia a cambios significativos de perspectiva en la investigación sobre pensamiento algebraico, transformaciones que han tenido lugar desde inicios de los años 90 del siglo anterior hasta la época actual, y que han influido en el diseño curricular de matemáticas de las reformas educativas llevadas a cabo en dicho periodo en México.

1. INTRODUCCIÓN

A propósito de la reforma educativa de los años 90 en México, en la revista *Educación Matemática* abordé el tema de la presencia del álgebra en el currículo de la escuela secundaria (Rojano, 1991). Las dificultades que los alumnos enfrentan en el paso de la aritmética al estudio del álgebra –reportadas por múltiples investigaciones de la década de los años 80– llevaron a plantear la necesidad de ampliar el espacio curricular para esta área de la matemática escolar.

Precisamente en mi apreciación del entonces nuevo programa para la educación secundaria, enmarcado en el Programa Nacional para la Modernización Educativa, hice el señalamiento de que el espacio dedicado al álgebra era muy limitado y que se iniciaba "tardíamente" en el 2º grado, continuando hacia el 3º, y se dedicaba el primer grado mayormente a temas de aritmética (SEP, 1990). Argumentaba yo que cambios conceptuales identificados por investigaciones sobre pensamiento algebraico, como el consistente en pasar de concebir la igualdad como un operador a entenderla como una relación de equivalencia (Kieran, 1981a), o como el paso de operar sobre cantidades conocidas (los números) a operar con cantidades desconocidas (las incógnitas) (Filloy y Rojano 1984; 1989) y con números generales (Booth, 1981; Küchemann, 1981), o el resolver problemas de enunciado con métodos aritméticos a aprender el método cartesiano de "poner en ecuación" (Puig y Cerdán, 1999), suponen tiempos

didácticos prolongados que rebasaban el tiempo destinado al álgebra en aquel nuevo programa.

De acuerdo con esta apreciación basada en los resultados de investigación publicados en esa época, mi propuesta fue abrir un espacio hacia finales de la primaria y el 1º de secundaria para temas de lo que se dio en llamar "pre-álgebra". Este término, acuñado en el seno de discusiones entre académicos, llegó a tener varias interpretaciones (Kieran, 1981b), entre ellas el pre-álgebra como un conjunto de contenidos relacionados con el álgebra, pero que van "antes del álgebra", o nociones y métodos que se encuentran en una etapa intermedia entre la aritmética y el álgebra, o bien nociones y métodos con rasgos algebraicos, pero previos a la introducción del simbolismo (álgebra pre-simbólica). En mi propuesta, yo tenía en mente la segunda de estas interpretaciones, enfatizando la conveniencia de incluir contenidos y actividades que ayudasen a los alumnos en los procesos de transición de un tipo de pensamiento (el aritmético) al otro (el algebraico).

Hoy en día, el término pre-álgebra casi ha desaparecido de la literatura especializada, pues a finales de la década de los años 90 surgió la corriente conocida como *álgebra temprana,* que propone una iniciación de los estudiantes en el pensamiento algebraico en la educación elemental. La corriente tuvo su origen en el ámbito de la investigación, por un lado, a partir de resultados de experimentos de enseñanza en los que se mostraba la factibilidad de que alumnos de primaria se enrolaran en actividades que involucran ideas algebraicas (Davydov, 1990; Carraher, Scheliemann y Brizuela, 2001) y, por otro lado, a partir de la experimentación con entornos tecnológicos de aprendizaje, los cuales permiten un acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, como la generalización y la matemática de la variación (Blanton y Kaput, 2011; Sutherland y Rojano, 1993).

Fue durante la reunión del 12th ICMI Study *The future of the teaching and learning of algebra,* en diciembre de 2001, que se consolidó el álgebra temprana como tema de discusión y análisis en la comunidad de investigadores expertos en pensamiento algebraico (Lins y Kaput, 2004). Así como sucedió con el pre-álgebra, también el álgebra temprana se concibe de distintas maneras, pero en ellas hay el consenso de hablar de una forma de pensar, más que de un conjunto de contenidos o tópicos específicos. La corriente en cuestión ha cobrado tal fuerza que su influencia ha derivado en cambios curriculares de matemáticas en un buen número de países; un ejemplo es el de los Estándares Nacionales de los Estados Unidos, del año 2000, en los que se incluye un estándar de álgebra desde la educación preescolar (NCTM, 2000). La corriente del álgebra temprana viene entonces a sustituir al pre-álgebra, al menos como tendencia internacional, tanto en el ámbito de la investigación como en el de las reformas curriculares (Cai y Knuth, 2011).

A la par del surgimiento del álgebra temprana, y como una respuesta al reporte de los obstáculos identificados en el aprendizaje del álgebra, la comunidad internacional de investigadores del pensamiento algebraico comenzó a elaborar propuestas con distintos enfoques sobre cómo introducir a los alumnos al estudio del álgebra simbólica

(Bednarz, Kieran y Lee, 1996). Entre estos enfoques se encuentran el funcional, el de patrones y generalización, y el de resolución de problemas. Dichos enfoques fueron puestos a prueba en múltiples estudios empíricos, cuyos resultados inundaron las publicaciones especializadas hasta el inicio del nuevo milenio; sin embargo, no todos ellos llegaron a formar parte de reformas curriculares. A la luz de investigaciones sobre preálgebra, álgebra temprana y experimentación con diferentes enfoques de enseñanza, así como a partir de los resultados de un estudio comparativo del currículo mexicano con el de otros países,[1] en este artículo describo y analizo la presencia del álgebra en el currículo de la educación básica de 2017. Además, hago referencia a los cambios significativos de perspectiva en la investigación sobre pensamiento algebraico que han tenido lugar desde inicios de los años 90 hasta la época actual, cambios que han influido en el diseño curricular de matemáticas de las reformas educativas que se han realizado en ese periodo en México.

2. RUTAS HACIA EL ÁLGEBRA

2.1. Evolución de tendencias internacionales

En el año 1996, la editorial Kluwer publicó el libro *Approaches to algebra,* producto de un coloquio de expertos en pensamiento algebraico realizado en Montreal por la Universidad de Quebec, y organizado con el propósito de establecer una agenda de investigación en esta área. En dicha publicación se exponen, discuten y fundamentan cuatro propuestas para la iniciación al pensamiento algebraico en la escuela:

1. A partir de la resolución de problemas (mediante planteamiento y resolución de ecuaciones) (Rojano, cap. 4; Bell, cap. 11; Bednarz y Janvier, cap. 8).
2. A partir de la noción de función (Heid, cap. 18).
3. Por medio de la modelación de situaciones y fenómenos (Nemirovsky, cap. 15).
4. A partir del análisis de patrones y generalización (Radford, cap. 7; Mason, cap. 5).

Algunos sistemas educativos tomaron la iniciativa de realizar estudios a gran escala, en los que se implementaron los acercamientos propuestos. Entre esos experimentos está el ambicioso estudio longitudinal realizado por investigadores de la Universidad de Pennsylvania con una generación de estudiantes de secundaria, a quienes desde un inicio se les enseñaron los contenidos de álgebra apegados a un currículo llamado Computer-Intensive Algebra (CIA) (Heid, 1996).

[1] En el año 2015, el Instituto Nacional de la Investigación para la Evaluación de la Educación (INEE) encargó al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN la realización del estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas de la educación obligatoria en México y otros países, para lo cual ambas instituciones firmaron el convenio de colaboración INEE/DGAJ/CV/2015/12.

En el currículo CIA son centrales el concepto de función, las actividades con situaciones realistas, el uso de software de graficación y manipulación simbólica, así como la eliminación de la manipulación simbólica "a mano" durante una parte importante del programa. Los alumnos siguen una ruta que inicia con la exploración de situaciones de variación correspondientes a funciones lineales de una variable, para después utilizar graficadores y hojas de cálculo para examinar este tipo de funciones a través de sus distintas representaciones (gráfica, tabular y simbólica) e incursionar en el concepto de razón de cambio. Continúan, con el mismo enfoque de variación y tecnología, abordando situaciones que involucran funciones cuadráticas, exponenciales y la familia de funciones racionales $R(x) = \frac{a}{x^n}$, para después trabajar con situaciones que se pueden describir con sistemas de ecuaciones lineales en una variable o bien con funciones de múltiples variables.

Hacia el final de este currículo, los estudiantes se inician en el desarrollo del llamado "sentido del símbolo" *(symbol sense)*, a través de actividades relacionadas con expresiones algebraicas equivalentes y con ecuaciones e inecuaciones. En la última etapa reciben instrucción sobre el álgebra manipulativa "a mano", por un período significativamente más corto que el destinado en la enseñanza tradicional del álgebra. Los resultados del análisis de datos –recabados a lo largo de tres años de implementación del programa CIA– mostraron que los alumnos participantes lograron comprender conceptos algebraicos fundamentales como funciones, sistemas, ecuaciones, inecuaciones y equivalencia, sin lidiar con el aprendizaje previo de destrezas de manipulación simbólica de papel y lápiz. Además, los resultados de la aplicación de varios tests que miden esas destrezas manipulativas indicaron que los puntajes de estos estudiantes no fueron significativamente distintos de los obtenidos por alumnos que estudiaron con un currículo tradicional (Heid, 1996).

A pesar de los logros reportados por estudios como el del currículo CIA y otros con enfoque funcional, como el realizado por investigadores de la Universidad de Haifa en Israel (Yerushalmy y Shternberg, 2001), dichos resultados no fueron considerados suficientemente contundentes como para haber influido internacionalmente en el diseño curricular. Por otra parte, experiencias fallidas como la del Reino Unido, en donde a principios de la década de los años 90 se eliminó la enseñanza de la resolución de ecuaciones con el método algebraico y se sustituyó por la resolución por ensayo y refinamiento con ayuda de una calculadora simple, condujeron a un regreso a la enseñanza de "lo básico" (Sutherland, 2000), que en el caso del álgebra significa un regreso al álgebra de papel y lápiz, aunque con un enfoque más moderno.

En lo que respecta a los acercamientos por resolución de problemas y ecuaciones y a partir del análisis de patrones y generalización, la investigación asociada ha consistido mayormente en estudios a profundidad, de pequeña escala, llevados a cabo en diferentes partes del mundo (English y Kirshner, 2016). Los resultados de las investigaciones sobre estos enfoques, junto con los de las investigaciones sobre el enfoque funcional,

han llegado a influir, más que en el diseño del currículo en general, en el diseño didáctico de actividades para el salón de clases de la secundaria, así como en la incorporación de elementos de álgebra temprana en el currículo de matemáticas de la primaria. Sin embargo, no han sido los hallazgos de la investigación en educación matemática, sino otros eventos los que marcaron tendencias internacionales con un fuerte impacto en el diseño de propuestas curriculares. Entre esos eventos está la llamada guerra de las matemáticas *(mathematics war)* que derivó en la reforma educativa de los años 90 en Estados Unidos, en la cual se prioriza la resolución de problemas y la enseñanza de conceptos, en contraposición a la enseñanza de contenidos tradicionales, como las destrezas algorítmicas y de manipulación simbólica (Van de Walle, 2007). Otro de los factores de gran influencia es la importancia atribuida por los sistemas educativos a las competencias evaluadas por los exámenes internacionales como PISA, en los que se enfatiza la capacidad para analizar y resolver situaciones problemáticas en contextos reales.

En el estudio comparativo del currículo de matemáticas de México con el de otros países, mencionado en la introducción, en todos los casos se identificaron elementos de las tendencias internacionales descritas, y en el caso específico del álgebra, en el programa mexicano analizado, vigente desde el año 2011 (SEP, 2011), se observó un énfasis en el papel del álgebra como medio de expresión de situaciones problemáticas y con poca presencia del álgebra manipulativa y del método algebraico clásico para resolver problemas de enunciado (el método cartesiano de "poner en ecuación"). De hecho, ese programa es acorde a algunas tendencias modernas y dista mucho de lo que fue el acercamiento tradicional, consistente en la enseñanza de operatividad con símbolos y expresiones vacíos de significado.

Sin embargo, en el esfuerzo de actualizar el plan de estudios de la educación básica en el año 2011, como producto de una combinación de tendencias o "modas" implementadas en otros sistemas educativos, se incluyó una cantidad excesiva de elementos curriculares (competencias, estándares, ejes temáticos, temas, subtemas, bloques, aprendizajes esperados, entre otros), lo que derivó en un discurso extremadamente denso de los documentos oficiales (INEE, 2017). Esto dificultaba enormemente entender cuál era el propósito central de enseñar y aprender matemáticas, y en particular cuál era el objetivo de aprender y enseñar álgebra. Por otra parte, en esos programas la alineación del enfoque pedagógico con el acercamiento por resolución de problemas restó importancia al desarrollo de habilidades de álgebra "transformativa" (*transformational algebra*, de acuerdo con la terminología de Kieran, 2007), y con ello también se quitó importancia al dominio de los métodos algebraicos de resolución de problemas. La comunicación de propósitos en el nuevo programa de matemáticas (SEP, 2017) es más directa y se incluyen muchos menos elementos curriculares, dando relevancia a los ejes temáticos y a los aprendizajes esperados. En el caso del álgebra se buscó, además, un balance en el aprendizaje de conceptos, métodos y técnicas, y se incluyeron elementos de pensamiento algebraico en la educación primaria (álgebra temprana).

2.2. La ruta del álgebra en el currículo 2017 de la educación básica

El propósito principal del plan 2017, en lo que respecta al campo formativo de matemáticas, es que los estudiantes conciban y aprendan a valorar a la matemática como una manera muy especial de conocer el mundo. Los contenidos se organizan en tres ejes temáticos, que incluyen 12 temas en total (véase figura 1).

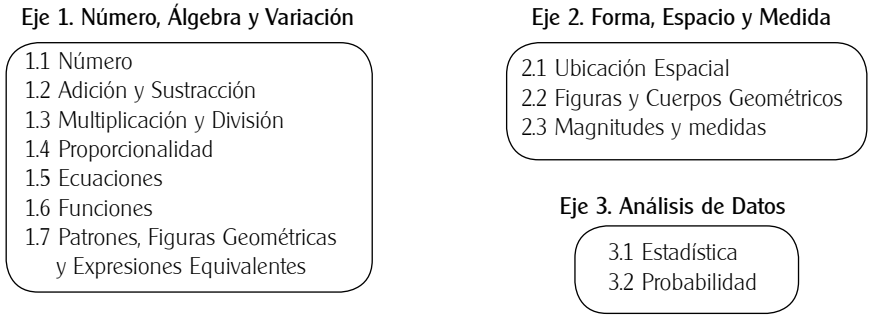


Figura 1. Ejes temáticos del programa de matemáticas (SEP, 2017)

Los temas de álgebra se integran en el Eje 1 con los de aritmética y variación, y se desarrollan a lo largo de la educación básica de acuerdo con la ruta que describo a continuación.

En la escuela primaria hay una iniciación en el razonamiento algebraico, a partir del análisis de la regularidad en patrones que gobiernan sucesiones numéricas y figurativas (mundo de las expresiones y los números generales), así como por medio de encontrar un valor faltante en relaciones de proporcionalidad directa (mundo de las ecuaciones y las incógnitas, y de las relaciones funcionales y las variables) (véanse ejemplos 1-4).

Ejemplo 1
Problemas que conducen a igualdades de expresiones con valor faltante:

$$_ + 15 = 20$$
$$6 \times _ = 30$$
$$\frac{\square}{18} = \frac{7}{21}$$

Figura 2. Distintos tipos de igualdades de expresiones con valor faltante

Ejemplo 2
Problemas que involucran situaciones de variación (encontrar la regla y aplicarla en casos contiguos y remotos):

1	5
2	10
3	15
	25
...	
80	

Figura 3. Tabla de covariación con valores faltantes

Ejemplo 3
Patrones en 5º grado. Se pide completar la sucesión y explicar el procedimiento:

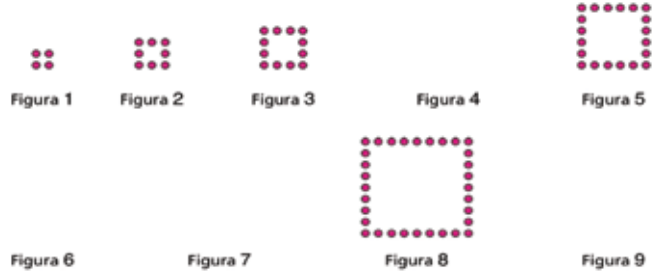


Figura 4. Sucesión de figuras que sigue un patrón, con elementos faltantes

Ejemplo 4
Patrones en primaria. Se presentan casos más complejos y se pide generalización cercana (contigua):

- ¿Cuántos picos tiene la figura 4?
- Sin construir la figura 5, ¿cuántos picos tendría?

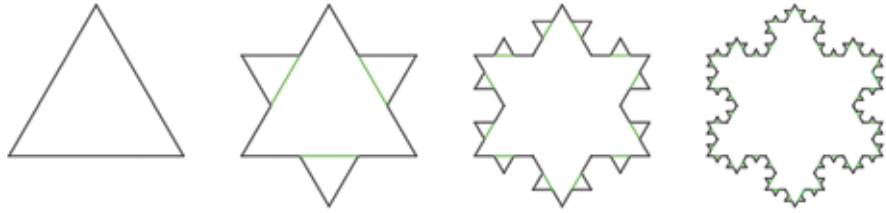


Figura 5. Sucesión de figuras que sigue un patrón (caso de mayor complejidad)

Esta iniciación en primaria es acorde a la interpretación de álgebra temprana como una manera de pensar, pues involucra nociones fundamentales de los tres mundos del álgebra, el de las ecuaciones, el de las expresiones y el de las funciones, pero sin introducir todavía la simbolización algebraica.

En la escuela secundaria se trata al álgebra como recurso de matematización de situaciones, fenómenos y problemas, a la vez que hay una recuperación de la importancia de la comprensión de conceptos y del dominio de técnicas manipulativas y métodos algebraicos.

Se progresa en los conceptos de número general y expresiones algebraicas, ecuación e incógnita, y función y variable, introduciendo su expresión simbólica, así como su representación por medio de tablas de variación y gráficas cartesianas. A continuación, describo el recorrido por estos conceptos en los tres grados de educación secundaria (a los que me referiré como grados 7º, 8º y 9º) e incluyo algunos ejemplos de las actividades sugeridas en los documentos del programa oficial.

Patrones y expresiones equivalentes

Ejemplo 5

Patrones en 7º grado. ¿Cuántos mosaicos tendrán la figura 10, la 20, la 50, la figura n?

Se pide generalización remota y expresión simbólica de una regla general (puede ser una fórmula recursiva o de relación funcional):

Figura 6. Sucesión de figuras que sigue un patrón; se pide fórmula algebraica

Ejemplo 6
Patrones en 8º grado: Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas, y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de figuras):

$$5(x + 7) = 5x + 35$$

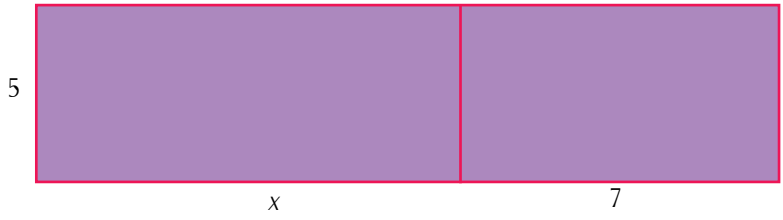


Figura 7. Equivalencia de expresiones a partir de comparación de áreas

Ecuaciones

En 7º grado, el tema de ecuaciones marca un paso muy definido de la escuela primaria a la secundaria (de la aritmética al álgebra), pues se abordan problemas que conducen a ecuaciones lineales que se resuelven con métodos de naturaleza distinta. Ecuaciones del tipo $Ax + B = C$, que se resuelven con estrategias aritméticas, operando sobre cantidades conocidas (por ejemplo, aplicando en cada paso la operación inversa); y ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$, que se resuelven operando no solo las cantidades conocidas (los coeficientes) sino también los términos que contienen a la incógnita (aplicando el método de "hacer lo mismo de los dos lados", o por transposición de términos).

Se continúa hacia el 8º grado con la resolución de problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2) $y = ax + b$; $y = cx + d$, para cuya resolución se puede proceder: haciendo sustituciones algebraicas, realizando operaciones entre expresiones algebraicas, o simplificando expresiones algebraicas que contienen cadenas de operaciones y paréntesis, así como simplificando expresiones racionales. El aprendizaje de los métodos clásicos de igualación y sustitución pueden ser un contexto propicio para motivar el avance de los alumnos en el desarrollo de destrezas de manipulación simbólica.

Sobre el mismo tema de ecuaciones, hacia el 9º grado se continúa con la resolución de problemas que conducen a ecuaciones de 2º grado, transitando del uso de métodos intuitivos de resolución (ensayo y refinamiento) a métodos algebraicos (fórmula general y/o factorización). En este punto, el tema de ecuaciones se vincula fuertemente con el de variación (funciones).

Funciones

En la educación primaria, el tema de funciones tiene como antecedentes el análisis de situaciones de variación proporcional y el trabajo con tablas de variación (ejemplo 2). En 7º grado se retoma el tema con la comparación de diversos tipos de variación a partir de su representación gráfica, con lo que se propicia el análisis cualitativo de la variación y la comprensión de la noción de dependencia entre variables, y también la exploración de aspectos como crecimiento, decrecimiento, velocidad de crecimiento, intervalos de crecimiento y valores máximos y mínimos.

En 8º grado se continúa con la comparación de situaciones de variación lineal y de proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. En el caso de la variación lineal, se retoma el tema de razón de cambio. En este grado también se utilizan las gráficas cartesianas para estudiar la dependencia y la variación de manera global y cualitativa.

Al final de la escuela secundaria, en el 9º grado, se prepara el terreno para el tránsito a la educación media superior. Para ello, se analizan cualitativamente las gráficas de distintos tipos de variación y se reflexiona sobre la dependencia y la razón de cambio, que son nociones centrales del cálculo diferencial. En este punto no se introduce la representación algebraica de esas funciones. En el siguiente ejemplo se muestra una actividad en la que se incluyen variaciones distintas a las lineales y cuadráticas, con la intención de que los alumnos amplíen su repertorio de tipos de funciones.

Ejemplo 7

Llenado de recipientes.

Cada recipiente se llenó vertiendo agua con una taza pequeña, ¿qué gráfica corresponde a cada recipiente?

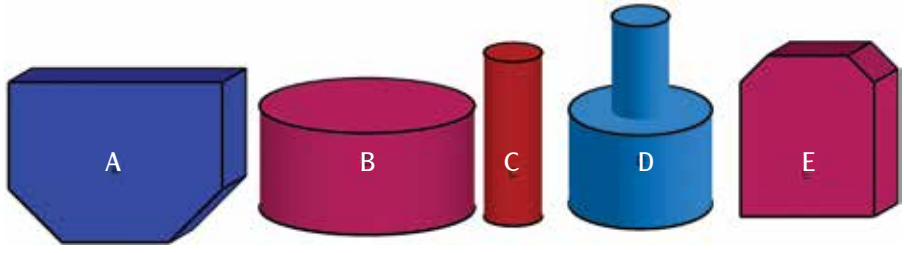


Figura 8a. Recipientes que se llenan con una misma unidad de medida

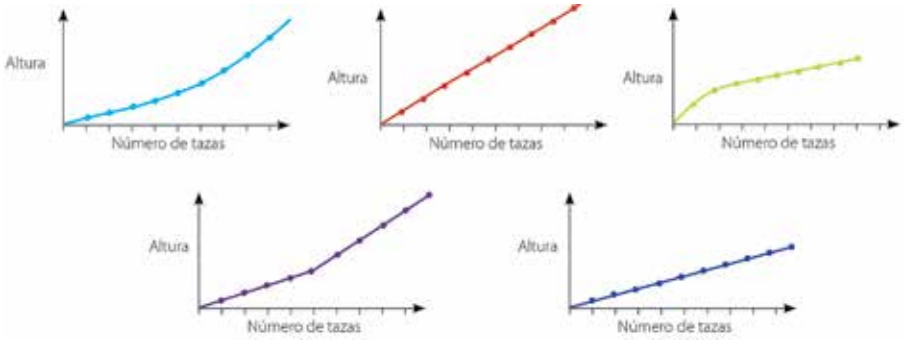


Figura 8b. Gráficas que representan el llenado de los recipientes de la figura 8a

En el recorrido anterior, me limité a describir la ruta del álgebra en el currículo de 2017 en términos de conceptos y métodos algebraicos, sin aludir a la conexión de estos con el planteamiento y resolución de problemas de enunciado o con la modelación y análisis de situaciones y fenómenos de distintos contextos. Sin embargo, cabe señalar que en dicho programa, los conceptos, los métodos y las técnicas se conciben como recursos que permiten tender puentes entre la naturaleza abstracta de las matemáticas y el mundo que nos rodea. En la siguiente sección hago referencia al papel del álgebra como vehículo de matematización de situaciones reales, a propósito de abordar el enfoque de resolución de problemas en el programa en cuestión.

3. EL ÁLGEBRA Y EL ENFOQUE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. La resolución de problemas en el currículo de distintos países

En la investigación documental "Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países" (INEE, 2017) a la que me he referido en secciones anteriores, se analizaron las propuestas curriculares de matemáticas del nivel preescolar al medio superior, de México, Corea del Sur, Reino Unido y Chile. Todas ellas coinciden en la adopción del enfoque didáctico de resolución de problemas, aunque en cada una de ellas el enfoque se concibe de manera distinta.

En el programa de Chile, se plantean objetivos de aprendizaje específicos para el desarrollo de la habilidad de resolver problemas; además, se propone utilizar diversos contextos y favorecer el refinamiento de estrategias de resolución, que van desde las más simples (por ensayo y error) hasta otras más complejas (como la de seguir los pasos de entender, planificar, hacer y comprobar). Por su parte, en el programa coreano se promueve el desarrollo de estrategias cada vez más complejas, a lo largo de cada grado escolar, con recomendaciones precisas respecto a los métodos de enseñanza.

Mientras, en el currículo inglés se plantea la resolución de problemas como una de las habilidades que se pretende desarrollar para la aplicación de las matemáticas en una variedad de problemas rutinarios y no-rutinarios, con la recomendación de segmentar el procedimiento de resolución en pasos "más simples". En este programa se pretende promover en los estudiantes la perseverancia en la búsqueda de soluciones, así como proponerles problemas cada vez más ricos y sofisticados, sin apresurar el aprendizaje de nuevos contenidos. En cuanto al programa mexicano analizado (vigente desde 2011), la resolución de problemas se presenta como una de las competencias que se busca desarrollar, y también como metodología de enseñanza de los contenidos matemáticos, consistente en utilizar situaciones problemáticas como punto de partida. A diferencia de los otros países, en el programa de México 2011 (salvo en el nivel preescolar) no se precisa el tipo de problemas, contextos, estrategias de resolución o maneras de promover el desarrollo de competencias de resolución de problemas.

3.2. El papel del álgebra en el currículo 2017

La tendencia mundial del enfoque de resolución de problemas en el diseño curricular fue determinante para que se privilegiara el papel del álgebra como medio de modelación de situaciones y fenómenos de una diversidad de contextos, lo que en muchos casos derivó en una presencia muy débil en el currículo del desarrollo de destrezas de manipulación simbólica. Sin embargo, en propuestas curriculares recientes se advierte un equilibrio entre el aprendizaje de conceptos y técnicas, y el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. Tal es el caso del programa de Corea del Sur, que confiere importancia a la operatividad algebraica y a los conceptos y métodos algebraicos de resolución de problemas y ecuaciones, a la vez que enfatiza la importancia de la resolución de problemas. Un balance similar se observa en el nuevo currículo mexicano (el de 2017), en el cual la resolución de problemas juega un doble papel: el de objetivo de aprendizaje y el de medio para el acceso a nuevo conocimiento. Con este enfoque, el álgebra simbólica conserva su rol de medio de modelación de las situaciones descritas en el enunciado de los problemas, al mismo tiempo que se da importancia al dominio de técnicas y métodos algebraicos para realizar el proceso de resolución en forma plena. Por su parte, el planteamiento de problemas en distintos contextos (incluido el de las matemáticas) es un medio para construir significados de los conceptos algebraicos, a través de procesos de generalización, simbolización y abstracción, como lo ilustran los ejemplos 2, 3, 4, 5 y 6.

4. LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y EL CURRÍCULO: NOTAS FINALES

A pesar de que la evolución en el campo de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra no se refleja de manera directa e inmediata en las tendencias internacionales más influyentes, al paso de los años los cambios de perspectiva más significativos en la investigación sí han trascendido en el ámbito de las reformas curriculares. Así, a partir de la identificación de dificultades intrínsecas al aprendizaje del álgebra, derivada de los estudios de los años 80, en el terreno de la enseñanza se le confirió importancia tanto a la búsqueda de fuentes de significado para los símbolos y expresiones del álgebra, como a la ampliación de los tiempos didácticos para propiciar un tránsito adecuado del pensamiento aritmético al algebraico.

Por otra parte, en vista de los resultados de la experimentación con acercamientos bien diferenciados al estudio del álgebra (por patrones y generalización; por resolución de problemas y ecuaciones; a través de un acercamiento funcional, o con el uso de entornos tecnológicos), característica de las investigaciones de los años 90, se atribuyó al álgebra el papel de vehículo de representación de situaciones y problemas de contextos diversos, restándole importancia al álgebra transformativa.

Finalmente, los estudios experimentales sobre álgebra temprana de inicios del milenio, los efectos de la globalización –que a través de la aplicación de evaluaciones internacionales priorizan el desarrollo de competencias de resolución de problemas–, así como la valoración del dominio de las técnicas, han conducido gradualmente a una visión más equilibrada del rol del álgebra simbólica en el currículo.

El trayecto de la investigación descrito puede reconocerse en algunos rasgos de las tres reformas a los programas de matemáticas, llevadas a cabo en México a partir de 1990. En esas reformas, la concepción del álgebra en la educación básica ha evolucionado desde un repertorio de técnicas del álgebra manipulativa, limitado al programa de la escuela secundaria (versiones previas a 1990), hasta un conjunto de conceptos y aplicaciones (programa de 1990), y de ahí, hacia poner el énfasis en los aspectos conceptuales, con enfoque de resolución de problemas y con una reducción importante de los aspectos manipulativos (programa de 2011), para finalmente, en el programa del año 2017, concebir al álgebra como un conjunto de conceptos, técnicas y métodos que permiten modelar y conocer el mundo, y a partir de ese conocimiento, poder tomar decisiones e incidir en él.

En este artículo he hecho referencia a momentos críticos de cambios de perspectiva y de surgimiento de nuevos temas en el área de la investigación sobre pensamiento algebraico, los cuales tuvieron lugar desde la década de los años 90 del siglo XX hasta la época actual. Las corrientes que recientemente han cobrado fuerza profundizan en temas como el pensamiento algebraico temprano, el pensamiento funcional *(functional thinking)* y los procesos de generalización. Mientras, las perspectivas teóricas en boga, pero aún en desarrollo, son de naturaleza semiótica; en ellas, el álgebra escolar se concibe como un sistema de signos. En estas corrientes, uno de los intereses principales es investigar los procesos mediante los cuales los estudiantes transitan de versiones menos

abstractas (muy cercanas al sistema de signos de la aritmética) hacia versiones más abstractas, hasta llegar a convertirse en usuarios competentes del sistema de signos del álgebra, lo cual se traduce en competencias relacionadas con los aspectos sintácticos del álgebra, y con su uso como vehículo de expresión de situaciones provenientes de diversos contextos (Rojano, 2016).

REFERENCIAS

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer AP.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Heidelberg, Germany: Springer.

Booth, L. (1981). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, United Kingdom: NFER-Nelson.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer.

Carraher, D. W., Scheliemann, A. D. y Brizuela, B. (2001). *Can young students operate the unknown?* En M.V.D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute-Utrecht University.

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curriculum*. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics. (Obra original publicada en 1972).

English, L. y Kirshner, D. (2016). *Changing agendas in international research in mathematics education*. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3ª ed., pp. 3-18). New York, USA: Routledge.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). *From an arithmetical to an algebraic thought*. En J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the 6th Annual Meeting of The International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, USA: University of Wisconsin.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Heid, K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-256). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer AP.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. México: Autor.

Kieran, C. (1981a). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1981b). Pre-algebraic notions among 12 and 13 year olds. *Proceedings of the 5th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 158-164). Grenoble, France: University Joseph Fourier.

Kieran, C. (2007). Research on the learning and teaching of algebra at the middle, secondary and college level: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, North Carolina, USA: Information Age Publisher.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:* 11-16 (pp. 102-119). London, United Kingdom: Murray.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Boston, Massachusetts, USA: Kluwer AP.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* Granada, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Puig, L. y Cerdán, F. (1999). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias del 2o Simposio Internacional en Educación Matemática* (pp. 34-38). Cuernavaca, México: PNFAPM.

Rojano, T. (1991). El álgebra en el currículum de la secundaria. La Reforma de los 90's. *Educación Matemática, 3*(3), pp. 4-9.

Rojano, T. (2016). Students' access to mathematical learning in the middle and junior secondary school. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3ª ed., pp. 219-238). New York, USA: Routledge.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (1990). Programa Nacional para la Modernización Educativa. México: Autor.

SEP. (2011). *Plan de Estudios 2011. Educación básica.* México: Autor.

SEP. (2017). *Aprendizajes Clave: Matemáticas.* Recuperado de: www.aprendizajesclave.sep.gob.mx

Sutherland, R. (2000). Disjunctions between School and University: The Case of Mathematics. En C. Tickly y A. Wolf (Eds.), *The maths we need now: Demands, deficits and remedies* (pp. 53-68). London, United Kingdom: Institute of Education-University of London.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behaviour, 12*(4), 353-383.

Van de Walle, J. A. (2007). *Reform vs the basics: Understanding the conflict and dealing with it.* Virginia, USA: Commonwealth University.

Yerushalmy, M. y Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 yearbook* (pp. 251-268). Reston, Virginia, USA: NCTM.

La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra

María Trigueros
Departamento de Matemáticas, ITAM, México
Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen: En este capítulo presentamos un resumen de los estudios realizados desde principios de los años 90, acerca del papel que juega el carácter multifacético de la variable en la comprensión del álgebra. Enfatizamos el desarrollo de un modelo teórico en el que se precisan los usos de la variable y aquellos aspectos que intervienen en su comprensión y aplicación en la solución de problemas. Mostramos evidencia de la potencia del modelo como herramienta de análisis en la investigación y como herramienta didáctica en el diseño de una estrategia de enseñanza centrada en el uso flexible de la variable a través de los resultados de casi 30 años de investigación, que ponen de manifiesto cómo el uso del modelo ha permitido profundizar en las dificultades y fortalezas algebraicas de estudiantes de distintos niveles y de distintos países, y subrayar la importancia de la variable en un aprendizaje profundo del álgebra.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la década de los años 70 del siglo pasado surgieron, en distintas partes del mundo, grupos de investigación que estudian las distintas problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los temas que desde los inicios despertó mucho interés se refiere a las dificultades que entraña el aprendizaje del álgebra elemental. Algunos académicos empezaron a precisar aquellos conceptos clave que caracterizan esta disciplina; entre ellos sobresale el concepto de variable y su carácter multifacético como fundamental para el aprendizaje del álgebra y para la comprensión de las matemáticas más avanzadas (p. ej. Matz, 1982; Wagner, 1983; Usiskin, 1988). También se hicieron explícitos los usos más comunes de la variable algebraica como: incógnita, número general y en relación funcional; y se puso énfasis en la necesidad de que los estudiantes adquirieran no solo los conocimientos para trabajar con cada uno de estos usos, sino también en mejorar su capacidad de diferenciarlos y pasar con flexibilidad entre ellos (p. ej. Matz, 1982; Wagner, 1983; Usiskin, 1988).

Si bien numerosos estudios aportan información muy valiosa sobre las dificultades que comporta el aprendizaje de cada uso de la variable, no siempre consideran que los diferentes usos suelen concurrir dentro de un mismo problema, lo que requiere del estu-

diante pasar entre ellos con soltura. De hecho, lo que caracteriza la variable algebraica es justamente su carácter multifacético, independientemente de la faceta que predomine en un problema particular. Por lo tanto, un buen manejo de este concepto solo puede lograrse cuando nos acercamos a él viéndolo como una entidad multifacética y aprendemos a movernos de manera flexible entre sus diferentes usos (p. ej. Küchemann, 1980; Matz, 1982; Philipp, 1992; Wagner, 1983; Booth, 1984).

En México, considerando la importancia del concepto de variable en el aprendizaje del álgebra, a partir de la década de los años 80 se empezó a investigar tanto la posibilidad de introducirlo desde los primeros acercamientos al álgebra elemental (Ursini, 1990; 1994; 1996), como la comprensión que logran de este concepto los estudiantes de diversos niveles educativos (Ursini y Trigueros, 1997; 1998), y cómo van construyendo esa comprensión a lo largo de sus estudios (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000). En todas estas investigaciones se consideraron los tres usos de la variable antes señalados, dado que con ellos se suele trabajar en los cursos de álgebra elemental. Los resultados obtenidos, junto con un análisis minucioso de las respuestas de los alumnos, nos permitieron caracterizar, de manera cada vez más precisa, cada uno de estos usos y afirmar que una comprensión elemental del concepto de variable implica, ante todo: la capacidad de realizar cálculos simples y operaciones con símbolos literales; comprender por qué funcionan estas operaciones; prever las consecuencias de usar estos cálculos; distinguir entre los diferentes usos de la variable; pasar entre los usos de la variable de manera flexible, e integrar los distintos usos de la variable como componentes del mismo objeto matemático. Se constató, además, que esta comprensión se manifiesta cuando un alumno puede: reconocer el rol específico de una variable en una situación dada; usar variables para simbolizar una situación problemática, y operar las variables simbólicas cuando lo requiera la tarea.

El hecho de que muchos estudiantes que ingresaban a la universidad tenían serias dificultades con cada uso de la variable y para pasar de uno a otro, nos llevó a preguntarnos por qué persistían estas dificultades a pesar de que habían tenido experiencia con el álgebra en varios cursos en los ciclos escolares anteriores. También nos preguntamos si en estos se habría privilegiado algún uso específico de la variable. La investigación que realizamos con el fin de responder estas preguntas se llevó a cabo en el ciclo escolar 1998-1999. Los resultados, publicados en el año 2000 en el artículo que apareció en el número 2 del volumen 12 de la revista *Educación Matemática* con el título "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", constituyeron un punto de partida de varias investigaciones dedicadas a profundizar tanto en la comprensión del concepto de variable algebraica como en la enseñanza del álgebra. Esta profundización siguió dos vertientes: una, donde nos abocamos a perfeccionar los instrumentos teóricos y metodológicos para estudiar la comprensión del concepto de variable algebraica; y otra, en la que se analizó la evolución del aprendizaje de este concepto.

2. LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA VARIABLE EN LA ENSEÑANZA MEDIA. PRIMEROS RESULTADOS

En el estudio mencionado participaron 98 estudiantes de escuelas privadas (20 de primer año de secundaria, 8 de segundo y 9 de tercero; 12 del primer año de preparatoria, 10 de segundo y 8 de tercero, y 31 alumnos de primer ingreso a la universidad). Los alumnos del primer año de secundaria no habían sido introducidos al álgebra, los de segundo habían iniciado el estudio del lenguaje algebraico, la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis; los estudiantes de tercero ya habían tenido un acercamiento a los tres usos de la variable. Todos los cursos de matemáticas de los alumnos de preparatoria tenían un marcado enfoque hacia el estudio del álgebra.

Los participantes en el estudio respondieron el mismo cuestionario, elaborado y validado anteriormente, que indagaba la capacidad de trabajar con la variable algebraica (Ursini y Trigueros, 1998). Para analizar con más profundidad cómo estos estudiantes manejaban y comprendían el concepto de variable, elaboramos un primer modelo de este concepto que resume lo que implica trabajar con la variable algebraica. Para ello, contemplamos los tres usos de la variable que la literatura consideraba de mayor importancia (incógnita, número general, variables en relación funcional) junto con algunos resultados de nuestros estudios previos. Este primer modelo resultó ser un instrumento teórico de gran utilidad, no solo para el diseño de otros instrumentos sino para el análisis del trabajo de los estudiantes.

Después de examinar minuciosamente las respuestas de los estudiantes, pudimos constatar que no estaban desarrollando de manera satisfactoria la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar la variable, independientemente de su uso, a pesar de los cursos de álgebra que llevaban. La falta de una conceptualización adecuada de los distintos usos de la variable apareció como un elemento importante para explicar sus dificultades frente al álgebra. Quedó clara, además, la fuerte influencia que ejercían los temas que se estaban tratando en clase al momento de aplicar el cuestionario en la interpretación que hacían los estudiantes de la variable.

Los resultados sugirieron que, a lo largo de los cursos, los estudiantes habían aprendido únicamente a manejar técnicas específicas y algoritmos memorizados. Esto explicaba por qué, en muchas de las situaciones presentadas en el cuestionario, los alumnos de primero de secundaria, que no habían sido introducidos al álgebra todavía, respondían mejor que quienes sí habían recibido instrucción. Encontramos, además, que los errores cometidos por los alumnos de primer año de secundaria los seguían cometiendo también muchos estudiantes de cursos posteriores, incluyendo aquellos que empezaban la universidad. Esto sugirió que las dificultades de los estudiantes no eran necesariamente de naturaleza cognitiva o epistemológica, como mencionaban otros autores, sino que podían ser una consecuencia de la forma en que se trabaja con la variable en los cursos de álgebra, donde se enfatiza cada uso de la variable de manera aislada de los demás, lo que no ayuda ni a diferenciarlos ni a integrarlos en un mismo concepto.

Estos resultados, si bien limitados por el número de estudiantes que participaron en el estudio y su contexto, sugirieron la necesidad de revisar los contenidos de los cursos de álgebra y su enseñanza, para proponer acercamientos que favorecieran, desde el primer contacto con el álgebra, una comprensión flexible e integrada de los tres usos de la variable a través de desarrollar la capacidad de interpretarlas, simbolizarlas y manipularlas en situaciones diversas y de distinta complejidad.

Un resultado importante de este estudio fue constatar que el modelo que habíamos elaborado y utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes tenía un gran potencial como herramienta de investigación, de diagnóstico de la comprensión de la variable, y también para el diseño de actividades de enseñanza. Este modelo había empezado a desarrollarse desde la década de los años 90, y desde entonces contemplaba los ya mencionados tres usos de la variable. Su elección se había basado en una breve revisión histórica del desarrollo del concepto de variable algebraica (Ursini, 1994) y en los comentarios de otros investigadores (p. ej. Usiskin, 1988).

Más adelante, apoyadas en nuestra experiencia como profesoras y en nuestra propia comprensión de este concepto, fuimos refinando el modelo, incluyendo los aspectos que considerábamos básicos y esenciales para trabajar exitosamente con cada uno de los tres usos de la variable (Ursini y Trigueros, 1998). Los resultados del estudio del año 2000 contribuyeron a desarrollar finalmente un modelo teórico-metodológico potente, es decir, que permite obtener información importante que hemos podido usar en múltiples investigaciones posteriores y que nos ha permitido entender a mayor profundidad el papel que juega un manejo flexible e integrado del concepto de variable en el aprendizaje del álgebra, así como diseñar instrumentos diagnósticos y estrategias didácticas. Este modelo se conoce ahora como el modelo 3UV y lo presentamos a continuación.

3. MODELO DE LOS TRES USOS DE LA VARIABLE: MODELO 3UV

En este modelo (Ursini y Trigueros, 2001; Trigueros y Ursini, 2003) se considera, para cada uno de los usos de la variable que comúnmente aparecen en los cursos de álgebra elemental (incógnita, número general, variables en relación funcional), una serie de aspectos a los que un usuario del álgebra se tiene que enfrentar para poder resolver problemas y ejercicios de distintos niveles de complejidad. Por ejemplo, trabajar con la *variable como incógnita* implica la capacidad de distinguir entre situaciones o problemas que involucran cantidades desconocidas que se pueden determinar a partir de los datos del problema, y situaciones que involucran cantidades desconocidas que no es posible determinar. También es necesario poder representar simbólicamente las entidades desconocidas y usarlas para desarrollar expresiones algebraicas que describan la relación que existe entre los datos de un problema y, eventualmente, vincular esas expresiones para obtener una ecuación o un conjunto de ecuaciones. Frente a una ecuación, sea ésta dada o construida por el estudiante, es necesario tener la capaci-

dad de operar sobre y/o con las variables simbólicas para determinar el o los valores específicos que satisfacen la ecuación. Es importante, además, sustituir la incógnita por los valores así obtenidos, con el propósito de verificar que cumplen con la ecuación establecida. Esto se presenta a continuación de manera sintética en forma de lista.

Conviene precisar que el orden en el que se enlistan los aspectos en el modelo no implica un orden de importancia, de dificultad o temporal. El modelo pretende señalar aquellos aspectos que aparecen siempre al trabajar con la variable algebraica.

Trabajar exitosamente con la *variable como incógnita* implica:

- **I1** Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
- **I2** Interpretar los símbolos literales que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
- **I3** Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
- **I4** Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
- **I5** Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Cabe aclarar que, si bien podría parecer una incongruencia usar la palabra *variable* conjuntamente con la palabra *incógnita*, dado que la incógnita se refiere a un valor fijo y específico y no a una cantidad variable, decidimos usar la terminología *variable como incógnita* porque la primera percepción que se tiene del símbolo literal cuando aparece en una expresión algebraica es, o debería ser, la de un símbolo que representa cualquier valor, y es solo en un segundo momento, después de tomar en cuenta los otros elementos que concurren en la expresión o problema, que podemos precisar su carácter.

Ilustremos esto analizando, por ejemplo, las expresiones $4 + x^2 = x\,(x + 1) + 4$, y $4 + x^2 = x\,(x + 1) - x + 4$. Observemos que solo después de haber realizado, de hecho o mentalmente, algunas manipulaciones, podemos reconocer que la primera expresión representa una ecuación y, por lo tanto, la variable representa una incógnita, mientras la segunda expresión representa una tautología y, por lo tanto, la variable representa un número general.

Un requisito para trabajar con la *variable como número general* es la capacidad de reconocer patrones, encontrar o deducir reglas y métodos generales y poderlos describir. Para ello es necesario distinguir los aspectos invariantes de los variables en problemas y situaciones que involucran, por ejemplo, secuencias geométricas o numéricas o relacionadas con la estructura de familias de problemas. Es necesario, también, tener la capacidad de representar simbólicamente las afirmaciones generales, reglas o métodos, considerando que en estos casos las variables simbólicas representan cantidades indeterminadas. Las variables que representan números generales aparecen en expresiones

abiertas (3x + 5), tautologías (2 + x = x + 2), fórmulas generales (F = ma) y se usan también para representar los parámetros (ax + b = cx + d; y = mx + c). Fundamental para el dominio de este uso de la variable es la manipulación. Es necesario desarrollar la capacidad de operar con las variables simbólicas sin la necesidad de asignarles valores específicos y sin esperar obtener resultados numéricos. Resumimos a continuación estos aspectos esenciales para poder trabajar con la *variable como número general*.

Trabajar exitosamente con la *variable como número general* implica:

- **G1** Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
- **G2** Interpretar un símbolo literal como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
- **G3** Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
- **G4** Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
- **G5** Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

En cuanto al uso de la variable como *parámetro,* Bloedy-Vinner (1994; 2001) y Furinghetti y Paola (1994) señalan que las dificultades que tienen los estudiantes para trabajar con parámetros se pueden relacionar con la naturaleza semántica o sintáctica de las expresiones donde aparecen, y subrayan que para tener éxito en la solución de problemas que involucran parámetros es necesario distinguirlos de las incógnitas y las variables relacionadas, y que esta distinción depende del contexto del problema. Aunque los parámetros podrían considerarse "otro uso de las letras", como sugiere Bloedy-Vinner (2001), desde nuestro punto de vista se describen mejor como números generales, si bien de segundo orden, dado que las expresiones que contienen parámetros son generalizaciones de expresiones generales más simples; es decir, los parámetros se introducen para generalizar expresiones generales (ecuaciones o relaciones funcionales) de primer orden, de ahí que los aspectos relacionados con los parámetros son los mismos que se enlistan en el modelo 3UV (Ursini y Trigueros, 2004).

Por enunciados generales de primer orden nos referimos a los que se derivan de la generalización de expresiones que involucran solo números. Por ejemplo, los números generales de primer orden están presentes en el término general de una secuencia numérica; el método general para calcular el área de un cuadrado; en las ecuaciones con coeficientes numéricos, etcétera. Los parámetros aparecen cuando representamos familias de enunciados generales de primer orden (familias de ecuaciones, familias de funciones, familias de expresiones abiertas), por lo tanto, se pueden considerar números generales de segundo orden. Un ejemplo puede ilustrar mejor este punto de vista. En el problema: "Dada la ecuación general de una recta y = mx + c, escribe la ecuación que representa todas las líneas rectas que pasan por el punto (5,6)", los parámetros m y c son números generales, y su introducción permite expresar las ecuaciones de todas las líneas.

Como lo destacan Bloedy-Vinner (2001) y Furinghetti y Paola (1994), en una expresión algebraica el rol del parámetro puede cambiar dependiendo del contexto. Pero esto sucede, en general, con cualquiera de los tres usos de la variable. El siguiente ejemplo puede ayudarnos a entender mejor a qué nos referimos. La pregunta "¿cuándo la ecuación $3x^2 + px + 7 = 0$ tiene una solución única?" se refiere a una familia de ecuaciones cuadráticas donde x representa la incógnita, pero el valor de x depende a su vez del valor del parámetro p. Para responder a la pregunta es entonces necesario analizar primero cuál es la relación entre el parámetro p y la incógnita x, lo que implica plantear y resolver una ecuación donde p deja su rol de número general y asume el rol de incógnita. Finalmente, hay que señalar que desde la perspectiva del modelo 3UV, para trabajar con los parámetros es necesario desarrollar la capacidad para interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos en diferentes contextos. Además, cuando el problema requiere pasar entre los diferentes roles que un parámetro puede asumir (el de número general, incógnita o de variable en relación funcional) es necesario manejar los distintos aspectos que caracterizan cada uno de los tres usos de la variable, que se describen en el modelo 3UV.

Trabajar con las *variables en relación funcional* implica reconocer ya sea la correspondencia o la variación. Las situaciones que involucran este uso de las variables suelen presentar la información en forma tabular, a través de gráficas, de expresiones analíticas o de un problema verbal. Todas ellas requieren reconocer cómo se relacionan entre sí las variables involucradas (correspondencia), y al mismo tiempo darse cuenta de que la variación de una de ellas implica la variación de la otra (variación conjunta). El reconocimiento de esta relación implica la capacidad de reconocer que cada variable puede tomar distintos valores y moverse libremente en el intervalo en el que está definida la relación funcional. La capacidad de determinar la correspondencia entre las variables se refleja en la capacidad de determinar el valor de una de las variables cuando se conoce el valor de la otra. La capacidad de trabajar con la variación se refleja en la posibilidad de determinar el comportamiento relacionado de las variables (los valores de una variable crecen/decrecen/son constantes cuando los de la otra variable crecen/decrecen/son constantes), de determinar donde alcanzan valores máximos/mínimos/positivos/negativos, así como definir los intervalos donde las variables toman determinados valores y se establece cierto tipo de relación entre ellas. También es necesario poder representar la relación entre las variables usando distintas representaciones (tablas, gráficas, expresiones analíticas) y pasar de una a otra. Estos aspectos se resumen a continuación.

Trabajar exitosamente con las *variables en relación funcional* implica:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6 Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Si bien los aspectos **F2** y **F3** implican el aspecto **I4** (determinación del valor de la incógnita), no son equivalentes dado que, para determinar los valores de una variable en función de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir, de este modo, una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación.

4. EL MODELO 3UV EN LA ENSEÑANZA

La enseñanza del álgebra basada en la comprensión del concepto de variable ha sido sugerida implícitamente desde los primeros estudios. Sin embargo, en ninguna investigación se habían dado sugerencias concretas de cómo enfrentar este problema, ni elaborado herramientas teóricas y/o metodológicas que ayudaran a identificar con precisión las dificultades de los estudiantes con los diferentes usos de las variables. El desarrollo del modelo 3UV y la precisión de los resultados obtenidos en el estudio reportado en el año 2000, nos permitieron proponer un modelo didáctico para la enseñanza del álgebra centrado en el concepto de variable.

La forma en que se suele enseñar el álgebra elemental en la escuela secundaria y en el bachillerato hace difícil precisar la idea de variables que se busca desarrollar en los estudiantes. Si bien no esperamos que en la enseñanza surjan directamente los elementos que conforman el modelo 3UV, al analizar materiales didácticos y al observar la forma en que los profesores enseñan el álgebra en secundaria, López Pineda (1996) encontró que se privilegiaba la solución de ecuaciones y, en menor grado, la práctica de reglas de factorización sin profundizar en el significado de la generalización, y que la relación entre variables se enseñaba como correspondencia, aun cuando en algún currículo se intentaba profundizar en la variación conjunta de variables relacionada. Los libros de texto tampoco ayudan a mejorar esta situación. En ellos, el número de lecciones dedicadas a la resolución de ecuaciones excede, a menudo por mucho, aquellas dedicadas a la generalización y a la variación (Benítez, 2004). Este tipo de prácticas no contribuye a la comprensión de la variable y conduce a los estudiantes a memorizar procedimientos para resolver problemas, aunque en la mayoría de los casos, como ya hemos mencionado, no los pueden resolver.

La presentación de los distintos temas del curso y de los problemas que se trabajan para ejemplificarlos no subraya los cambios de significado de la variable en los distintos contextos. Si bien estamos conscientes de que, tratándose de un concepto multifacético, no es posible dar una definición clara y precisa de la variable, lo que acarrea enormes dificultades para que los estudiantes puedan seguir los argumentos de los profesores o para comprender el texto correspondiente y los ejemplos que aparecen en él, consideramos que es posible explicitar los cambios de uso de la variable y favorecer su diferenciación y su integración.

4.1. Un modelo de enseñanza

Los estudios mencionados coinciden en sugerir que la forma en que se enseña el álgebra no parece facilitar su comprensión ni ayuda a que los estudiantes desarrollen el pensamiento algebraico. Esto nos llevó a elaborar una propuesta de enseñanza del álgebra donde se aborden, explícita y conjuntamente, los distintos usos de la variable y se planteen problemas que permitan hacer más evidentes las relaciones entre esos usos. Diseñamos, entonces, una propuesta didáctica basada en el modelo 3UV que pudiera ser implementada en un curso de introducción al álgebra en secundaria y cuyos resultados pudieran ser evaluados. Esta estrategia está basada en favorecer la comprensión de todos los elementos incluidos en el modelo 3UV, es decir, los tres usos de la variable y los aspectos respectivos que pueden aparecer en distintos niveles de complejidad y abstracción. Además, consideramos necesario plantear tareas que ayudaran a un estudiante a aprender a pasar flexiblemente de un uso a otro de la variable y los aspectos que los caracterizan, desde su primer acercamiento al álgebra.

4.1.1. Estrategia didáctica

Se planteó la introducción al álgebra en términos de una estrategia de trabajo cíclico en espiral, donde se tratan los tres usos de la variable de forma explícita, diferenciándolos e integrándolos en cada ciclo, iniciando con problemas muy simples y aumentando en cada ciclo el nivel de complejidad. Así, en cada ciclo se trabaja con los tres usos de la variable siguiendo dos fases de instrucción: primero se introducen los usos de la variable de manera diferenciada y después se utilizan situaciones en las que los estudiantes requieran integrar los usos estudiados.

En este contexto, el modelo 3UV se usa como guía en el diseño de actividades y secuencias didácticas que siguen el patrón propuesto. Los problemas diseñados o seleccionados pueden ser variaciones de problemas clásicos o problemas innovadores que pueden trabajarse con o sin tecnología. Durante todo el trabajo se insiste en la interpretación del uso de la variable que aparece en cada etapa de trabajo de los problemas,

en su manipulación, y se ofrecen múltiples oportunidades de simbolización de la misma. En el caso de las variables en relación funcional se incluyen, además, oportunidades de pasar del establecimiento de la correspondencia entre variables a considerar su variación conjunta y el uso de una variedad de representaciones.

Lo anterior se traduce en el uso de actividades como las siguientes en un primer curso elemental:

Considera la expresión $2x + 9$ ¿Qué representa la x? ¿Cuántos valores puede tomar x para que la expresión sea verdadera? ¿Puedes encontrar sus valores?

Considera la expresión $2x + 9 = 0$ ¿Qué representa la x? ¿Cuántos valores puede tomar x para que la expresión sea verdadera? ¿Puedes encontrar sus valores?

Considera la expresión $y = 2x + 9$ ¿Qué representan la x y la y? ¿Cuántos valores pueden tomar x e y para que la expresión sea verdadera? ¿Puedes encontrar sus valores?

Estas tres actividades se utilizan en la misma sesión de trabajo. El maestro debe discutir las diferencias en la forma en que la variable se usa en cada una de ellas para enfatizar sus distintos usos y ayudar a los alumnos a diferenciar entre ellos.

Posteriormente pueden utilizarse actividades, por ejemplo:

Considera la expresión $y = x + 4 + 3x + 2$. ¿Para qué valores de x los valores de y están entre -1 y 4?

Al contrario de las anteriores, resolver esta actividad requiere pasar entre los tres diferentes usos de la variable e integrarlos, comprendiendo que el mismo símbolo puede representar los diferentes usos de la variable que se manifiestan en distintos momentos del proceso de solución del problema, si bien el símbolo es único y siempre el mismo.

Un ejemplo de actividades que se pueden usar a un nivel más avanzado es el siguiente:

1. Resuelve $(4 + x)(3 - 2x) = 10$
2. Encuentra una expresión equivalente a $(4 + x)(3 - 2x)$ ¿Qué valores de x hacen que la expresión $(4 + x)(3 - 2x)$ sea verdadera?
3. Dada $f(x) = (4 + x)(3 - 2x)$, encuentra los intervalos en los que $f(x)$ es creciente o decreciente.

Una actividad integradora de los distintos usos de la variable y que requiere la posibilidad de pasar de uno a otro, además de incluir la simbolización, podría ser la siguiente:

Una hortaliza da 35 kg de fruta diarios si tiene 60 árboles. Debido a la sobrepoblación, la producción de cada árbol se reduce en medio kg por cada árbol adicional que se plante. ¿Cuántos árboles deben plantarse para maximizar la producción total de la hortaliza?

Con actividades como las anteriores, incorporando además problemas verbales o en representaciones variadas, se ofrecen múltiples oportunidades a los estudiantes de interpretar y manipular los distintos usos de la variable en situaciones diversas, lo que

favorece que reflexionen sobre sus acciones, las hagan explícitas y en algún momento las hagan suyas. Es claro que plantear actividades en las que únicamente aparece un uso de la variable es imposible, fuera de casos muy simples que se utilizan como punto de partida. La estrategia de enseñanza consiste en seleccionar actividades en las que hay un énfasis más claro en un uso específico de la variable, y en hacer explícito cada cambio de uso de la variable a lo largo del proceso de solución.

La mayor ventaja de utilizar un acercamiento didáctico como el que proponemos es que, independientemente del nivel de complejidad, los distintos usos de la variable se trabajan siempre de modo simultáneo para subrayar sus diferencias y el carácter multifacético de la variable, así como para integrarlos en un solo concepto multifacético. La hipótesis que subyace a este acercamiento es que de esta manera los estudiantes podrán desarrollar una comprensión profunda del papel de las variables y sus cambios en cada situación, y que eso contribuirá a ayudarles a tomar decisiones correctas sobre las acciones a llevar a cabo. Esta hipótesis se ha puesto a prueba tanto en situaciones de enseñanza para maestros en formación como con estudiantes.

4.1.2. Evaluación del modelo de enseñanza

El modelo de enseñanza fue implementado por primera vez en el aula en un estudio con alumnos de entre 12 y 13 años de edad, de primer año de secundaria, en una escuela pública en México (Ursini, Trigueros, Montes y Escareño, 2002). En cada ciclo, las primeras actividades se dedicaron a los aspectos involucrados en cada uso de la variable; fueron seguidas de una o más actividades integradoras, en donde están implicados aspectos de los tres usos de las variables. Los contextos empleados variaron entre geométricos, puramente algebraicos o relacionados con problemas reales.

Para evaluar los resultados, se aplicó un cuestionario que contenía tareas semejantes a las trabajadas en el aula. Se observó una diferencia importante entre las respuestas al cuestionario y las dificultades manifestadas al inicio del estudio. El análisis de los resultados demostró que después de 15 sesiones los alumnos habían desarrollado la habilidad de reconocer los distintos usos de la variable y podían usarlos de manera apropiada en la solución de problemas algebraicos simples. En general, demostraron habilidad para pasar de un uso a otro de la variable con flexibilidad. La mayoría mostró, además, fluidez en el manejo de distintos tipos de expresiones algebraicas y de solución de problemas. Al final de la experiencia, se realizaron entrevistas semiestructuradas a tres alumnos seleccionados según las características del tipo de comprensión de la variable que mostraron a lo largo de la misma, con el fin de profundizar en las dificultades que presentaron durante el desarrollo del trabajo, así como redefinir algunas actividades. Las entrevistas mostraron también un avance significativo de estos estudiantes en su comprensión de la variable, en relación con los resultados obtenidos en el cuestionario intermedio.

Producto de la evaluación de esta estrategia en distintos cursos y talleres de formación de profesores de secundaria, se publicó un libro para guiar a los maestros en la forma de poner en práctica esta estrategia (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005).

Por supuesto, este acercamiento presenta dificultades. La mayor de ellas es que su implementación depende fuertemente de que el maestro tenga una comprensión profunda de la variable y del modelo 3UV, además de la capacidad para plantear ejemplos pertinentes cuando sea necesario, y de generar discusiones enriquecedoras de acuerdo con las necesidades detectadas en los estudiantes. Esta limitación es importante dado que, como lo reporta Juárez López (2002) en un estudio realizado con 72 profesores de secundaria en activo, muchos de ellos mostraron dificultades similares a las de los alumnos cuando contestaron el cuestionario que mencionamos anteriormente. Esto indica que muchos profesores no están preparados para ofrecer el acercamiento a la variable propuesto y, lo que es aún más preocupante, podrían estar enseñando a sus estudiantes prácticas y conceptos erróneos, lo que puede dificultar su aprendizaje futuro.

Es interesante notar que en el documento del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM, 2000) la mayor parte de las recomendaciones se refiere al objetivo de desarrollar el concepto de variable en la educación secundaria, pero hay poca discusión al respecto en relación con el nivel medio superior. Lo mismo sucede en México. La revisión de los documentos relativos a la reforma curricular del 2006 publicada por la Secretaría de Educación Pública deja la impresión de que se busca que los estudiantes desarrollen una comprensión robusta de la variable antes de que ingresen al bachillerato. Sin embargo, hay evidencias de que los estudiantes llegan a la universidad con una comprensión muy limitada de la variable algebraica, lo que sugiere que sería muy necesario abordar esta problemática también en los cursos de bachillerato.

5. LA IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD

Para profundizar en el entendimiento de las dificultades que tienen los estudiantes universitarios con los diferentes usos de la variable, en otro estudio (Ursini y Trigueros, 2006) se elaboró un nuevo cuestionario y se aplicó a estudiantes que estaban cursando la materia Sistemas Dinámicos y Optimización, correspondiente al quinto de ocho semestres de la carrera de Economía, que requiere un dominio considerable de las matemáticas. El análisis de las respuestas dadas al cuestionario y durante las entrevistas mostró que un poco más de la mitad de los estudiantes podía reconocer la incógnita en ecuaciones o problemas simples, pero que en el caso de problemas complejos o de situaciones en las que la incógnita no se indicaba explícitamente, solo un porcentaje pequeño de los estudiantes era capaz de identificarla. Además, se encontró un uso persistente de métodos aritméticos en la solución de problemas.

Los resultados se compararon con los obtenidos por alumnos de secundaria. Se encontró que el haber tomado cursos avanzados de matemáticas en la universidad había tenido un impacto positivo en la capacidad de los estudiantes para determinar intervalos y simbolizar relaciones funcionales un poco complejas, si bien muchos tenían todavía dificultades con estos aspectos. Los resultados sugirieron también que, si bien los estudiantes desarrollan algo de intuición algebraica en los primeros cursos, ésta se pierde conforme toman más cursos de álgebra.

Una conclusión fue que los estudiantes universitarios, al igual que los de niveles de educación media y media superior, pueden diferenciar e integrar los diferentes usos de la variable únicamente cuando trabajan con problemas muy simples. Al aumentar la complejidad de los problemas durante un curso específico, los estudiantes universitarios son capaces de utilizar los procedimientos complejos aprendidos, siempre y cuando permanezcan en ese entorno, pero al enfrentar problemas distintos o estar fuera de una clase específica, regresan a trabajar con métodos aritméticos en lugar de usar métodos algebraicos. Si bien los estudiantes universitarios muestran mayor capacidad que los estudiantes más jóvenes para diferenciar e integrar los usos de la variable, su conceptualización del álgebra y su capacidad de utilizar el razonamiento algebraico son aún muy limitadas.

6. LA VARIABLE Y EL SENTIDO DE ESTRUCTURA

Muchos investigadores han señalado que la solución de problemas algebraicos complejos necesita el desarrollo del *sentido de estructura* (Hoch y Dreyfus, 2004), de la *manipulación algebraica* y del *álgebra axiomática* (Tall, 2004). Compartimos estos señalamientos, pero consideramos que estas capacidades implican ante todo una comprensión flexible e integral del concepto de variable, pues sin ella los estudiantes difícilmente tendrán éxito al enfrentar este tipo de problemas. Si bien deberían desarrollar gradualmente las capacidades básicas que les permitan lograr una comprensión profunda del álgebra elemental, cuando se consideran los conocimientos que necesitan para trabajar con situaciones algebraicas un poco más complejas, surgen otras preguntas, por ejemplo, si la flexibilidad en el uso de variables es suficiente. Si así no fuera, ¿qué más se necesita para tener éxito?

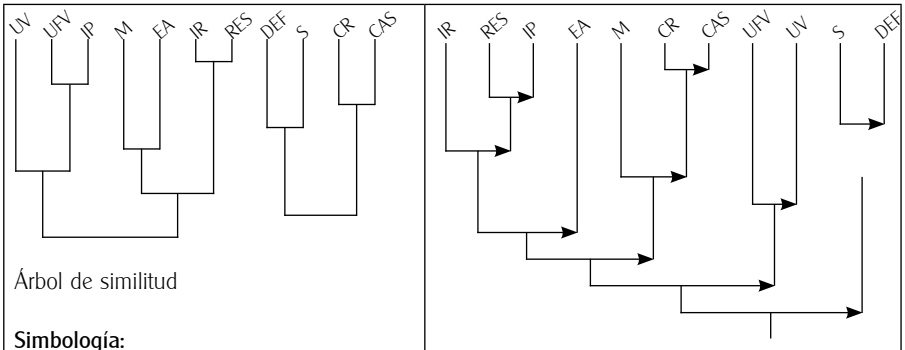
Para responder a estas preguntas, diseñamos un estudio (Trigueros y Ursini, 2008) donde analizamos las respuestas de 36 estudiantes universitarios a preguntas típicas de una prueba de álgebra universitaria, usando para ello el modelo 3UV. Se analizaron, por ejemplo, las respuestas dadas a las ecuaciones y a las desigualdades siguientes: $2|x + 3|^2 - 5|x + 3| + 3 = 0$; $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$; $(-2x^2 + 5x - 6)/(x - 1) \geq 4$; encontrar el valor de k para que $(3x - 13)/(x + k) \leq 2$ cuando $x \in [-3, 8]$.

Una comparación entre estudiantes exitosos y no exitosos permitió resaltar algunos factores, como tener la capacidad de: usar la variable algebraica de manera flexible; diferenciar e integrar sus distintos usos a lo largo del proceso de solución de un problema;

considerar las expresiones algebraicas como objetos matemáticos con los que se puede operar; analizar un problema antes de comenzar a manipular una expresión sin tener claro el propósito de ello; descubrir alguna estructura en una ecuación dada, o tener cierto sentido de estructura; usar las definiciones y las restricciones de un problema de manera adecuada; prever qué implican las definiciones y las restricciones; tener en cuenta las diferentes cuestiones implicadas en un problema y de su papel en la solución, y priorizar las diferentes acciones que llevan a la solución del problema planteado.

7. IMPORTANCIA DE LA VARIABLE EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA: UN ESTUDIO ESTADÍSTICO

Más adelante, y con el fin de ahondar en los resultados del estudio anterior, se llevó a cabo un análisis estadístico (Trigueros, Ursini y Escandón, 2012), utilizando el método de estadística implicativa (Gras, 1996). El primer análisis (análisis de similitud que reúne parejas de variables o grupos de mayor a menor semejanza estadística de arriba hacia abajo) mostró que las categorías de análisis se organizaron en dos grupos disjuntos: el primero, relacionado con la correcta interpretación de los usos de la variable, el desarrollo del sentido de estructura, la posibilidad de resolver correctamente los problemas y de interpretar la solución obtenida; el segundo, ligado a la interpretación correcta de definiciones, la producción de expresiones algebraicas para representar problemas, y la posibilidad de reconocer casos y restricciones (figura 1).



Simbología:
UV: Uso de la variable;
IP: Interpretación del parámetro;
M: Manipulación;
S: Simbolización;
RES: Respuesta correcta;
CAS: Uso correcto de casos;
UFV: Uso flexible de la variable;
EA: Interpretación de expresiones algebraicas en general;
IR: Interpretación de resultados;
DEF: Uso de definiciones;
CR: Consideración de restricciones.

Figura 1. Árbol de similitud y árbol jerárquico

Destaca en el árbol de similitud la relación fuerte entre el uso flexible de las variables (UFV), incluyendo la interpretación de los parámetros (IP) y del uso de la variable (UV) en la solución de problemas. El análisis del árbol jerárquico muestra implicaciones lógicas entre las variables de estudio para determinar posibles reglas. Se desprende que una correcta interpretación de la variable, en particular de los parámetros y de las definiciones, y el desarrollo del sentido de estructura son indispensables en la solución de problemas algebraicos complejos. Por último, el análisis implicativo (que proporciona relaciones causa-efecto, no basadas en correlaciones, con una significatividad mayor al 75%) muestra los detalles de la relación causal entre la posibilidad de distinguir diferentes casos, la interpretación de parámetros, el sentido de estructura y la interpretación de los usos de la variable en la resolución correcta de los problemas (figura 2).

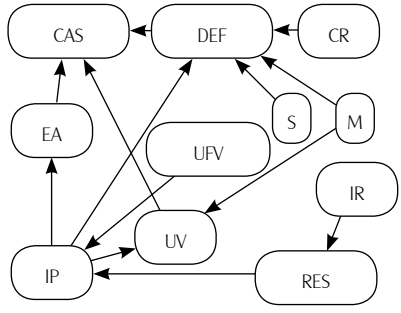


Figura 2. Gráfica implicativa

Como puede concluirse de este estudio, todos los resultados obtenidos a través del uso del programa asociado a esta técnica de análisis ponen de manifiesto la importancia de la variable en el aprendizaje del álgebra. Quienes obtuvieron los mejores resultados en el examen propuesto fueron los estudiantes que mostraron un dominio equilibrado de los usos de la variable y que han desarrollado la capacidad de usar flexiblemente la variable, cambiando de uso cuando es necesario e integrando los usos en la respuesta de los problemas.

8. EL MODELO 3UV, UNA HERRAMIENTA PARA ESTUDIOS COMPARATIVOS

Para profundizar sobre las posibles causas de las dificultades que encuentran los estudiantes con la variable algebraica, realizamos en años recientes algunos estudios comparativos internacionales en los que participaron estudiantes españoles, italianos y mexicanos (Ursini, 2014; Álvarez, Gómez-Chacón y Ursini, 2015). Este tipo de estudios proporciona información útil acerca de la comprensión de las variables algebraicas que

logran estudiantes de diferentes países, además de poner en evidencia algunos de los problemas que pueden afectar su desempeño. Por otra parte, estos estudios pueden ayudar a los países participantes a detectar las fortalezas y debilidades de su sistema educativo al compararlas con las de otros.

En los estudios participaron 177 estudiantes españoles (92 de tercero de secundaria y 85 de segundo año de bachillerato), 214 italianos (96 de primero y 118 de tercero de secundaria) y 273 mexicanos (99 de primero y 92 de tercero de secundaria, y 82 de segundo año de bachillerato), todos ellos de escuelas públicas. Si bien los planes de estudio de matemáticas cubren temas similares en los tres países, también existen diferencias muy marcadas entre México, por un lado, y España e Italia por el otro, en cuanto a la formación docente, el nivel socioeconómico, el número de estudiantes por aula, la infraestructura escolar y el acceso a la tecnología, por mencionar solo algunos de los factores que pueden tener un fuerte impacto en el aprendizaje. Otra diferencia importante está en el rendimiento de los estudiantes mexicanos, españoles e italianos en evaluaciones internacionales como PISA, en las que los estudiantes españoles e italianos obtienen una puntuación significativamente más alta, en promedio, que los estudiantes mexicanos.

El modelo 3UV fue la herramienta teórico-metodológica que se usó en estos estudios para analizar las respuestas de los estudiantes a un mismo cuestionario (una adaptación del cuestionario de Trigueros y Ursini, 2003) que indaga la comprensión de los tres distintos usos de la variable considerados en el modelo. Los resultados evidenciaron similitudes y diferencias entre los tres países. Por ejemplo encontramos que, al término de los primeros tres años de secundaria, la mayoría de los estudiantes que participaron en el estudio, independientemente del país: sigue anclada a casos específicos y cálculos numéricos; ha adquirido solo una comprensión elemental y pobre de la variable algebraica y sus distintos usos, con muchas incertidumbres y conceptos erróneos; no logra descontextualizar el conocimiento adquirido, generalizar y acercarse a un pensamiento más abstracto que caracteriza el pensamiento algebraico y, de allí, por ejemplo, las dificultades para simbolizar; está poco acostumbrada a reflexionar sobre sus acciones, solo puede ejecutarlas cuando así se le indica y, de allí, por ejemplo, la dificultad para interpretar el rol de la variable en un problema específico.

Por otro lado, al considerar para cada país las preguntas contestadas correctamente por más de 50% de los estudiantes de tercero de secundaria, aparecieron diferencias en las fortalezas logradas en cada país: los estudiantes españoles tuvieron el mejor desempeño con la incógnita, seguidos por los estudiantes italianos y después por los estudiantes mexicanos. Los estudiantes españoles tuvieron el mejor desempeño con el número general, seguidos muy de cerca, y a la par, por los estudiantes italianos y mexicanos. En cuanto a las variables en relación funcional, los estudiantes españoles y mexicanos, a la par, tuvieron mejor desempeño que los estudiantes italianos.

Se encontró que existe una fuerte dependencia entre la capacidad de los estudiantes para trabajar con la variable algebraica y el peso que se da en los distintos planes de estudio a cada uno de los usos de la variable, y también el enfoque de enseñanza que

se usa en cada contexto. Por ejemplo, el plan de estudios que habían seguido los estudiantes italianos concentraba la enseñanza del álgebra esencialmente en tercer año de secundaria y ponía el énfasis sobre todo en el trabajo con las variables como incógnita y como número general, mientras que el trabajo con las variables en la relación funcional quedaba apenas esbozado. En contraste, los estudiantes mexicanos empezaban el estudio del álgebra desde el primer año de secundaria y el plan de estudios contemplaba abordar desde el inicio los tres usos de la variable y sus distintos aspectos, aunque no con el énfasis suficiente en, por ejemplo, la interpretación de los distintos usos de la variable y la manipulación.

Algunas similitudes entre las debilidades de los grupos estudiados, por ejemplo sus dificultades con la interpretación de la variable, apuntan a algunas acciones que podrían tomarse en los países participantes para mejorar la comprensión de este concepto, como son: poner más empeño en el desarrollo de habilidades metacognitivas, de toma de decisiones, de generalización y de abstracción. Finalmente, estos estudios mostraron también que la utilización del modelo 3UV es apropiado para analizar los estudios comparativos, dado que permitió examinar y comparar la capacidad de estudiantes de distintos países para trabajar con los tres usos de la variable algebraica y los aspectos que caracterizan cada uno. Los resultados obtenidos podrían constituir un primer paso en la sistematización de una serie de estudios sobre las dificultades que tienen los estudiantes con el aprendizaje del álgebra, combinando enfoques teóricos que permitan una mejor comprensión de la investigación empírica.

9. CONCLUSIONES

Hemos mostrado aquí cómo han evolucionado nuestras investigaciones en los últimos 30 años, y cómo los resultados obtenidos nos han permitido desarrollar una herramienta teórico-metodológica, el modelo 3UV, que nos posibilita entender más a fondo las fortalezas y debilidades del estudiantado en relación con el manejo del concepto de variable algebraica. Hemos constatado que la dificultad para trabajar flexiblemente con las variables actúa como un obstáculo para la comprensión de otros conceptos matemáticos. También, hemos observado que los errores que cometen los estudiantes novatos no se corrigen necesariamente con la enseñanza, y que los resultados de investigación raramente llegan a los maestros o no tienen el impacto suficiente para que puedan cuestionar las prácticas de enseñanza. De la misma manera, hemos encontrado que la comprensión del concepto multifacético de la variable depende fuertemente del plan de estudios, y que es posible trabajar con los distintos usos de la variable desde los primeros acercamientos al álgebra. Un plan de estudios que contemple el trabajo con los tres usos de la variable ayuda notablemente a que mejore la capacidad de los alumnos para manejar este concepto.

Confiamos en que reflexiones como las que aquí presentamos contribuyan, por un lado, a que en los planes de estudio oficiales se contemple la necesidad de trabajar

con los distintos usos de la variable, auspiciando el desarrollo de la capacidad de pasar con flexibilidad entre ellos y, por el otro, propicien que el profesorado de matemáticas considere la importancia de este enfoque y lo implemente en sus cursos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias a la colaboración del ITAM y de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C.

REFERENCIAS

Álvarez, I., Gómez-Chacón, M. I. y Ursini, S. (2015). Understanding the Algebraic Variable: Comparative Study of Mexican and Spanish Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1507-1529. ISSN: 1305-8223.

Benítez, E. (2004). *Los usos de la variable en libro de texto de matemáticas para secundaria* (tesis de maestría). Cinvestav-IPN, México.

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking -the case of parameter. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International PME Conference* (vol. 2, pp. 88-95). Lisbon, Portugal: Program Committee of the 18th PME Conference.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknown and variables-Parameters and dummy variables in high school algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 177-189). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children Strategies and Errors.* Windsor, United Kingdom: NFER-Nelson.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? En *Proceedings of the Eighteenth International PME Conference* (pp. 368-375). Lisbon, Portugal: Program Committee of the 18th PME Conference.

Gras, R. (1996). *L'Implication Statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage éditions.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth International PME Conference* (vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

Juárez López, J. A. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria* (tesis de maestría). Cinvestav-IPN, México.

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children* (PhD Thesis). University of London, United Kingdom.

López Pineda, A. (1996). Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos

de nivel medio superior (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleeman y J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25-50). New York, USA: Academic Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia, USA: NCTM.

Philipp, R. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables. *Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561.

Tall, D. (2004). Reflections on research and teaching of equations and inequalities. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth International PME Conference* (vol. 3, pp. 158-161). Bergen, Norway: PME.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2003). First year undergraduates difficulties in working with the concept of variable. CBMS, *Research in Collegiate Mathematics Education, 12*, 1-29.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2008). Structure sense and the use of variables. En O. Figueras, J. L. Cortina, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 32 and PME-NA XXX* (vol. 4, pp. 337-344). Morelia, México: PME.

Trigueros, M., Ursini, S. y Escandón, C. (2012). Aspects that play an important role in the solution of complex algebraic problems. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 147-153). Taipei, Taiwan: Program Committee of the 36th PME Conference.

Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, M. D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática, 12*(2), 27-48.

Ursini, S. (1990). Generalization Processes in Elementary Algebra: interpretation and symbolization. En G. Broker, P. Coob y T. Mendicutti (Eds.), *Proceedings of the XIV PME International Conference* (vol. 2, pp. 149-156). México D.F., México: Program Committee of the 14th PME Conference.

Ursini, S. (1994). *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo* (unpublished doctoral dissertation). University of London Institute of Education, United Kingdom.

Ursini, S. (1996). Creación de un Potencial para Trabajar con la Noción de Variable. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 423-440). México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ursini, S. (2014). Errori e Difficoltá nella comprensione del concetto di variabile algébrica. Uno studio con ragazzi della scuola secondaria di primo grado. *Quaderni CIRD, 8,* 7-22. ISSN 2039-864.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first International PME Conference* (vol. 4, pp. 254-261). Lanti, Finland: PME.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los Estudiantes Universitarios frente al Concepto de Variable. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (vol. 2, pp. 445-463). México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty-fifth International PME Conference* (vol. 4, pp. 327-334). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2004). How do high school students interpret parameters in algebra? En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth International PME Conference* (vol. 4, pp. 361-368). Bergen, Norway: PME.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18*(3), 5-38.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, D.F., México: Trillas.

Ursini, S., Trigueros, M., Montes, D. y Escareño, F. (2002). Teaching algebra using the 3UV model. En D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the XXIV PME-NA International Conference, American Chapter* (vol. 1, pp. 495-507). Athens, Georgia, USA: ERIC/CSMEE Publications.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, Virginia, USA: NCTM.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher, 76*(7), 474-479.

Nuevos elementos de respuesta a la problemática del álgebra elemental desde la teoría antropológica de lo didáctico

Noemí Ruiz-Munzón
Escola Superior de Ciències Socials i de l'Empresa, Tecnocampus, España
Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, Barcelona, España
Josep Gascón
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Resumen: Partimos del artículo de Bolea, Bosch y Gascón (2001a) que aborda la manera como se formulan, desde distintas perspectivas didácticas, los problemas en torno a la enseñanza del álgebra elemental. Aquí proponemos algunos de los avances realizados por nuestro grupo de investigación, así como las nuevas cuestiones que estos permiten plantear. En particular, destacamos el rol fundamental que desempeña la elaboración de modelos epistemológicos de referencia como herramienta metodológica para que los investigadores se puedan distanciar de las concepciones sobre el álgebra y su enseñanza, que prevalecen tanto en la escuela como en la sociedad. Estos modelos permiten, a su vez, explicitar nuevas posibles propuestas curriculares y didácticas que intentan superar las dificultades o limitaciones que plantea la enseñanza actual.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo toma como punto de partida el artículo de Bolea, Bosch y Gascón (2001a, en adelante BBG2001) sobre la problemática del álgebra escolar. En él se presentan dos visiones de la investigación sobre la enseñanza del álgebra desde el *programa cognitivo* (primera parte) y desde el *programa epistemológico* (segunda parte). Estas visiones se caracterizan en particular por su forma específica de plantear los problemas de investigación.

En BBG2001 se muestra que las teorías didácticas que se sitúan en el ámbito del programa cognitivo tienden a centrar su objeto primario de investigación en los procesos cognitivos de los sujetos, al tiempo que asumen, de manera más o menos explícita, el modelo epistemológico dominante en las instituciones escolares. Estas asunciones condicionan fuertemente el tipo de problemas didácticos que se pueden formular.

El modelo dominante identifica el álgebra elemental con una especie de *aritmética generalizada,* originando un fenómeno de "aritmetización del álgebra elemental": se encierra la problemática del álgebra en el marco aritmético y se reduce la actividad

algebraica a una actividad puramente numérica, donde la estructura de las relaciones entre variables pasa inadvertida. Este fenómeno está relacionado con la eliminación de las magnitudes de la enseñanza obligatoria y la disociación entre el álgebra elemental y el resto de las áreas de la matemática escolar.

El programa epistemológico –inaugurado por la teoría de las situaciones didácticas (TSD)– constituye una ruptura con el modelo cognitivo, al tomar la actividad matemática como objeto primario de investigación de los fenómenos didácticos. De esta forma, el programa epistemológico postula la necesidad de modelizar explícitamente los diferentes ámbitos de la actividad matemática, lo que da origen a un nuevo tipo de problemas de investigación didáctica.

En este trabajo nos centraremos en la forma como la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), como desarrollo de la TSD dentro del programa epistemológico, responde a dicha necesidad metodológica mediante la construcción de modelos epistemológicos específicos de los diferentes ámbitos de la actividad matemática y, en particular, de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) del álgebra elemental. Mostraremos que, con base en dicho MER, es posible diseñar y experimentar procesos de estudio que permiten evitar muchas de las consecuencias didácticas indeseables de los fenómenos descritos.

En concreto, mostraremos que los trabajos llevados a cabo por nuestro grupo de investigación desde el año 2001, especialmente aquellos recogidos en la tesis doctoral de Ruiz-Munzón (2010), han contribuido a aportar nuevos elementos de respuesta, tanto a nivel teórico como a nivel experimental, a muchas de las cuestiones o problemas de investigación que proponíamos en BBG2001 (pp. 48-50).

Presentaremos en primer lugar el papel crucial que juega el MER como instrumento de emancipación de la investigación didáctica respecto a las concepciones dominantes en las instituciones de enseñanza (Gascón, 2014). A continuación, describiremos de forma esquemática nuestra propuesta de MER en torno al álgebra elemental. Por último, proponemos una actualización de las cuestiones y una ampliación de los elementos de respuesta que presentamos en el año 2001, a la luz de los progresos teóricos y metodológicos que se han desarrollado en estos años, así como algunas nuevas líneas de investigación. Concluiremos con un apunte sobre la situación actual de los programas cognitivo y epistemológico.

2. INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA Y MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE REFERENCIA

La noción de transposición didáctica (Chevallard, 1985a) muestra que el contenido de enseñanza, que está en el corazón del cuestionamiento didáctico, no puede darse por sentado. Las preguntas sobre la naturaleza y la función de los diferentes elementos de las matemáticas para enseñar son, en este sentido, un elemento esencial del análisis didáctico. ¿Cuál es el álgebra que enseñamos o se supone que debemos enseñar en la educación secundaria? ¿De qué está hecha? ¿Para qué sirve?

Las diferentes instituciones que participan en el proceso didáctico proponen respuestas más o menos explícitas a estas preguntas, por ejemplo, a partir de la organización curricular de las matemáticas, que puede variar según el país, el nivel educativo y el período histórico, pero que se mantienen relativamente invariantes en la denominación de los contenidos. Es decir, siempre habrá en álgebra, por ejemplo, el trabajo con expresiones alfanuméricas (o expresiones algebraicas), la simplificación, la factorización y el desarrollo de estas expresiones, así como la resolución de ecuaciones y desigualdades de primero y segundo grado con una variable. La inclusión de parámetros, la manipulación de fórmulas y la interpretación funcional de expresiones algebraicas, son elementos menos estables o que pueden presentar diferencias en los diversos sistemas educativos, así como el vínculo entre el álgebra y los números enteros, la medida de cantidades o la geometría.

Los investigadores en didáctica no deben asumir acríticamente estas respuestas institucionales implícitas. Por el contrario, frente a un problema didáctico relacionado con un determinado contenido matemático, el didacta debe tomar como objeto de estudio el modelo epistemológico dominante en la institución relativo a este contenido (cómo se delimita, se define, se usa, se valora, etc.). También debe elaborar sus propios modelos, dentro de un trabajo de emancipación epistemológica de la didáctica (Chevallard, 2007b), dando lugar a lo que hemos llamado, en la TAD, *modelos epistemológicos de referencia* (Bosch y Gascón, 2005).

Los MER permiten explicar la perspectiva adoptada sobre el tema, sector o ámbito involucrado en el proceso didáctico considerado y determinar, entre otras cosas, la extensión del ámbito matemático en el que se formulan los problemas de investigación, los fenómenos que son visibles y el tipo de explicaciones provisionales que se considerarán como aceptables. La expresión "modelo" debe entenderse en el sentido científico del término: funciona como una hipótesis de trabajo, sujeto a revisión y desarrollos constantes a partir de los elementos empíricos con los que se contrasta. Para comprender la naturaleza provisional de los MER, debe recordarse que su función no es solo redefinir un ámbito matemático en términos específicos para la investigación. Un MER también es un intento de responder preguntas de investigación sobre la estructura y dinámica del ámbito en cuestión, y su relación con otros contenidos de enseñanza (Gascón, 2014).

En la TAD, los MER están formulados en términos de amalgamas o secuencias de *praxeologías* (Bosch y Gascón, 2005). La noción de praxeología sirve como marco general para modelizar las actividades humanas, así como el saber y los conocimientos utilizados y generados por estas actividades. Las praxeologías son entidades dinámicas: la implementación de técnicas bajo diferentes situaciones a menudo plantea preguntas (¿podemos hacer otra cosa?) y genera nuevas necesidades técnicas y tecnológicas (¿cómo hacerlo?, ¿por qué funciona?), lo que produce el surgimiento de nuevas tareas problemáticas y el desarrollo de nuevos elementos praxeológicos para implementarlas.

Aunque la noción de MER proviene de la TAD, otros enfoques didácticos utilizan construcciones teóricas análogas, a veces explícitamente y en otras permanecen implí-

citas. Un ejemplo de ello es el caso de la noción de *situación fundamental* en la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1998), que permite modelar el conocimiento en términos de juego contra un entorno. Pero podemos citar otros ejemplos, como la teoría del campo conceptual que usa tríos de situaciones, invariantes operativos y significantes para describir conceptos (Vergnaud, 1991); la teoría APOS y la noción de *descomposición genética* de un concepto (Dubinsky y McDonald, 2002) o la teoría de la abstracción en contexto y las acciones epistémicas RBC+C *(recognizing, building, constructing, consolidating)* de Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (2001).

Los MER construidos en la TAD tienen características particulares. En primer lugar, los datos empíricos utilizados no provienen únicamente del sistema educativo, sino que incluyen materiales de las diferentes instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica (la escuela y su noosfera, la matemática sabia, etc.) durante diferentes períodos de tiempo. Por ejemplo, en el caso del álgebra es muy importante considerar la organización curricular que existía antes de las matemáticas modernas, donde el álgebra era uno de los principales bloques de contenido que se enseñaba, junto con la aritmética y la geometría.

Otra característica de los MER es que inicialmente no incorporan la idiosincrasia de los posibles actores de los procesos didácticos ni las condiciones particulares de organización de la enseñanza. Estos aspectos se agregan más tarde como posibles condiciones para la implementación de procesos didácticos. Sin embargo, dado que los modelos se especifican en términos de praxeologías, estos incluyen cuestiones concretas que motivan y pueden considerarse como posibles *razones de ser* del contenido matemático en juego, justificando así su necesidad bajo ciertas condiciones y para ciertos tipos de sujetos. De ahí el hecho de que incorporen una cierta noción de sujeto institucional de referencia o *alumno genérico* relativo a las instituciones contempladas (Bosch, Gascón y Trigueros, 2017).

Finalmente, es importante señalar que los MER construidos se refieren a organizaciones matemáticas relativamente completas e interconectadas (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004) para incorporar las cuestiones no artificiales que las motivan y las hacen funcionales. Así, no hablaremos, por ejemplo, del MER de las ecuaciones de primer grado o de la distributividad, sino del MER del álgebra elemental o de la modelización algebraico-funcional (Ruiz-Munzón, 2010), lo que supondrá, además, la existencia de un MER para la aritmética elemental y fundamentará un MER sobre modelación funcional y el cálculo diferencial.

3. UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA PARA EL ÁLGEBRA ELEMENTAL

En el caso del álgebra elemental, el MER que proponemos se basa en un gran número de investigaciones previas en el marco de la TAD, que van desde los primeros estudios

sobre la transposición didáctica, la noción de modelización y la problemática de la ecología de los saberes (Chevallard, 1985b; 1989; 1990; Gascón, 1994-1995; 1999a), hasta desarrollos más recientes en términos de praxeologías, objetos ostensivos, programas de cálculo y procesos de algebrización (Ruiz-Munzón, 2010; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch y Gascón, 2012).

El álgebra elemental se interpreta como un *proceso de algebrización* de praxeologías matemáticas ya disponibles o de praxeologías no-matemáticas fácilmente matematizables en términos de operaciones con cantidades numéricas o geométricas. Este proceso de algebrización termina afectando a las praxeologías de todas las áreas de las matemáticas. En este sentido, el álgebra aparece a un nivel diferente al de otras praxeologías que se enseñan en la escuela, como la aritmética, la geometría o la estadística, porque constituye una herramienta de modelización para cualquier praxeología matemática (Bolea, Bosch y Gascón, 1998; 2001b; 2004). Presenta la singularidad de aparecer como un instrumento tanto teórico como práctico, que amplía la capacidad para resolver problemas, así como las posibilidades de cuestionar, explicar y reorganizar conocimientos ya construidos. Por lo tanto, el álgebra no solo es un instrumento poderoso para abordar problemas que surgen en diversas áreas de las matemáticas escolares (y de otras disciplinas), y que son muy costosos o no pueden resolverse permaneciendo en estos campos. También, el álgebra proporciona herramientas para el trabajo teórico, como son las descripciones y organizaciones de los tipos de problemas abordados y de las técnicas utilizadas para resolverlos, así como justificaciones y generalizaciones de las mismas.

El proceso de algebrización de las praxeologías se puede realizar de diferentes maneras y en diversos grados. Así, en BBG2001 (p. 55) se introducían cuatro indicadores del grado de algebrización de una praxeología matemática, que corresponden a:

1) La capacidad de describir y manipular la estructura general de los tipos de problemas abordados.
2) La posibilidad de "objetivar" o "tematizar" las técnicas matemáticas utilizadas, para describirlas mejor, cuestionarlas y desarrollarlas.
3) La unificación y reducción ostensiva de tipos de problemas, técnicas y tecnologías.
4) La aparición de nuevos problemas independientes de los sistemas modelizados.

Estos indicadores se han utilizado para destacar cómo las matemáticas de la escuela pueden considerarse solo parcialmente algebrizadas, y para constatar la algebrización abrupta que aparece cuando se introducen las matemáticas de nivel superior (Bolea *et al.,* 2001b). Los indicadores también permiten identificar restricciones transpositivas relacionadas con la enseñanza del álgebra. Sin embargo, estos no son operativos para crear, experimentar y analizar procesos didácticos para la introducción y el desarrollo del álgebra elemental. Se ha requerido para ello una evolución del MER inicial.

3.1. Los programas de cálculo y la primera etapa del proceso de algebrización

En esta perspectiva, la introducción del álgebra como herramienta de modelización requiere una primera construcción, la del sistema inicial que vamos a modelizar. En otras palabras, necesitamos una praxeología que pueda funcionar como un *medio* (en el sentido de la teoría de las situaciones didácticas) y que sea lo suficientemente rica como para generar, mediante sucesivos procesos de modelización, los elementos básicos del álgebra elemental: trabajo con expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones, fórmulas, variables y parámetros, etcétera.

En el modelo que proponemos, el sistema inicial es el conjunto *S* de lo que llamaremos, siguiendo la propuesta de Chevallard (2002; 2007a), *programas de cálculo* (PC). Un PC está formado por una secuencia de operaciones con cantidades o números que pueden realizarse paso a paso y siempre termina con un resultado numérico concreto. Por ejemplo, $2 + 3$ es un PC, como también los son: $6 \cdot (5 - 3) + 2$ o $[(3 - 1)^2 + 5]/6$. Los denotaremos por $PC(a_1, a_2, ..., a_n)$ donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son las cantidades que se deben operar (o "argumentos" del PC). Los problemas tradicionales de la aritmética elemental se resuelven mediante la descripción verbal o gráfica de un PC con todos los argumentos numéricos y su realización efectiva (a menudo llevada a cabo al mismo tiempo que se enuncian las operaciones efectuadas). Lo habitual en la escuela, sin embargo, es reducir los PC a varios PC de dos argumentos y una operación, donde el resultado de cada uno es usado como argumento del siguiente. Así, para efectuar $5 \cdot (4 + 8 - 3) + 1$, se realizarán los PC: $4 + 8$, $12 - 3$, $5 \cdot 9$, $45 + 1$, dando como resultado, 46.

El conjunto *S* de los PC puede asociarse, en cierta manera, con el conjunto de problemas de la aritmética escolar. De hecho, los *problemas aritméticos* pueden caracterizarse como los problemas resolubles mediante la realización de un PC (Ruiz-Munzón, 2010). Un trabajo en *S* suficientemente desarrollado, que incluya el cuestionamiento de las técnicas, el aumento de la complejidad de los problemas considerados, la necesidad de justificar las técnicas utilizadas y los resultados obtenidos, así como su generalización, conduce a una ampliación del sistema inicial mediante sucesivas modelizaciones que dan lugar a lo que llamamos las *etapas de algebrización* (Ruiz-Munzón, 2010; Ruiz-Munzón *et al.,* 2012; Cid, Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón, 2017) y que describimos a continuación.

La primera etapa del proceso de algebrización tiene lugar cuando es necesario considerar un PC como un todo, y no como un proceso descompuesto en pasos sucesivos. Para ello, es necesario poder representar el PC como un todo de una manera suficientemente material (escrita, gráfica o simbólica) para poder manejarlo. Esto no implica necesariamente el uso de letras para indicar los números o cantidades que intervienen en el PC (sus argumentos), pero requiere, sin embargo: poder escribir la secuencia de operaciones del PC sin ejecutarlas, poder visualizar o "manejar" su estructura, y tener en cuenta el orden y la jerarquía de dichas operaciones (las "reglas de paréntesis"). También

es necesario poder determinar si dos PC son equivalentes o no, incluso compararlos para saber si uno dará siempre un resultado mayor o menor que el otro. Esta nueva práctica genera la necesidad de nuevas técnicas para crear y simplificar un PC, así como nuevos entornos teóricos para interpretarlas y justificarlas. Citemos, en particular, la técnica del "análisis-síntesis" (Gascón, 1994-1995) que permite obtener el valor de un argumento desconocido de un PC a partir de su resultado. Tomemos, por ejemplo, el problema siguiente:

> María abre su puesto de flores en el mercado el lunes. Llegan varios clientes. El primero compra la mitad de las rosas que hay. El segundo compra 12 rosas y el tercero, 6. María hace un pedido al proveedor y recibe 24 rosas nuevas. Antes de cerrar, vende otras 15. Al ver el gran éxito de ventas, hace un pedido extra de 25 rosas. ¿Cuántas rosas tiene María antes de cerrar? ¿Tendrá las mismas rosas el martes por la mañana de las que tenía el lunes antes de abrir?

Este problema se puede traducir en el siguiente PC, donde utilizaremos la letra R para representar el número de rosas el lunes antes de abrir:

$$R - R/2 - 12 - 6 + 24 - 15 + 25.$$

Al simplificar el PC, se obtiene: $R/2 + 16$. Esta expresión simplificada (que podemos llamar "forma canónica" del PC) permite responder a la primera pregunta planteada: María tendrá la mitad de las rosas que tenía y 16 más.

Para responder a la segunda pregunta manteniéndonos en la primera etapa del proceso de algebrización, se necesitaría razonar en los siguientes términos: como $R = R/2 + R/2$, María tendrá las mismas rosas que el martes si $16 = R/2$, es decir, si tenía 32 rosas el lunes antes de abrir. Es posible que una representación gráfica del PC (por ejemplo, utilizando un cuadrado para representar R) facilite su resolución. Pero también es posible situarse en lo que llamaremos la *segunda etapa* del proceso de algebrización y utilizar técnicas ecuacionales para resolver la ecuación: $R/2 + 16 = R$. Pero, como veremos ahora, esta segunda etapa va más allá del simple cálculo ecuacional con una incógnita.

3.2. La segunda etapa del proceso de modelización algebraica

El paso a la segunda etapa de algebrización aparece cuando las técnicas de simplificación y las equivalencias entre los PC no son suficientes para resolver problemas, por ejemplo, cuando los datos y las incógnitas del problema aparecen como relaciones entre cantidades. En general, los problemas conducen a igualdades entre dos PC con, a lo sumo, los dos mismos argumentos no numéricos. En estos casos, las técnicas de manipulación de PC se vuelven más complejas e incluyen la manipulación de ecuaciones o

inecuaciones con dos incógnitas (o una incógnita y un parámetro). Entre el final de la primera etapa y el comienzo de la segunda, los PC deben poder simbolizarse y deben aparecer los diferentes significados del signo igual, como identidad y como igualdad.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

> Eva fue a comprar platos y vasos. Regresa con 20 platos y 90 vasos. Bernardo fue a la misma tienda y regresó con 40 platos y 60 vasos del mismo modelo que Eva y al mismo precio. Si gastaron el mismo dinero, ¿cuánto cuestan los vasos y los platos?

La estructura de este problema puede simbolizarse mediante la igualdad entre dos PC:

$$20p + 90v = 40p + 60v.$$

Para obtener como resultado final la relación $p = (3/2)v$, que indica que el precio de los platos debe ser 1.5 veces mayor que el precio de los vasos.

Hay que remarcar que este problema da lugar a una ecuación con un parámetro, aspecto poco frecuente en la secundaria española actual. Podemos concebir variantes de este problema, que se resuelven mediante ecuaciones con una incógnita (por ejemplo, si suponemos que el gasto total de cada uno es de 38 €). Además, la relación entre p y v permite formular nuevas preguntas de tipo teórico-tecnológico: por ejemplo, en qué caso el precio de los platos será igual al precio de los vasos o si podemos encontrar una combinación de platos y vasos para cualquier proporción entre los precios de los dos artículos.

En cuanto a los nuevos objetos matemáticos que surgen en esta segunda etapa, aparecen las técnicas algebraicas del cálculo ecuacional, lo que modifica profundamente el uso del signo = (o <) que pasa a significar una igualdad condicional entre dos PC (válido solo para un cierto conjunto de valores del argumento, que podría resultar vacío).

Actualmente, el álgebra escolar se sitúa casi por completo en esta segunda etapa del proceso de algebrización, con un paso muy rápido y parcial a través de la primera etapa, solo para introducir expresiones algebraicas y técnicas de simplificación y desarrollo (a menudo efectuadas en el vacío, sin ningún contexto de modelización). El trabajo escolar en la segunda etapa también es muy parcial porque está casi limitado a resolver problemas con ecuaciones con una incógnita. Además, generalmente no contiene trabajo con parámetros, lo que reduce en gran medida las posibilidades de modelizar las técnicas aritméticas y los problemas que se han mostrado anteriormente. En particular, el uso de la modelización algebraica como una herramienta teórica para describir, explicar y justificar lo que uno hace, sigue siendo muy parcial, si no inexistente.

3.3. La tercera etapa del proceso de modelización algebraica

El paso a la tercera etapa del proceso de algebrización se produce cuando desaparece la distinción entre las incógnitas y los parámetros, para dar lugar a una praxeología centrada en la producción, el procesamiento y la interpretación de fórmulas. Este paso no está muy presente en la enseñanza actual, aunque sí aparece de una forma débil en otras disciplinas (como la física, la química o la economía). Hoy en día, al menos en España, el uso de técnicas algebraicas para manipular fórmulas está poco presente más allá del estudio del caso general de ecuaciones lineales y cuadráticas. Pero juega un papel clave en la transición a modelos funcionales y al cálculo diferencial, una transición que tiene lugar de manera muy abrupta en la educación secundaria. Además, las matemáticas de secundaria no incluyen la manipulación sistemática de la estructura de los problemas tratados, lo que se refleja en el hecho de que las letras utilizadas en las expresiones algebraicas solo desempeñan el papel de incógnitas (en las ecuaciones y desigualdades) o variables (en las funciones). Ahora podemos mostrar en qué sentido la omisión de parámetros –es decir, el uso de letras para designar cantidades "conocidas", que se manipulan como si fueran "desconocidas"– puede limitar el desarrollo de herramientas de modelización algebraicas, y constituye una clara desnaturalización del arte algebraico (Chevallard y Bosch, 2012).

Un ejemplo de un problema en esta tercera etapa sería el siguiente:

> Un grupo de amigos va al restaurante. Al pagar la factura, deciden contribuir por igual, pero varios de ellos no aportaron dinero. ¿Cuánto tendrán que pagar de más los otros?

Respuesta: si N es el número de amigos, n es el número de amigos que no tienen dinero y p el precio de cada menú, el total de factura es pN y los amigos "que pagan" tendrán que pagar $pN/(N - n)$. Entonces tendrán que pagar $np/(N - n)$ más que p.

3.4. Las potencialidades del modelo epistemológico de referencia

El hecho de explicitar un modelo epistemológico de referencia para el álgebra elemental tiene diferentes objetivos. Se puede utilizar como herramienta descriptiva para analizar los tipos de praxeologías algebraicas que se enseñan y para estudiar sus ecologías (condiciones de existencia y limitaciones para su desarrollo). Por ejemplo, al considerar qué aspectos del álgebra elemental no se enseñan y cuáles son las posibles razones de su ausencia, así como la naturaleza y el origen de sus razones (Chevallard y Bosch, 2012). También hace posible crear y experimentar nuevas propuestas de enseñanza (ingenierías) para comprender mejor las posibilidades de cambiar la ecología del sistema escolar actual. Por ejemplo, el MER presentado ha servido como base para la creación

de diferentes procesos de estudio para introducir números negativos en la escuela, y para facilitar la transición de la modelización algebraica a la modelización algebraico-funcional (Ruiz-Munzón *et al.,* 2012; Cid y Bolea, 2010).

En general, un MER también sirve como herramienta heurística para hacer visibles ciertos fenómenos didácticos. En este caso, permite resaltar el carácter prealgebraico de la matemática escolar y la identificación del álgebra elemental como una aritmética generalizada (Gascón, 1994-1995; Bolea *et al.,* 2004; Ruiz-Munzón, 2010). Más concretamente, se han mostrado dos fenómenos distintos de evitación del álgebra: el primero, en el caso de la proporcionalidad que aparece como un objeto aislado tanto del trabajo algebraico como de modelización funcional (Bolea *et al.,* 2001b; García, 2005); el segundo, en el caso de la introducción de los números negativos, que a menudo se realiza en el contexto de la medición de magnitudes donde no son necesarios, en lugar de introducirse en el contexto algebraico que les dio origen históricamente (Cid y Bolea, 2010).

Además, el MER también es una herramienta productiva para relacionar diferentes perspectivas teóricas sobre el álgebra elemental, lo que permite explicar especialmente los supuestos de otros enfoques y su vínculo con los de la TAD (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2013).

4. AVANCES EN LA PROBLEMÁTICA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR DESDE LA TAD

En este apartado nos proponemos actualizar la problemática en torno al álgebra elemental desde el punto de vista de los trabajos llevados a cabo en el ámbito de la TAD. Partiendo de algunas cuestiones planteadas en BBG2001, utilizaremos los resultados obtenidos en trabajos posteriores para completar relativamente algunas de las respuestas que ya se formularon.

4.1. Relaciones entre lo algebraico y lo numérico

En lo que respecta a las relaciones entre lo algebraico y lo numérico en la enseñanza secundaria obligatoria, el primer resultado que citaremos es el de la tesis doctoral de Pilar Bolea, en el cual se caracteriza la interpretación habitual del álgebra escolar como una *aritmética generalizada* (Bolea, 2003, pp. 70-72). Esta consiste en la identificación del álgebra elemental con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), en contraposición a, pero también como desarrollo de, un supuesto "lenguaje aritmético".

En dicho trabajo se demuestra, a partir del análisis de documentos curriculares, de libros de texto y de una encuesta entre profesores, que en la enseñanza secundaria se asume acríticamente este modelo epistemológico como único e incuestionable, constituyéndose así en el *modelo epistemológico dominante* en esta institución. Esta interpre-

tación del álgebra es utilizada como MER, a menudo implícitamente, por gran parte de las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática.

En cuanto a la posibilidad de introducir el estudio del álgebra escolar fuera de ese marco aritmético habitual, y liberarse así de las dificultades y hasta de los obstáculos didácticos que el encierro en dicho marco provoca, en BBG2001 ya se mencionaba un trabajo (Chevallard, 1989), donde se invierte la relación escolar habitual entre lo aritmético y lo algebraico. De hecho, la introducción del álgebra elemental a partir de la modelización de los programas de cálculo (que se propone en Ruiz-Munzón, 2010) permite establecer nuevas relaciones entre el ámbito de lo algebraico y el de lo numérico que van en la misma línea. Además, la interpretación del álgebra elemental como un instrumento de modelización permite generalizar esa relación de lo algebraico con lo numérico y aplicarla a la relación de lo algebraico con cualquiera de los ámbitos de la matemática escolar y más allá, puesto que el álgebra elemental puede utilizarse para modelizar sistemas de todo tipo (aritméticos, geométricos, probabilísticos, combinatorios, comerciales, físicos, etcétera).

4.2. Unidad de análisis del proceso de estudio del álgebra elemental

Tal y como se reportaba en BBG2001, en trabajos anteriores ya se ponía de manifiesto que para entender lo que pasa en los sistemas didácticos hay que tener en cuenta el sistema de enseñanza en su conjunto, la noosfera y, a través de ella, la sociedad y su cultura.

Más recientemente hemos postulado, de manera explícita, que la *unidad mínima de análisis de los procesos didácticos* (que es, a la vez, el constructo teórico básico y el ámbito elemental en el que se analizarán todos los datos empíricos) abarca todas las etapas y todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica, lo que incluye la institución *sabia* productora del saber y la *noosfera*, además de la institución *escolar* y la *comunidad de estudio*, que es la protagonista del proceso didáctico (Bosch y Gascón, 2005). Dicha unidad de análisis debe contener una *praxeología didáctica* que permita construir, como mínimo, una praxeología matemática local y relativamente completa (Bosch *et al.,* 2004).

En el caso del álgebra elemental, la unidad mínima de análisis que propone el MER incluye los problemas aritméticos como praxeología inicial y una sucesión de praxeologías, cada una de las cuales es relativamente más completa que la anterior y tiene un mayor grado de algebrización. En Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón *et al.* (2012) se muestra que este MER del álgebra elemental se articula dentro de un MER más amplio que engloba la modelización funcional, y en Cid y Ruiz-Munzón (2011) y Cid *et al.* (2017) se propone una nueva versión del MER del álgebra elemental para dar cabida a la introducción temprana (al inicio de la Enseñanza Secundaria Obligatoria española) de los números negativos como objetos algebraicos.

En síntesis, este MER (ampliado) redefine el álgebra elemental como un instrumento

de la actividad matemática que transforma la estructura de los diferentes dominios de la matemática escolar, reorganiza la articulación entre ellos, y cambia el tipo de estudio que es posible llevar a cabo con los mismos. En consecuencia, debe considerarse como una técnica de ayuda al estudio, esto es, como una importante técnica didáctica.

4.3. Dimensión ecológica del problema del álgebra elemental

Para analizar las condiciones *ecológicas* que se requieren para que determinados objetos y actividades puedan existir en la escuela, Chevallard (2002) introdujo la noción de *escala de niveles de codeterminación didáctica,* que amplía y al mismo tiempo estructura el ámbito empírico que tomaremos en consideración. La organización de las praxeologías matemáticas y de los dispositivos y los gestos que se necesitan para su enseñanza (las praxeologías didácticas) requiere que estos cumplan una serie de condiciones que pueden ser específicas de la disciplina en cuestión (en nuestro caso las matemáticas) o bien genéricas, es decir, provenientes de la manera de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje en la escuela, los roles que se asignan a la escuela en la sociedad, etcétera. Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica, según muestra el esquema de la figura 1. Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles.

Humanidad
↓↑
Civilización
↓↑
Sociedad
↓↑
Escuela
↓↑
Pedagogía
↓↑
Sistema didáctico
↓↑
Disciplina ↔ Área ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

Figura 1. Niveles de codeterminación didáctica

Los trabajos sobre la enseñanza del álgebra elemental realizados en la TAD han permitido identificar algunas restricciones provenientes de todos los niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica, incluyendo los niveles superiores de la *Civilización* y la *Sociedad,* los intermedios de la *Escuela* y la *Pedagogía,* y los más específicos que abarcan desde la *Disciplina* hasta las *Cuestiones.*

4.3.1. Restricciones de los niveles superiores

En BBG2001 ya presentamos algunas de las restricciones generales que afectan la enseñanza del álgebra en la escuela y que provienen del *logocentrismo* de la cultura occidental, y la consecuente peyoración del álgebra escolar como trabajo intelectual de naturaleza primariamente escrita. Conviene resaltar que estas restricciones de los niveles superiores parecen afectar también muchas de las investigaciones didácticas sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra elemental. Tal como indicamos en Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2015), durante muchos años diversas investigaciones se han centrado en estudiar los "significados" que los alumnos atribuyen al simbolismo algebraico, o a las dificultades de los alumnos para "entender" –en el sentido de verbalizar– nociones como las de ecuación, igualdad, identidad, parámetro, etcétera. Esta relativa concentración de las investigaciones en la función semiótica del lenguaje algebraico, en detrimento de su función instrumental, constituye un síntoma de la vigencia del logocentrismo e impide que, también en el ámbito de la investigación didáctica, se interprete el álgebra elemental como un instrumento de modelización en el sentido del MER propuesto.

Actualmente, encontramos trabajos de investigación sobre *Early Algebra* (Kieran, Pang, Schifter y Ng, 2016; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011) que, aunque no de forma explícita, cuestionan las tesis derivadas del logocentrismo y refuerzan la importancia de la manipulación del grafismo como herramienta para promover el "pensamiento algebraico", que sitúan antes de la introducción del álgebra elemental. En particular, estos trabajos cuestionan la consideración del álgebra como un contenido "superior", que en el currículum tradicional anterior a la reforma de las matemáticas modernas simbolizaba la entrada en la enseñanza secundaria –que no cursaba la mayoría de estudiantes–, y se consideraba como un desarrollo "abstracto" de la aritmética y la geometría elemental de la enseñanza primaria (Chevallard y Bosch, 2012).

4.3.2. Restricciones de los niveles intermedios

En Ruiz-Munzón *et al.* (2015), hemos mostrado que la pedagogía dominante en las instituciones escolares es esencialmente *monumentalista* (Chevallard, 2007b) y tiende a convertir la matemática escolar en un conjunto atomizado de actividades aisladas, con elementos motivadores relativamente artificiales. En especial, dificulta el desarrollo de los aspectos más característicos de la disciplina matemática, por ejemplo el trabajo técnico sistemático necesario para la producción de nuevos conocimientos. Esta pedagogía tiende a eliminar los objetivos a largo plazo y, en consecuencia, dificulta la utilización del álgebra como instrumento de modelización.

Como consecuencia, también, de esta pedagogía dominante, encontramos una restricción más general que afecta a cualquier actividad de modelización, y que proviene de la necesidad de evaluar la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje

(Barquero, Bosch y Gascón, 2007). El foco de la evaluación se centra mayoritariamente en el resultado final obtenido; en cambio, evaluar un proceso de modelización requiere tomar como foco de evaluación tanto el resultado final como el camino para su construcción. Se hace, así, más costosa la evaluación individualizada de cada integrante de la comunidad de estudio.

4.3.3. Restricciones de los niveles específicos

Las restricciones en los niveles específicos de la escala de codeterminación didáctica dependen, en gran medida, de los modelos epistemológicos dominantes en la institución escolar sobre la matemática y sus diferentes áreas de contenido. Ya hemos expresado que en el caso del álgebra elemental el modelo dominante corresponde a la concepción del álgebra como aritmética generalizada, que origina una vinculación exclusiva y unidireccional del álgebra escolar con lo numérico, hasta el punto de considerarla como un mero epifenómeno de la aritmética. Como señalan Ruiz-Munzón *et al.* (2015), el aislamiento del álgebra del resto de las áreas de la matemática escolar dificulta su desarrollo como instrumento de modelización de cualquier tipo de sistema (matemático o extramatemático). Son especialmente visibles las restricciones escolares que entorpecen la algebrización de la geometría y de las relaciones funcionales en la enseñanza secundaria obligatoria. En el caso de la proporcionalidad, la interpretación escolar del álgebra favorece su consideración como una relación aritmética entre números (en lugar de una relación funcional entre variables), lo que tiende a aislar la proporcionalidad (y, en última instancia, al álgebra escolar) del resto de relaciones funcionales.

Dado que las técnicas específicas de la actividad de modelización (delimitación del sistema, elección de las variables relevantes, interpretación en términos del sistema del trabajo realizado en el modelo) son menos visibles, menos atomizables, menos algoritmizables y, en definitiva, más difíciles de evaluar que las técnicas propias de la aritmética generalizada (simplificación de expresiones algebraicas, factorización, resolución de ecuaciones), las restricciones transpositivas originadas por la necesidad de evaluar obstaculizan de manera importante el desarrollo escolar de la modelización algebraica.

4.4. Nuevas líneas de investigación

El MER presentado muestra cómo, a partir de la noción de *programas de cálculo,* es posible introducir el álgebra de una manera funcional, es decir, como una herramienta de modelización y desarrollo de praxeologías matemáticas ya establecidas. Hasta el momento, nuestro grupo de investigación ha diseñado y experimentado procesos de estudio con alumnos de entre 12 y 14 años de edad, en los que se ha desarrollado la primera etapa del proceso de algebrización, analizando las condiciones y restricciones

que aparecen al inicio de la enseñanza secundaria obligatoria cuando se lleva a cabo este tipo de actividad. Quedan abiertas diferentes líneas de investigación, que describimos brevemente a continuación:

- Se han realizado experimentaciones de procesos de estudio que presentan la introducción de los números negativos dentro de un contexto algebraico, avanzando en la articulación del modelo epistemológico que sustenta dichas propuestas con el MER para la introducción del álgebra (Cid *et al.,* 2017). Queda pendiente dar un paso más: el diseño y la experimentación de un proceso de estudio que integre la introducción del álgebra como la de los números enteros.
- Más allá del caso de los números enteros, queda pendiente el diseño y la experimentación a lo largo de toda la enseñanza secundaria obligatoria (alumnos de entre 12 y 16 años de edad) de un proceso didáctico que dé sentido al trabajo con técnicas ecuacionales no reducidas a ecuaciones con una incógnita, y que permita una interpretación funcional del trabajo con fórmulas. Esto comportará una ampliación del MER sobre el álgebra y, probablemente, la consideración de procesos de estudio ampliados al primer curso de la enseñanza postobligatoria (16-17 años de edad).
- En cuanto a las técnicas didácticas potencialmente útiles para el diseño y la gestión de las *organizaciones didácticas* (de ayuda al estudio) en torno al álgebra, es necesario seguir indagando sobre el papel que desempeñan las calculadoras simbólicas y las nuevas potencialidades que abren para el trabajo matemático experimental. En particular, para poner de manifiesto los diferentes significados del signo igual o, en el momento de institucionalización, para validar el trabajo algebraico realizado.
- Es necesario abordar diferentes aspectos del problema de *la formación del profesorado* (inicial y continua): ¿hasta qué punto es pertinente cuestionar el grado de algebrización y, en definitiva, la estructura de las diferentes praxeologías matemáticas escolares, así como las relaciones entre ellas?, ¿mediante qué tipo de dispositivos de formación se puede llevar a cabo dicho cuestionamiento?, ¿qué impacto tendrá sobre el desarrollo de la tarea docente de los profesores plantearse abiertamente las limitaciones del modelo epistemológico dominante? En Ruiz-Olarría (2015) se presentan algunas vías de avance en este sentido que merecen ser explotadas de forma más sistemática.

5. LOS PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA Y LA CULTURA ESCOLAR

El esquema que se utiliza en BBG2001 para estudiar la evolución de la problemática del álgebra elemental fue propuesto inicialmente en el año 1999 (Gascón, 1999b) y

para entonces ya era una simplificación, o mejor dicho una reconstrucción racional de la evolución de la didáctica. Esto no impide que podamos seguir diciendo que una teoría didáctica se sitúa en el programa epistemológico en la medida en que cuestiona los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones (por ejemplo, escolares), elabora explícitamente modelos epistemológicos alternativos de los diferentes ámbitos de las matemáticas, y los utiliza como sistema de referencia para formular y abordar los problemas didácticos. En este sentido, los diálogos entre enfoques o teorías didácticas que se están produciendo recientemente en la comunidad de investigación internacional constatan una necesidad creciente de explicitar el modelo epistemológico que se asume del ámbito de las matemáticas que está en juego y, en consecuencia, un acercamiento al programa epistemológico (Bosch *et al.,* 2017; Kidron, 2016).

En cuanto al posible impacto de los principios del programa epistemológico, y de los desarrollos de la TAD sobre las ideas dominantes en la cultura escolar, somos más escépticos. La concepción social de la educación, y en particular la forma de conceptualizar la educación matemática, dependen en cada período histórico de las normas y condiciones que rigen en la sociedad. Sobre dichas condiciones, que emergen de los diferentes niveles de codeterminación didáctica, la capacidad de incidencia de los resultados de la investigación didáctica es limitada.

En un nivel de codeterminación más específico (subdisciplinar), podemos preguntarnos cuál ha sido la incidencia de las investigaciones didácticas sobre el fenómeno de la aritmetización del álgebra elemental. En este punto debemos distinguir entre el modelo epistemológico del álgebra que se manifiesta en la institución de enseñanza secundaria, y el modelo que, de forma más o menos explícita, utilizan los investigadores en didáctica. El primero, como componente de la cultura escolar, es mucho más estático, mientras que el segundo es más flexible y más fácilmente sujeto a discusión y evolución. Así, si bien en la última parte del siglo XX la inmensa mayoría de las investigaciones sobre el álgebra elemental se situaban en el programa cognitivo (Bolea *et al.,* 2001a, pp. 26-37) y asumían implícitamente una forma de interpretar el álgebra elemental próxima al modelo dominante en la institución de referencia, actualmente existen diferentes enfoques (entre los que podemos citar el *Early Algebra*) que, a medida que han sentido la necesidad de explicitar el modelo epistemológico que utilizan, han experimentado un alejamiento progresivo de dicha interpretación.

Digamos, para concluir de forma relativamente optimista, que también existen indicios de una posible incidencia de la investigación didáctica sobre la organización del estudio escolar del álgebra elemental. La introducción oficial de los programas de cálculo en la enseñanza del álgebra elemental en el sistema educativo francés (Alves *et al.,* 2013; MEN, 2016) pone de manifiesto las posibilidades de evolución de los procesos didácticos cuando se realiza un trabajo colectivo de cooperación entre investigadores en didáctica, profesores, formadores, productores de material didáctico y diseñadores curriculares.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado con el apoyo del proyecto de investigación EDU2015-69865-C3-1-R (MINECO/FEDER) financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional.

REFERENCIAS

Alves, C., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C., Coppé, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 1-25. <halshs-00959553>

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 573-594). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education* (vol. II, pp. 135-145). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut fuer Mathematik didactik.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001a). ¿Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas? *Educación Matemática, 13*(3), 22-63.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001b). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133.

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Coords.), *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 39-52.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques*

1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Eds.). Grenoble, France: La Pensée Sauvage, Éditions.

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Première partie: l'évolution de la transposition didactique, *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Deuxième partie: Perspectives curriculaires: la notion de modélisation, *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, *23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2002). Séminaire PLC2, année universitaire 2001-2002. Recuperado de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2001-2002.pdf

Chevallard, Y. (2007a). Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007. Recuperado de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf

Chevallard, Y. (2007b). Passé et présent de la TAD. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746), Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier y A. Robert (Coords.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 19-39). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier, France: Université de Montpellier.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard,... M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra, Barcelona, España: Centre de Recerca Matemàtica.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. En G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J. P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage y T. Sierra (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la societé* (pp. 325-341). Toulouse, France: Université de Toulouse.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference for the PME* (vol. 2, pp. 377-384). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *New ICMI* Study Series, 7(3), 275-282.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática, 11*(1), 77-88.

Gascón, J. (1999b). "Didactique Fondamentale" *versus* "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos programas de Investigación Inconmensurables? En M. Bailleul (Ed.), *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (vol. II, pp. 152-170). Houlgate, France: ARDM.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 25 años*, 99-123.

Kidron, I. (2016). Epistemology and Networking Theories. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 149-163.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching* (ICME-13 Topical Surveys). New York, USA: Springer International Publishing.

Ministère de l'Éducation Nationale (MEN). (2016). Utiliser le calcul littéral. eduscol. education.fr/ressources-2016-Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2016. Recuperado de: http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Comparing Approaches through a Reference Epistemological Model: The Case of School Algebra. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2870-2979). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *REDIMAT, 4*(2), 52-77.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier y A. Robert (Coords.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* [Número especial] (pp. 81-101). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, España.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas de los niños a las actividades en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después

David Block Sevilla
Cinvestav-IPN, México

Resumen: El presente texto versa sobre la orientación didáctica constructivista que se dio en la reforma educativa de 1993 a los programas y materiales para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica en México. Sobre esta orientación se publicaron en los años siguientes varios artículos en *Educación Matemática*. Se exponen aquí reflexiones sobre las ideas centrales de dicho enfoque, visto como una obra en construcción; se cuestionan las condiciones institucionales que lo posibilitan y se analizan los procesos de apropiación por parte de los profesores, a la luz de estudios sobre la práctica docente.

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1993, en el marco de una reforma educativa se promovió oficialmente, en los programas y libros de texto del nivel básico, un enfoque para la enseñanza de las matemáticas con una orientación emergente pero ya internacionalmente valorada, que podría caracterizarse de manera breve como *constructivista* (el término es vago, lo precisaré más adelante). En ese año y en los siguientes de esa década, algunos colegas y yo publicamos en *Educación Matemática* varios artículos con el ánimo de apuntalar dicha reforma, la cual, estábamos convencidos, contribuiría a dar lugar en la escuela primaria a experiencias más significativas con las matemáticas y, por lo mismo, más gratas que las usuales.

En el texto "La matemática expulsada de la escuela" (Block y Dávila, 1993) destacamos el valor pedagógico de los procedimientos personales, informales, a veces erróneos, que los alumnos pueden poner en juego cuando enfrentan problemas en condiciones en las que no se les pide de entrada la aplicación de procedimientos enseñados (fórmulas, algoritmos).

En el artículo "La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros" (Block, Dávila y Martínez, 1995) argumentamos, con base en una experiencia realizada con profesores a finales de los años 80, la posibilidad de dar más autonomía a los alumnos en la resolución de problemas de aplicación y de valorar sus resoluciones no convencionales.

En "Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas"

(Block y Álvarez, 1999) intentamos contextualizar el enfoque,[1] poniéndolo en la perspectiva de los cambios curriculares de los últimos 50 años, y de la evolución subyacente de las teorías sobre la enseñanza de las matemáticas. Destacamos en particular el papel que jugó la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1972; 1998) en la definición de las características de dicho enfoque, principalmente en lo que se refiere al propósito de desarrollar secuencias de situaciones didácticas que *funcionalizaran* los conocimientos matemáticos específicos, es decir, que los pusieran en juego con el sentido de herramientas para resolver determinadas situaciones problemáticas.

A lo largo de los 25 años que han transcurrido, las dificultades para poner en práctica algunos principios de dicho enfoque para la enseñanza de las matemáticas, la aparente resistencia de los docentes a los intentos transformadores, aunados a los resultados de las evaluaciones a gran escala –contundentes porque suelen ser claramente negativos, parciales porque solo evalúan algunos aspectos, y tremendamente opacos porque son multicausales y no sabemos a ciencia cierta qué los origina–, han dado paso a cierto desencanto, cuando no a un cuestionamiento de tajo. Tales dificultades han sido caldo de cultivo de posturas nostálgicas que idealizan las prácticas de antes y claman por un regreso al pasado,[2] o también por un cambio de musa: ahora la educación por competencias,[3] que prometió favorecer competencias generales más allá de los contenidos disciplinarios –no quedó nunca claro cómo se podía lograr eso (Gascón y Bosch, 2007)–, o la introducción de recursos tecnológicos, los cuales han cumplido bien la función, temporal y costosa, de dar una apariencia de renovación y modernidad a las acciones oficiales en educación (lo digo sin menoscabo del potencial de dichos recursos a mediano plazo). Así, los cambios llevados a cabo en el currículo durante estos años evocan esa preocupación por recuperar la legitimidad perdida por el desgaste del tiempo, por el envejecimiento, de la que habla Chevallard (2000, p. 30).[4]

Esta "resistencia" que ofrece la realidad también ha puesto al descubierto, seguramente no por primera vez, la ingenuidad característica de nuestro oficio de pedagogos, obligándonos a reconocer que no todo en las prácticas actuales es cuestionable, ni mucho menos que cualquier cambio es posible. Si los maestros hubieran aceptado hacer todo lo que se les ha sugerido, y nada más que eso, probablemente las cosas no habrían marchado mejor. Porque –ahora lo tenemos más claro– el maestro no puede

[1] Me refiero a la orientación didáctica de programas y materiales para la enseñanza de las matemáticas de dicha reforma. En adelante, usaré esta expresión para abreviar.

[2] Se escuchan, con alguna frecuencia, afirmaciones como: "Antes se enseñaba mejor, si no, ¿cómo es que nosotros aprendimos?" de algunos de quienes, sin considerar que fueron privilegiados, lograron pasar los filtros escolares y escogieron su carrera sin el criterio de evitar a cualquier costa las matemáticas. "Back to basics" fue el lema de este movimiento en otros países, "retro-innovadores", los llamó Guy Brousseau (2007) en su participación en el encuentro de la CIAEM, en julio de 2007, en la ciudad de Querétaro, México.

[3] Me refiero a la reforma curricular de 2009 (SEP, 2009) que, al igual que la evaluación, también obedece a directrices de origen internacional.

[4] Él se refiere en ese texto a cambios hechos en el saber mismo, como los ocurridos en la reforma de las matemáticas modernas.

hacerse cargo de la enseñanza de un grupo de estudiantes siguiendo un instructivo. Además, porque hay numerosas cuestiones que desde la investigación se tienen que dejar de lado por la necesidad inevitable de simplificar la problemática que se estudia.

Ante la alternativa del "borrón y cuenta nueva" o de la búsqueda precipitada de innovaciones no bien fundamentadas, me sumo a quienes reconocen que: 1) Los fundamentos de las propuestas de 1993 son suficientemente sólidos para seguir marcando la orientación de un camino que vale la pena mejorar y recorrer; 2) Las propuestas del 93 fueron un primer paso dado en la dirección correcta, pero se inscriben en un movimiento de evolución curricular inevitablemente accidentado y lento; 3) Las experiencias que se han logrado documentar y estudiar, así como los avances de la investigación en su conjunto en los años que han trascurrido desde aquella reforma, aportan luces para hacer ajustes al rumbo y seguir avanzando sin saltos mortales, ni desvíos generados por cantos de sirenas.

En este escrito me propongo precisar y argumentar esta postura, trayendo a la mesa de discusión algunos de los resultados de estudios vinculados con el análisis de las prácticas docentes en los que he participado. Abordaré tres puntos: 1) El "enfoque" como obra en construcción; 2) El enfoque emergente en las interpretaciones de los profesores, y 3) La relación dialéctica de los profesores con las propuestas curriculares.

2. EL "ENFOQUE" COMO OBRA EN CONSTRUCCIÓN

Caracterizar el enfoque para la enseñanza de las matemáticas de los programas de 1993 requiere mirar varios planos: el discurso general en los programas de estudio (esa introducción frecuentemente cargada de buenas, pero vagas intenciones, y pese a ello, reveladora de un rumbo); la forma en que se desglosan, ordenan y articulan los contenidos a lo largo del eje temporal, y el tipo de experiencias didácticas que se sugieren para el estudio de cada contenido, incluyendo la forma en que se propone evaluar.

2.1. Las ideas rectoras

La orientación general del enfoque de los programas de 1993 se inscribe en una tendencia mundial que enfatiza la actividad de resolución de problemas como fuente del aprendizaje y como origen de una diversidad de significados de las nociones a enseñar. Otros aspectos relevantes que lo constituyeron fueron: la importancia de que los alumnos aborden los problemas a partir de sus conocimientos previos; el papel constructivo que cierto tipo de errores puede tener en el aprendizaje, y la importancia de la argumentación. La Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998) constituyó una fuente de inspiración, y a la vez, una base teórica que sirvió de referente para estos planteamientos, si bien dicha filiación casi no se hizo explícita en los documentos

oficiales. Estas son las características por las que describimos anteriormente este acercamiento como "constructivista".[5]

En los materiales curriculares que se distribuyeron al maestro, dichas ideas rectoras aparecieron, a veces, difuminadas entre ideas procedentes de otros enfoques, y no se fueron precisando sino poco a poco. Por ejemplo, en el siguiente extracto de un libro para el maestro puede verse cómo el asunto de la resolución de problemas aparece en cuarto lugar después de otras consideraciones sobre el aprendizaje, provenientes de otros acercamientos, incluso a veces opuestos (en el apartado 2 volvemos sobre esto).

> Es necesario, entonces, que las actividades que se propongan en la escuela enlacen los contenidos de los programas de estudio con los aprendizajes que los niños han construido fuera de la escuela y con la forma en la que han arribado a ellos, apoyándose en la percepción visual, en la manipulación de objetos, en la observación de las formas de su entorno y en la resolución de problemas. (SEP, 1994, p. 9)

Algunos aspectos se comunicaron de manera más clara, por ejemplo, el papel de la dificultad vivida por el estudiante para resolver una problemática para la cual aún no dispone de determinado conocimiento, en la conformación del sentido que dicho conocimiento tendrá para él. "Los conocimientos escolares tienen sentido para los alumnos cuando aportan algo a los procedimientos que ellos han desarrollado con anterioridad, cuando cubren necesidades que ya tienen identificadas o cuando facilitan una tarea en la que ya han experimentado dificultad" (SEP, 1994, p. 9).

A partir de 1995 se ofreció a los docentes del país un curso largo, de cerca de 300 horas, centrado en cada uno de los contenidos matemáticos del currículo de primaria, desde la perspectiva didáctica que se intentaba impulsar.[6] Se buscaba que los docentes conocieran el tratamiento didáctico propuesto para los conocimientos matemáticos, al mismo tiempo que afirmaban y ampliaban sus conocimientos de matemáticas. La caracterización del enfoque en dicho taller fue, naturalmente, más amplia.

En las posteriores actualizaciones a los programas, los planteamientos no fueron, en cambio, más precisos. La resolución de problemas siguió apareciendo como una actividad central, pero no así la idea de aprender matemáticas al resolver problemas, como se puede observar en los siguientes extractos de los planes de 2009 y de 2011:

[5] El constructivismo al que hacemos referencia debe distinguirse de los llamados "constructivismos radicales", que minimizan el papel del docente como portador de conocimientos (Phillips, 1995). En la TSD, el papel del docente va mucho más allá de plantear las situaciones problemáticas, como lo atestiguan, por ejemplo, los conceptos de institucionalización y de devolución (Brousseau, 1998).

[6] Me refiero al curso "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros" (SEP, 1995). Dicho curso, diseñado para permitir el estudio autodidacta, incluyó cuatro materiales: dos libros con el desarrollo de un taller en los que se incluía el estudio de cada tema de matemáticas propuesto en los programas, una antología de lecturas y un material recortable. El curso tuvo carácter de optativo, mediante el cual los profesores podían obtener un puntaje con efectos en su promoción dentro del programa de Carrera Magisterial.

> [...] la metodología didáctica que se sugiere [...] consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. (SEP, 2009, p. 80)

> [...] el énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones [...]. (SEP, 2011, p. 48)

Finalmente, en los programas más recientes, vigentes a partir de 2017, después de caracterizar a las matemáticas como un conjunto de conceptos, métodos y técnicas, se afirma: "El enfoque [...] se basa en el planteamiento y en la resolución de problemas [...]" (SEP, 2016, p. 104), pero no se abunda más acerca de en qué consiste esta toma de postura.[7]

2.2. La organización de los contenidos

Más allá de las consideraciones generales sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje, un cambio sustancial, y probablemente menos publicitado, refiere a la caracterización misma de los conocimientos que son objeto de enseñanza. Me detendré un momento, para ejemplificar esto, en el caso de las operaciones aritméticas:

> [...] en la propuesta para la enseñanza de las operaciones aritméticas básicas, además de sostenerse que la enseñanza no debe partir de los algoritmos usuales, sino del desarrollo de procedimientos informales a partir de la resolución de problemas, se plantea que, contra una idea que ha prevalecido durante mucho tiempo, las técnicas para resolver una operación no constituyen el único aspecto importante del tema. Ahora se pone el acento en el hecho de que una operación aritmética puede asumir significados distintos dependiendo de las relaciones entre los datos; se consideran, por lo tanto, problemas de suma y resta con diversas estructuras, así como problemas de multiplicar y dividir de varios tipos. Se insiste en que comprender una operación implica, además de conocer técnicas para resolver, poder reconocer su pertinencia en una gama amplia de problemas. (Block, Moscoso, Ramírez y Solares, 2007, p. 736)

[7] En esta última reforma se empieza a hablar también de "modelización matemática", haciendo referencia al uso de nociones matemáticas para dar cuenta de problemáticas de la realidad y del desarrollo de soluciones dentro del modelo matemático: "las matemáticas proporcionan un lenguaje preciso y conciso para modelar, analizar y comunicar observaciones que se realizan en distintos campos" (SEP, 2017, p. 299). Esta noción no se contrapone en lo absoluto a la idea de "aprender mediante la resolución de problemas", al contrario, la apuntala, aunque esto no se explicita con claridad.

La misma diversidad de técnicas mencionada en el texto es una característica de las matemáticas a enseñar que cobró importancia en el currículo, y que se opone a la idea de una sola técnica, la convencional. El acceso universal a la calculadora fue, y sigue siendo, un factor decisivo en este cambio, al restarle importancia a la destreza para calcular a mano, de manera rápida y precisa, con números grandes y complicados, lo que a su vez ha permitido valorar otros aspectos de la operatoria.

Por lo anterior, puede apreciarse que la propuesta de 1993 para la enseñanza de las matemáticas pretendió influir en el *cómo se enseña*, asumiendo cambios también en el *qué se enseña*, no porque se introdujeran nuevos objetos de conocimiento, a final de cuentas los contenidos permanecieron prácticamente sin cambios, sino porque los aspectos a estudiar de los mismos objetos se priorizaron de distinta manera, al atender a su carácter de herramientas en la resolución de situaciones problemáticas, esto es, al enfatizar su funcionalidad. Esta característica dio al enfoque mencionado una dimensión epistémica.

2.3. Las situaciones didácticas

La oferta de situaciones didácticas adecuadas es probablemente una condición, si bien no suficiente, sí significativa, para hacer posible, en algún grado, la puesta en práctica del enfoque en las aulas. En este punto, la reforma del 93 fue pródiga: la elaboración de los libros de texto oficiales se sometió a concurso, por segunda ocasión en la historia de este tipo de textos en México. Se produjo una colección de seis libros de texto de matemáticas acompañados, cada uno, de un libro para el maestro, y de un fichero con actividades didácticas.[8] Un "avance programático" articulaba los materiales anteriores. Estos recursos fueron perfeccionándose año tras año durante los 15 años siguientes.[9]

En ese período (1993-2009), se realizaron en México varios estudios críticos sobre los libros de texto (Alatorre, de Bengoechea, López, Mendiola y Saíz, 1999; Santos Bernard, Macías y Cruz, 2006). Estos estudios, sumados a los que se mencionarán en el apartado siguiente sobre los usos de los libros en la práctica, pudieron haber constituido un insumo valioso para la mejora de los materiales. Pero esto no ocurrió. En su lugar, en la reforma del 2009 se hizo un "borrón y cuenta nueva", se sacaron de circulación los materiales y se propusieron en su lugar seis libros de texto realizados con celeridad.[10] En el año 2014, en respuesta a los cuestionamientos a dichos libros por los errores que contenían, y

[8] Buena parte de las actividades de estos ficheros se derivó de investigaciones en las que estas fueron diseñadas y experimentadas, bajo un enfoque didáctico similar al de la propuesta. Un ejemplo clásico es de la situación "Platos y Cucharas" (SEP, 1997). En Block y Álvarez (1999) puede hallarse una descripción de las características de este material.

[9] Se rehicieron los libros de quinto y sexto grados, se amplió el libro de primer grado, además de otras modificaciones menores.

[10] Faltó realizar un análisis sistemático de estos materiales y hacer pública una evaluación. Hay únicamente análisis de lecciones aisladas (i.e., Mendoza, 2017).

nuevamente con poco tiempo disponible, se adaptó como libro de texto para cada grado un material que la SEP había elaborado previamente con otros fines, llamado "Desafíos". En el sexenio que ahora expira (2012-2018), las condiciones para la actualización curricular tampoco constituyen un hecho ejemplar: tres funcionarios presidieron la Secretaría de Educación Pública, cada uno echó a andar su propuesta de reforma curricular.

En otros países, las reformas curriculares se elaboran a lo largo de varios años o de manera continua, y no en pocos meses. Es urgente considerar alguna forma de dar al organismo encargado de mejorar el currículo y de desarrollar los materiales que lo apuntalan, buenas condiciones para hacer su trabajo, por ejemplo, con autonomía de los funcionarios del gobierno en turno.

3. EL ENFOQUE EMERGENTE EN LAS INTERPRETACIONES DE LOS PROFESORES

El enfoque supuso cambios importantes en las prácticas usuales de la enseñanza de las matemáticas. En el siguiente párrafo se exponen algunas de las principales dificultades que identificamos:

> El principio didáctico según el cual es posible que los alumnos desarrollen determinados conocimientos al resolver problemas de matemáticas, se opone a una práctica muy antigua y arraigada en la que los problemas se plantean únicamente para aplicar conocimientos previamente enseñados [...] El hecho de partir de la resolución de problemas, supone que los alumnos pueden tener conocimientos previos para abordar una situación nueva, conocimientos que no les han sido enseñados, lo cual podría entrar en contradicción con la tendencia a considerar como disponibles únicamente los conocimientos que han sido enseñados a los alumnos. Supone también una valoración positiva de los conocimientos precarios, incompletos, aún no bien formulados e incluso parcialmente falsos que los alumnos logran poner en juego en un proceso constructivo, lo cual puede entrar en contradicción con la tendencia a reconocer como válidos únicamente los conocimientos que se expresan de manera explícita, con el lenguaje convencional, es decir, los conocimientos en su forma culturalmente institucionalizada. (Block *et al.,* 2007, p. 735)

Era previsible que, frente a cambios que afectan la concepción misma de lo que se considera relevante aprender de matemáticas y de cómo aprenderlo, los procesos de apropiación por parte de los profesores tomaran tiempo y fueran desiguales, como lo atestiguan varios estudios realizados durante las dos décadas pasadas (Ávila, 2001; Ávila *et al.,* 2004; Block *et al.,* 2007; Carvajal, 2004).

Algunos de los estudios mencionados (Ávila, 2001; Block *et al.,* 2007) coinciden en señalar que los principios del enfoque didáctico tendieron a asimilarse a un conjunto

de ideas relativamente imprecisas, de larga data, anteriores en todo caso al programa y al enfoque mismo, si bien hubo también excepciones.

En lo que sigue, con base en tres estudios en los que he participado, dos de ellos recientes, sobre prácticas de enseñanza de las matemáticas, trataré de mostrar algunos aspectos de este proceso de interpretación y de apropiación del enfoque. El primer estudio fue realizado en el año 2004,[11] poco más de una década después de la vigencia de los programas del 93; constó de entrevistas a 20 docentes y observación de clases de cinco de ellos (Block *et al.,* 2007). Estos docentes habían acreditado satisfactoriamente el examen realizado por el Programa Nacional de Actualización Permanente de Maestros de Educación Básica en Servicio (PRONAP), sobre el taller de actualización ya mencionado. El segundo estudio versó sobre la enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado. El trabajo de campo se realizó entre los años 2011 y 2015; en éste observamos y analizamos clases de docentes reconocidos por la comunidad educativa local como competentes,[12] en escuelas ubicadas en Hidalgo y Veracruz. Finalmente, un tercer estudio sobre la evaluación de la práctica docente realizado durante el año 2017 nos permitió asomarnos nuevamente a clases comunes[13] de 15 docentes de educación primaria y cinco de secundaria, del estado de Hidalgo y de la Ciudad de México.

3.1. La resolución de problemas

En el estudio citado del año 2017, encontramos una presencia importante del uso de los problemas en las clases de matemáticas; en prácticamente todas se plantearon problemas, a veces tres o cuatro en una misma clase. Se observó que varias escuelas incluyeron la resolución de problemas matemáticos como parte de la "Ruta de Mejora", programa oficial dirigido a perfeccionar el aprendizaje de las matemáticas. Esto sin duda es positivo, pero debe señalarse que en esta práctica los problemas, y lo que se espera de los alumnos al plantearlos, difieren de manera importante de la noción de resolución de problemas impulsada desde 1993. La diferencia más importante radica en que los problemas se proponen después de la enseñanza de alguna noción o procedimiento, con el propósito de que dicha noción se aplique. No se trata, entonces, de problemas planteados para que los alumnos se enfrenten a una necesidad, y eventualmente desarrollen un nuevo conocimiento para resolverla, como se sugiere en la propuesta de

[11] El proyecto denominado Papel del taller "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", en los procesos de apropiación de la propuesta curricular de 1993, se llevó a cabo entre 2003 y 2004 (Block *et al.,* 2004). En 2007 se publicó un artículo que da cuenta de algunos de los resultados (Block *et al.,* 2007). En lo que sigue, haré referencia a este último texto.

[12] Proyecto "La enseñanza de las matemáticas en la escuela multigrado", realizado en el DIE Cinvestav por Block, Ramírez, Reséndiz y Muñoz, con financiamiento de CONACYT (clave: 0175567).

[13] Proyecto "Evaluación de Medio camino: estudio de las prácticas de docentes de primaria y secundaria". Convenio INEE-DIE, realizado del 17 de octubre de 2016 al 31 de julio de 2017 (Weiss, Block, Civera y Dávalos, 2017).

1993. Se trata, además, de problemas aislados y no de secuencias de problemas articulados, o problemas que se plantean varias veces para dar oportunidad al desarrollo de un conocimiento nuevo, desde los primeros intentos azarosos de los alumnos.

> La maestra enseñó los procedimientos convencionales para convertir un número decimal a fraccionario y viceversa. Al terminar dejó problemas de tarea, como el que se muestra en la figura 1:

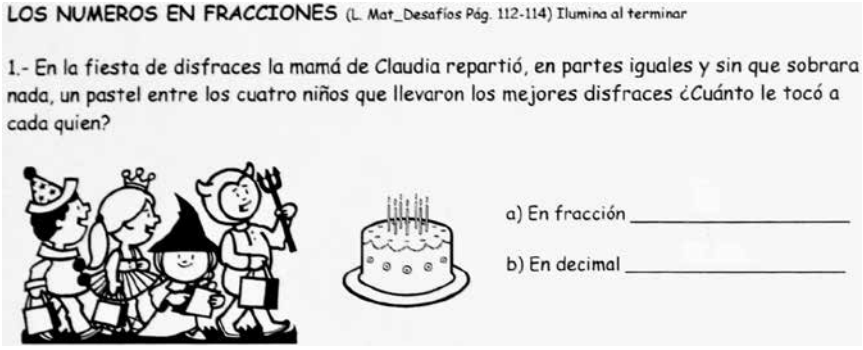


Figura 1. Maestra K / Proyecto Evaluación, 2017

Distinguir las situaciones problemáticas que generan nuevos conocimientos de los típicos problemas de aplicación fue probablemente la razón por la que, en algunos documentos oficiales y académicos, se hablaba de situaciones, o de situaciones problemáticas.[14] Claramente, esta precisión no fue suficiente.

Otra diferencia entre las prácticas de resolución de problemas que hemos observado y lo que se plantea en el enfoque, muy ligada a la anterior, radica en lo que se espera del alumno. En las visitas a las escuelas, encontramos con mucha frecuencia que los problemas se resuelven de manera grupal en el salón, dirigidos por el maestro, quien va tomando más o menos abiertamente las decisiones importantes, ante las cuales los alumnos dan o no su aprobación y hacen las operaciones, dejando ver que ellos tienen una muy baja posición topogenética en la actividad matemática (Sensevy, 2011).[15] Se observa poco espacio para que se manifiesten errores, evolucionen procedimientos, y se desarrolle cierta autonomía.

[14] Ya comenté que actualmente se introduce la noción de "modelización", la cual, sin significar lo mismo que la de "aprender a partir de la resolución de problemas", contribuye a precisar un aspecto central: se trata de mirar, desde las matemáticas, fragmentos de la realidad que pueden ser problemáticos, cuando se considera que estos pueden aportar información valiosa para la resolución de algún aspecto de dicha problemática.

[15] Con el término "topogénesis", Sensevy se refiere al lugar que ocupan los alumnos y el docente en la gestión del conocimiento en un momento dado. Da cuenta del reparto de responsabilidades de cada actor, qué le toca a cada uno.

Maestra: (Dicta el problema) Gaspar vive en Puerto Progreso, Yucatán y gana 842 pesos con 30 centavos diarios, en este mes hay 30 días, coma, preguntamos, pregunta, ¿cuánto ganó en este mes?
Alumno: Ya maestra
Maestra: ¿Qué vamos a hacer?
Alumno: Una suma, suma, suma
Alumno: Multiplicación
Maestra: ¿Qué multiplico?
Alumnos: Ochocientos cuarenta y dos con 30 centavos, con treinta
Maestra: (Afirma con un movimiento de cabeza) Empezamos a trabajar (da tiempo para que los niños trabajen en forma individual).
(Maestra J / Proyecto Evaluación, 2017)

Finalmente, es importante decir también que, en los tres estudios mencionados, pudimos observar clases en las que la resolución de problemas constituyó realmente un medio para aproximarse a nociones nuevas.

> El contenido de la clase fue "la jerarquización de las operaciones", con alumnos de segundo grado de secundaria. El profesor inició con una actividad previa, el planteamiento del problema: solicitó a los alumnos que calcularan, a mano, cinco operaciones como las siguientes: $20 + 5 \times 38$; $230 - 4 \times 52 + 14$; una vez que la mayoría de los alumnos obtuvo los resultados, les pidió que los revisaran de manera grupal; cuando los resultados estuvieron consensuados, les solicitó que los volvieran a verificar, pero ahora usando la calculadora. En ese momento surgió el detonador del problema: ante la sorpresa de los alumnos, los resultados obtenidos a través del uso de la calculadora no coincidieron con los realizados a mano. El maestro planteó entonces las preguntas que conformarían el problema para los alumnos: ¿Qué está pasando?, ¿qué hacer para resolverlo?, lo cual llevó más o menos pronto a la necesidad de jerarquizar las operaciones. (Profesor T / Proyecto Evaluación, 2017)

Hay que insistir, sin embargo, en que las secuencias de problemas para la construcción de conocimientos no son sencillas de diseñar y en los materiales disponibles para la enseñanza no hay, me parece, una oferta suficiente para trabajar de esa manera con todos los temas que lo ameritarían, en todos los niveles. Ya comentamos el avance vacilante en la calidad de los materiales curriculares.

3.2. La diversidad de procedimientos

En el estudio reciente, del año 2017, para nuestra sorpresa encontramos en varias de las clases visitadas un nivel de realización considerable de esta característica del enfoque.

La diversidad de procedimientos es aceptada (cuando aparecen en clase procedimientos alternativos) y algunas veces incluso es fomentada (el docente solicita más procedimientos, los destaca, los valora).

> La actividad implicaba la conversión de fracciones a decimales y viceversa. Entre las cantidades estaba la expresión 7/10 + 5/10 [...]
> Alumno: Esa es la que se me complicó
> Maestra: Octavio ¿qué hiciste ahí? [...]
> Octavio: Sí son múltiplos los denominadores, entonces lo dividí, 100 entre 10, son 10, 10 por 7, 70, ahora 100 entre 100, uno, uno por 5, 5 y me dieron 75/100; luego lo fui simplificando por cinco y hasta que me dio 3/4.
> Maestra: (repite el procedimiento de Octavio mientras lo escribe en el pizarrón) [...] ¿Otra forma?
> Akemi: Yo primero simplifiqué la de 5/100 [...] Entonces me salió 1/20... Pues ya hice la suma como yo lo sé... El 10 lo hago más grande para que llegue a 20, entonces lo multiplique el siete por dos...14/20 más 1/20 y ya luego lo sume 15/20
> Maestra: (Mientras la niña explica, ella escribe el procedimiento en el pizarrón. Siguiendo esta dinámica, los niños exponen dos procedimientos más para sumar fracciones:
> Alumno: 7/10 + 5/100 = 7 × 100 + 5 × 10/1000 = 750/1000 = 3/4
> Astrid: 7/10 = 0.7 5/100 = 0.05 0.7 + 0.05 = 0.75)
> (Profesora K / Proyecto INEE, 2017)

Cabe destacar que la gestión de la clase con la diversidad de procedimientos requiere un conocimiento más amplio del contenido por parte del maestro.

3.3. La argumentación, el papel del error

En el estudio del año 2004, observamos en algunos docentes cierta confusión al considerar que de lo que se trataba era de valorar las aportaciones de los alumnos y, por lo tanto, no se debían señalar los errores (Block *et al.,* 2007). Esta confusión no la vimos más en los estudios posteriores. En el estudio de 2017 pudimos constatar la preeminencia de una actitud no punitiva, más comprensiva, hacia los errores cometidos, sin que por ello dejaran de señalarlos de manera más o menos abierta. Con menos frecuencia observamos que el docente buscara otras fuentes, distintas a su propio juicio, para la validación de los resultados y procedimientos en clase, o que se aprovecharan los errores para dar lugar a argumentaciones y debates.

3.4. La ejercitación de algoritmos, la memorización

Uno de los aspectos del enfoque del año 1993 para la enseñanza de las matemáticas que dio lugar a malentendidos fue el del papel de la ejercitación de técnicas y la memorización de ciertos procedimientos y resultados. Se identificaron, en el estudio de 2004, algunas interpretaciones en las que dichas prácticas eran desvaloradas, incluso consideradas negativas. Al parecer, eso fue también provocado por el cuestionamiento a lo que se consideró una excesiva centralidad de la enseñanza en ese tipo de actividad. No obstante, en el mismo estudio del año 2004, y más aún en los posteriores, pudo comprobarse que el abandono de la ejercitación de técnicas y de la memorización no fue en lo absoluto un efecto generalizado. Más allá del enfoque, los profesores parecen conceder importancia a este aspecto y no lo abandonan, lo cual consideramos un acierto, excepto en los casos en los que nuevamente ese tipo de trabajo se vuelve el dominante o único.

> [...] será por la experiencia, pero yo sé que hay una temporada en donde me dedico con ellos a todo lo que es la parte algorítmica, como son de sexto, obviamente yo considero que no deben estar con dificultad en esa parte, porque normalmente los compañeros de secundaria es en lo que más se fijan [...]. (Maestra M / Proyecto Pronap, 2004). (Block *et al.,* 2007)

3.5. El material concreto, los juegos

Ambos recursos han entrado al salón de clases con pie firme, según pudimos constatarlo en el estudio del año 2017. También se trata de recursos integrados en las prácticas de la enseñanza de las matemáticas desde mucho tiempo antes de la reforma del 93, pero creemos que su uso se ha incrementado. Es posible observar algo parecido a lo que vimos en el caso de los problemas: su función ha tendido a asimilarse a lo que se sabía de ellos antes, desdibujándose los elementos innovadores, característicos de esos recursos en el enfoque de 1993, sobre todo, el propósito de crear para el alumno un *medio problemático,* un medio (un problema o conjunto de problemas) que presente un reto a vencer tal que, para lograrlo, sea necesario poner en juego un conocimiento matemático.

El material concreto casi no se usa para verificar una anticipación hecha desde las matemáticas, sino para resolver directamente con él, con lo cual, además de dejar de ser un medio de verificación, en cierto momento parece convertirse en un obstáculo para la identificación de relaciones matemáticas.

> La clase dio inicio con la elaboración de cubos, con papiroflexia, lo cual tomó cerca de 50 minutos. A continuación, se presentó una diapositiva con los aprendizajes esperados y la consigna, "Elabora un cubo con hojas de colores y acomódalos para

armar diferentes arreglos". En un equipo hicieron una especie de escalera (figura 2). Después la maestra presentó, mediante una diapositiva, la noción de "unidad de volumen" y cómo calcular el volumen de un prisma [...] En otra diapositiva, la maestra presentó unos prismas para que identificaran sus "características", esto es, el largo, ancho y alto. Finalmente solicitó que señalaran las características de las figuras que ellos armaron; fue una tarea difícil –varias construcciones, como la escalera, no eran prismas–, en la que hubo distintas respuestas relacionadas con el tamaño y los colores [...]. (Profesora L / Proyecto INEE, 2017)

Figura 2. Cubos elaborados en clase

Otra dificultad detectada en las clases observadas fue el tiempo excesivo que tomaba preparar el material, a veces con acabados innecesarios, frecuentemente superior al que tomaba la actividad matemática misma, y con el agravante de que, en ocasiones, se usaba una sola vez.

Con respecto a los juegos, además de distintas versiones de la clásica y fecunda situación de "la tiendita", observamos cierta diversidad. Algunas veces, la actividad matemática implicada era débil o nula. En otros casos se trató de ejercicios de cálculo, llevados a cabo en una dinámica de competencia entre equipos, la cual daba el carácter lúdico, por ejemplo:

> Se distribuyeron algunas tarjetas con una fracción anotada y otras con un decimal. Los alumnos debían "buscar a su pareja", que era el portador de un número equivalente al propio. Una vez encontrado el par, debían pegar los números en el pizarrón y después, en la verificación de resultados, explicar cómo supieron quién era su pareja. El juego dio lugar a cierta diversidad de procedimientos y a dudas que fueron expresadas y discutidas públicamente. (Profesora K / Proyecto INEE, 2017)

Casi no identificamos juegos que dieran lugar al desarrollo de estrategias que implican conocimientos matemáticos, más allá del armado de rompecabezas.[16]

Así, parece dibujarse un panorama en el que, a 25 años de que se empezó a promover un enfoque de corte constructivista, algunos de sus principios se abren paso tímidamente, pese a no contar con los soportes institucionales más adecuados. Las lagunas, los puntos débiles emergen también con claridad.

4. LA RELACIÓN *DIALÉCTICA* DE LOS PROFESORES CON LAS PROPUESTAS CURRICULARES

La comprensión del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas guarda una relación, que podría caracterizarse como dialéctica, con el uso de los materiales oficiales para la enseñanza; se influyen mutuamente, si bien la primera, la comprensión, es determinante. En los últimos 25 años se ha avanzado en la dilucidación de esta relación, y más ampliamente, en la del docente con las propuestas y con la norma curricular. Sabemos que las propuestas didácticas no dan lugar por sí solas a cambios importantes en las prácticas de los profesores, pues ellos las asimilan desde sus marcos de referencia (Artigue, 2011; Ávila, 2001; Carvajal, 2004; Espinosa, 2004),[17] pero al mismo tiempo, se ha reconocido el apoyo que pueden representar en el trabajo de un profesor que procura poner en práctica un enfoque afín al de la propuesta (Block *et al.,* 2004; Block *et al.,* 2007). A continuación, me referiré a los aportes de algunos estudios a la comprensión de esta problemática.

En nuestro estudio del año 2004, a partir sobre todo del análisis de las clases en las que se implementaba exitosamente el enfoque, se observó que la transformación de las propuestas curriculares oficiales se revelaba como una condición *sine qua non* de su uso, esto es, como una condición de su apropiación. A una conclusión similar llegó Ríos (2016), quien se interesó por las transformaciones que dos educadoras, con afinidad hacia el enfoque, imprimieron a dos secuencias didácticas. Ella encontró que las edu-

[16] En Block (1996) se propone una categorización de los juegos en función de la manera en que ponen en juego un conocimiento de matemáticas.

[17] En la obra "Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México", puede encontrarse una síntesis de los numerosos trabajos que se hicieron durante una década en esta dirección (Ávila, Block y Carvajal, 2013).

cadoras reconstruyeron de maneras distintas las propuestas, pero que ambas tendieron a preservar las condiciones que determinan el sentido de los conocimientos en juego.

En los dos estudios anteriores se da cuenta, además, de factores que influyen en las transformaciones que los docentes hacen a las propuestas. En el del año 2004 (Block *et al.,* 2007), se destacaron condiciones de distinta naturaleza que parecían favorecer una comprensión más fluida del enfoque subyacente a las lecciones del libro de texto: un conocimiento explícito de éste, a veces logrado a lo largo del estudio del taller antes mencionado, y a veces anterior incluso a la reforma curricular; cierto dominio del conocimiento matemático; la conciencia de que la práctica anterior no daba los resultados esperados; el hecho de que el proyecto de implementar el enfoque constituyera un proyecto a nivel de toda la escuela.

Por su parte, Ríos (2016) identificó factores que contribuyen a explicar las transformaciones realizadas por las educadoras: ciertas preferencias personales de índole didáctica, como el mayor o menor rigor con que se asume respetar la autonomía de los alumnos; la información que las maestras tienen acerca de cada uno de sus alumnos, y que influye en las decisiones diferenciadas que toman con respecto a cada uno (factor para el que tomó prestado de Luna (1997) el nombre de *expediente no escrito*); la preocupación por los buenos productos, la cual eventualmente lleva a las docentes a inducir correcciones que originalmente estaba previsto ocurrirían más adelante, por retroacción de la misma situación, preocupación que impide también que el error se sostenga por más de un breve tiempo.

Para terminar este punto, mencionaré brevemente la línea de investigación llamada "ingeniería didáctica de segunda generación" (Perrin Glorian, 2011), debido a que ejemplifica una de las evoluciones que ha seguido el estudio de la relación de los profesores con las propuestas, en particular con las que se orientan con el enfoque que nos ocupa. Esta investigadora toma secuencias didácticas producidas por los investigadores con la metodología de la ingeniería didáctica, y las estudia desde la perspectiva de su uso por parte de los docentes. Lo más problemático, dice Perrin Glorian, es dar un ejemplo de una realización posible de la secuencia, destacando aquello en lo que el profesor puede tomar decisiones, y aquello que debe conservar, so peligro de afectar el sentido de los conocimientos implicados. La autora subraya lo vano de los intentos de pretender que la conducción del profesor se apegue de manera estricta a un guion, y opone a ello la necesidad de que él pueda incorporar la ingeniería en su propia progresión didáctica. Los docentes no deben, agrega la investigadora, intentar reproducir la historia (que ocurrió en la aplicación experimental de la situación, por ejemplo), sino las condiciones de aprendizaje.

Estudios como los anteriores, además de ayudarnos a comprender mejor la relación de los profesores con las propuestas curriculares, aportan elementos que pueden ser valiosos para los procesos de formación y de actualización de maestros, al focalizar aspectos del enfoque que han resultado difíciles de implementar en la práctica, así como aspectos de los contenidos matemáticos que se suelen comprender superficialmente.

Problematizan, por otro lado, la confección de materiales de apoyo para el docente, ¿qué características debe tener una propuesta didáctica, una secuencia de situaciones, por ejemplo, para hacer viable su aprovechamiento por el docente, sabiendo que no se trata de reproducirla punto por punto? ¿Qué margen de acción dejar? ¿Cómo comunicar lo que es fundamental conservar?

5. COMENTARIO FINAL

Asumiendo que son vigentes las bases del enfoque didáctico para la enseñanza de las matemáticas que se empezó a promover en el año 1993 –en particular el proyecto de lograr que los conocimientos matemáticos que son objeto de enseñanza sean realmente funcionales para los estudiantes, en el sentido de emerger como herramientas que les permiten resolver problemáticas claras, significativas para ellos–, las tareas que hay por delante son grandes y complejas.

El análisis de los conocimientos a enseñar que esta postura epistemológica nos exige, en tanto constructores del currículo, es invaluable. El reto que esto conlleva es múltiple: concierne, por una parte, a la organización de contenidos del currículo y al diseño de situaciones, tarea en la que convergen los esfuerzos de investigadores y diseñadores y que, como vimos, ha avanzado de manera errática principalmente en cuanto a los libros de texto, con claros momentos de retroceso. Por otra parte, concierne a la determinación de los conocimientos matemáticos que deben considerarse en la formación de profesores, pieza angular en el concierto de factores que determinan la enseñanza.

Ahora somos más conscientes de que los profesores necesitan *recrear* las propuestas didácticas para poderlas usar, subsumiéndolas a su propia perspectiva del trabajo docente. De esto se derivan otros retos; en primer lugar, nuevamente, el de la formación de profesores, pues de ésta depende en buena medida la calidad de las situaciones de enseñanza que son recreadas por ellos, así como su desempeño al elegir y transformar las propuestas disponibles. Pero otro reto concierne al diseño curricular mismo, en el cual hay que seguir explorando qué es lo que resulta más fecundo comunicar al docente, qué equilibrio guardar entre la necesidad de comunicarle con detalle las progresiones didácticas y la necesidad de dar un margen que le permita adaptarlas, recrearlas, integrándolas en su proyecto.

La pequeña ventana abierta en el estudio del año 2017, así como lo reportado por otros estudios de las prácticas de la enseñanza de las matemáticas realizados durante los últimos 10 o 15 años, dejan ver una intención por parte de varios de los docentes cuyas clases fueron observadas, de hacer menos traumática la experiencia de aprender matemáticas, incluso de hacerla más grata para sus alumnos.[18] Muestra, al mismo tiempo, menos rigidez en lo que se concibe como conocimiento matemático válido, al

[18] Un dato sorprendente de dicho estudio es que, en las entrevistas a los alumnos, la materia de matemáticas surgió como la asignatura que más les gusta.

dar mayor cabida a la diversidad de procedimientos en la clase. Los estudios utilizados aquí como referente han permitido identificar también docentes con alto nivel de compromiso con su tarea, algunos de los cuales –pocos, ciertamente– han logrado poner en obra aspectos importantes del enfoque del año 1993. No obstante, también se ha puesto de manifiesto, en la mayoría de los docentes, un conocimiento matemático aún insuficientemente amplio y profundo, así como limitaciones en el potencial didáctico de las situaciones que diseñan, o que recuperan de los materiales disponibles y que adaptan. Estos claroscuros pueden interpretarse de distintas maneras. Espero haber logrado explicar la mía: hacer más evidente el potencial del proyecto emprendido en 1993, así como sus lagunas, para fortalecerlo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Evelyn Caballero, a Patricia Martínez, a Margarita Ramírez y a Laura Reséndiz su lectura atenta de las versiones anteriores de este texto, y sus muy valiosos comentarios.

REFERENCIAS

Alatorre, S., Bengoechea, N. de., López, L., Mendiola, E. y Saíz, M. (1999). Análisis de los materiales oficiales para la enseñanza de las matemáticas en primaria. *Resúmenes del V Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Aguascalientes, México: Universidad Autónoma de Aguascalientes y COMIE.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Wozniak (Coords.), *En Amont et en Aval des Ingénieries Didactiques. XV École d'Ètè de Didactique de Mathématiques* (Vol. 1, pp. 225-237). Paris, France: La Pensée Sauvage éditions.

Ávila, A. (2001). Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas. *Perfiles Educativos, 23*(93), 59-86.

Ávila, A. (Dir.), Aguayo, M., Eudave, D., Estrada, J. L., Hermosillo, A., Mendoza, J., Becerra, E. (2004). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México DF, México: Secretaría de Educación Pública. (Col. Informes de investigación. Temas Prioritarios).

Ávila, A., Block, D. y Carvajal, A. (2013). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En A. Ávila, A. Carrasco, A. Gómez, Ma. Guerra, G. López y J. L. Ramírez (Coords.), *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México. Matemáticas, Ciencias Naturales, Lenguaje y Lenguas y Extranjeras. 2002-2011* (pp. 35-56). México DF, México: ANUIES y COMIE.

Block, D. (1996). Juegos para el aprendizaje en la primaria. *Básica. Revista de la escuela y del maestro, 13*(3), 6-17.

Block, D. (Coord.), Dávila, M., García, S., Martínez, P., Moscoso, J. A., Ramírez, L., Solares, D. (2004). *Papel del taller "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", en los procesos de apropiación de la propuesta curricular de 1993. Informe final.* México DF, México: Proyecto por convenio DIE-SEP.

Block, D. y Álvarez, A. M. (1999). Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática, 11*(1), 57-76.

Block, D. y Dávila, M. (1993). La matemática expulsada de la escuela. *Educación Matemática,* 5(3), 39-58.

Block, D., Dávila, M. y Martínez, P. (1995). La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática, 7*(3), 5-26.

Block, D., Moscoso, A., Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12*(33), 731-762.

Brousseau, G. (1972). La mathématique à l'école élémentaire. Processus de mathématisation. En M. Glayman (Dir.), *La mathématique à l'*école élémentaire (428-457). Paris, France: APMEP.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. (Didactique des mathématiques 1970-1990).* Grenoble, France: La Pensée Sauvage Èditions. (Col. Recherches en didactique des Mathématiques).

Brousseau, G. (2007). Activité mathématique et évaluation. En A. Ruiz (Presidencia), *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, llevada a cabo en Querétaro, México.

Carvajal, A. (2004). Las Matemáticas en la escuela primaria: construcción de sentidos diversos. *Educación Matemática, 16*(3), 79-101.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del Saber sabio al saber enseñado* (3ª ed., 1ª reimpresión). Buenos Aires, Argentina: Aique. (Col. Psicología Cognitiva y Educación).

Espinosa, E. (2004). *Los maestros y la apropiación de nuevas propuestas pedagógicas. Estudio etnográfico de la incorporación de una reforma para la alfabetización inicial en la primaria* (tesis doctoral). DIE-Cinvestav-IPN, México.

Gascón, J. y Bosch, M. (2007). La miseria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 201-240). Jaén, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Luna, M. E. (1997). *Los alumnos como referentes básicos en la organización cotidiana del trabajo en el aula.* México DF, México: DIE-Cinvestav-IPN. (Serie DIE-Cinvestav, Tesis 21).

Mendoza, T. (2017). Dejar de ver lo que se ve, y ver lo que no se ve: La construcción

de las magnitudes en los libros de texto. *XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa*, llevado a cabo en San Luis Potosí, México.

Perrin Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Wozniak (Coords.), *En amont et en Aval des Ingénieries Didactiques. XV Ècole d'Ètè de Didactique de Mathématiques* (Vol. 1, pp. 57-78). Grenoble, France: La Pensée Sauvage Éditions.

Phillips, D. C. (1995). The Good, the Bad, and the Ugly: The Many Faces of Constructivism. *Educational Researcher, 24*(7), 5-12.

Ríos, M. G. (2016). *La enseñanza del tratamiento de la información en preescolar. Un estudio sobre procesos de interpretación y de reconstrucción de situaciones didácticas* (tesis de maestría). DIE-Cinvestav-IPN, México.

Santos Bernard, D., Macías, G. y Cruz, J. (2006). Los libros de texto gratuitos de matemáticas: concepción y uso que les dan los maestros. En E. Filloy (Comp.), *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 283-299). México DF, México: Aula XXI, Santillana y Cinvestav.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles, Belgique: Groupe De Boeck. (Col. Perspectives en éducation et formation).

SEP. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda Parte*. México: Programa Nacional de Actualización Permanente, SEP.

SEP. (1997). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2009). *Programas de Estudio 2009. Primer grado. Educación básica. Primaria.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP. (1993). *Plan y Programas de Estudios de Educación Básica. Primaria.* México: Autor.

SEP. (2016). *La propuesta curricular para la educación obligatoria 2016*. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/docs/Propuesta-Curricular-baja.pdf.

SEP. (2017). *Aprendizajes CLAVE para la Educación Integral. Plan y Programas de estudio para la Educación Básica*. Recuperado de: http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf.

Weiss, E. (Coord.), Block, D., Civera, A. y Dávalos, A. (2017). *Evaluación de medio camino: Estudio de las prácticas de docentes de primaria y secundaria. Informe final. I y II.* México: Proyecto financiado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

Venturas y desventuras de la investigación sobre saberes no escolares y educación matemática de jóvenes y adultos

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional, México

Resumen: En este escrito se analiza el desarrollo de la investigación sobre los saberes matemáticos no escolares y su vinculación con la escolarización básica de jóvenes y adultos. Se muestra la relación entre investigación y práctica educativa al exponerse cómo en México esta línea de trabajo derivó de un problema específico: elaborar libros para apoyar la alfabetización matemática de personas adultas. Se describe la utilización sucesiva de enfoques centrados en la cognición, lo sociocultural y, más recientemente, el que ofrece la teoría antropológica de lo didáctico. Se afirma que la evolución de los contextos político, social y conceptual ha impactado en las miradas sobre esta problemática, produciendo lo que la autora llama venturas y desventuras de esta línea de investigación. Se concluye señalando tareas pendientes –tanto en lo teórico como en lo educativo–, y se destaca la necesidad de que las políticas gubernamentales consideren relevante la educación básica de quienes no ejercieron este derecho en la infancia. Recuperar la visibilidad social y política que el tema tuvo en los años 80 y 90 del siglo XX –se afirma– favorecerá que esta línea de investigación acreciente sus aportes teóricos y contribuya a una educación matemática más pertinente y de calidad para este sector de población.

PROEMIO

Antes de iniciar la escritura de este capítulo, dudé sobre cuál de los artículos que publiqué en *Educación Matemática* durante el período en que fue editada por Editorial Iberoamérica tomaría como referencia para mi aportación a este libro de celebración. Finalmente decidí hacerlo sobre el saber matemático de quienes cursan una educación básica cuando son jóvenes o adultos. Lo hago como homenaje a las personas cuyas condiciones de pobreza les impidieron ejercer su derecho de ir a la escuela en la infancia. También tomé el tema para dar espacio a una línea de investigación que en México y en muchos países de América Latina dejó de ser relevante para los tomadores de decisiones y los financiadores de la investigación. Treinta años después de mi primer trabajo sobre el tema, mantengo la convicción de que esta línea de investigación es importante, no solo por su valor social sino por las aportaciones teóricas que nos ha proporcionado y las que aún puede ofrecernos.

1. EL CONTEXTO SOCIAL

Hace 25 años escribí el artículo "El saber matemático extraescolar en los libros para la educación de adultos" (Ávila, 1993), que fue publicado en el volumen 5 de *Educación Matemática*. En él pretendía mostrar la relevancia de hacer interactuar el conocimiento construido en la vida con el escolar, y señalaba que en los materiales para la alfabetización matemática de adultos apenas se comenzaba a reflejar esta preocupación. Al artículo le precedía un trabajo de investigación realizado con el interés de saber cómo las personas analfabetas resuelven los problemas aritméticos que se les presentan en su quehacer cotidiano (Ávila, 1990). El saber cómo las personas no escolarizadas actúan cuando enfrentan situaciones matemáticas era un problema de gran relevancia social a finales de los años 80 y principios de los 90, no solo en México sino en toda América Latina.

Para responder a la pregunta de investigación que me había planteado, formulé algunos problemas aritméticos e interrogué sobre su solución a un grupo de analfabetos, utilizando los conceptos y el herramental metodológico de los que nos proveía la teoría piagetiana (Ávila, 1990).[1] Mi interés por indagar las formas de resolución de problemas (aritméticos) en este sector de población no derivó de un interés teórico, sino de un problema práctico: la elaboración de libros para apoyar la alfabetización matemática que el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (en adelante INEA) tenía como proyecto. Esta institución fue fundada en 1981; desde entonces centraliza la escolarización de las personas que en su infancia no fueron a la escuela, y hacia 1985 sus funcionarios se interesaron en renovar los materiales que apoyaban su labor. Hasta esas fechas, el aprendizaje matemático de los adultos no escolarizados se había valido de materiales similares a los utilizados con los niños, modificando solamente los contextos de presentación de los contenidos.

Puesto que la obsolescencia de estos materiales se había vuelto totalmente evidente, su modificación resultaba indispensable. Ya no convencía a nadie –al menos no teóricamente– comunicar la matemática escolar mediante actividades y secuencias donde el conocimiento era seccionado bajo el supuesto de que las personas eran tabla rasa –recipientes por llenar, diría Paulo Freire– y que dicho conocimiento se aprendía linealmente. Los libros elaborados en el Centro para el Estudio de Medios y Procedimientos Avanzados de la Educación en 1975 (CEMPAE, 1975), y reeditados en 1980, habían sido elaborados bajo dicha concepción, como se ve en las líneas siguientes:

> "En esta lección usted escribirá los números del 1 al 5, lo que le permitirá contar hasta 5" (CEMPAE, 1980, p. 19), o bien: "En esta lección usted realizará sumas cuyo total no pase de 5. Así podrá resolver problemas donde tenga que sumar hasta 5" (p. 28).

[1] Sirva esta nota para enfatizar que de las varias definiciones de "analfabeto" que ofrece el diccionario de la Real Academia Española, solo considero pertinente la de "profano en alguna disciplina", aquí la matemática escrita. Por ello, utilizaré la frase "personas no escolarizadas" como sinónimo de "analfabeto" (profano en la matemática escrita).

Las afirmaciones, secuencias, objetivos y consignas de los libros hasta entonces utilizados para la educación de los adultos se habían vuelto insostenibles. Después de 10 años de ser materiales indispensables, ya no era posible conservarlos.

Y es que el interés reciente por los saberes matemáticos construidos en la vida fue impulsado por la confluencia de ideas que –en el nivel internacional– cambiaron el concepto de los no escolarizados en tanto que personas cognoscentes: las ideas de Paulo Freire y su *Pedagogía del oprimido* (1970); las declaraciones de la UNESCO (1980) que destacaban el hecho de que los adultos no escolarizados tienen "un saber sin escritura"; los estudios socioculturales, que cuestionaban la identidad entre reprobar en la escuela y no saber (Carraher y Schliemman, 1983, citado por Nunes, 2001). Fue en el marco constituido por estas ideas que se iniciaron las investigaciones acerca del saber matemático de los no escolarizados (Ávila, 2014).

Tales ideas y las discusiones que les precedieron impactaron el campo de las matemáticas y su enseñanza a los adultos. De ahí emergieron dos problemáticas que se tornaron retos: a) conocer el pensamiento matemático de las personas no escolarizadas: sus orígenes, su funcionalidad, sus alcances, sus límites, y b) con qué sustituir los materiales educativos que hasta entonces habían emulado las secuencias con que se enseñaba a los niños. Con esta doble problemática enfrenté, junto con un grupo de colegas, la realización de los materiales de apoyo solicitados por el INEA hacia 1985.

2. EL DESAFÍO: ELABORAR MATERIALES PARA LA ALFABETIZACIÓN Y LA ESCOLARIZACIÓN MATEMÁTICA DE JÓVENES Y ADULTOS

Para realizar la tarea solicitada, formé equipo con Guillermina Waldegg, Olimpia Figueras y Eduardo Mancera. Ante una necesidad educativa socialmente muy sentida, nuestra convicción era que los materiales que produjéramos serían relevantes para el INEA y, sobre todo, para las personas que buscaran alfabetizarse y escolarizarse matemáticamente acudiendo a este Instituto. El trabajo resultaba todo un reto, así lo creíamos y lo sentíamos, pues entre nuestras convicciones de aquel entonces se contaba también la de que los libros de texto tenían una influencia muy importante en los procesos de aprendizaje escolar.

De este convencimiento derivaron intentos de colectar evidencia empírica que sirviera de orientación sobre cómo responder al desafío. Estos intentos nos llevaron a viajar para observar la actividad matemática en algunos círculos de alfabetización;[2] también a echar mano de nuestras hipótesis (sí, eran más hipótesis que conocimientos las que teníamos) para dar forma a los materiales.

[2] El círculo de estudio es el modelo educativo que utiliza el INEA desde sus inicios para realizar su labor. Consiste, teóricamente, en que un grupo de personas se reúnen a estudiar con la ayuda de un asesor del aprendizaje. El modelo se sustenta en la idea de que cualquier persona puede ayudar a otra a estudiar, y en el supuesto de que esa persona no necesita ser remunerada significativamente, pues se trata de un trabajo realizado por "solidaridad social".

Personalmente desarrollé una parte de los temas de aritmética, y mis visitas a círculos de alfabetización continuaron en la Ciudad de México. De los índices sobre la cognición que logré identificar en la actividad matemática de las personas –cuando resolvían simples ejercicios de cálculo o problemas sencillos que los implicaban–, tomé algunas de las ideas que plasmaría en las páginas de las que fui autora.

Después de un proceso complejo, concluyó la elaboración de los libros que se titularon *Nuestras cuentas diarias*, volúmenes 1 y 2 (INEA, 1986a; 1986b). Pero mucho de lo que ahí se propuso no estaba experimentado, ni siquiera estaba muy claro. Hoy afirmaría con Deborah Ball que nos faltaba suficiente conocimiento sobre e*l contenido matemático y esos estudiantes*, también sobre *el contenido matemático y la enseñanza a esos estudiantes* (Ball, Hill y Bass, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008), pues se trataba de personas analfabetas o de escasa escolaridad y en la literatura de aquel tiempo eran temas escasamente tratados. Fue hasta 1987, un año después de que se publicaron los volúmenes de *Nuestras cuentas diarias*, cuando apareció el célebre estudio brasileño "Written and oral mathematics" (Carraher, Carraher y Schliemann, 1987), que destacaba los saberes de un grupo de muchachos vinculados a actividades de venta, y que sin duda agregó apoyo –para el caso de la educación matemática– a la idea de que los analfabetos no eran unos ignorantes; aunque no eran analfabetos ni personas adultas en quienes estos autores sustentaban su trabajo, eran jóvenes o incluso niños y sí asistían a la escuela. No obstante, por su fecha de publicación, este artículo no constituyó una fuente de consulta para la escritura de los libros encargados por el INEA.

De cualquier manera, considero que, aunque muy perfectibles, partes amplias de esos materiales siguen siendo útiles. ¿A qué me refiero? Según anoté en mi artículo de 1993, la elaboración de los libros se hizo "[...] con la intención de retomar la experiencia del adulto y sistematizar y enriquecer su saber. [...] Esta intención, sin embargo, era acompañada de un conocimiento borroso sobre los saberes y mecanismos de aprendizaje construidos en la cotidianeidad" (Ávila, 1993, p. 69).

Y no podía ser de otro modo, porque nuestras ideas no se sustentaban en investigación apegada a normas, ni siquiera en un acercamiento prolongado al fenómeno que enfrentábamos. Sin embargo, reitero que algunos elementos de los materiales que en aquel momento constituyeron una aportación al campo de la educación matemática aún me parecen válidos para orientar la educación de adultos. Enlisto en seguida los que identifico como principales:

a) El reconocimiento explícito de que los adultos sin escolaridad, o con muy poca, utilizan matemáticas en distintas actividades de su vida cotidiana y laboral.
b) El reconocimiento de que en la experiencia matemática se construye un saber, aunque en general se trate de un saber sin escritura.
c) La referencia frecuente a situaciones cotidianas y de intercambio comercial.
d) La adaptación de las situaciones y secuencias de aprendizaje al pensamiento de las personas, conforme a rasgos de éste hasta entonces identificados; por ejemplo,

haciendo referencia al cálculo con dinero y sumando o restando primero las cifras de mayor valor relativo, precisamente como se hace con el dinero.

e) La interacción permanente entre el hacer de la experiencia y los conocimientos previos de las personas, y el conocimiento matemático escolar que se trata de comunicar.

Algunos ejemplos de estos elementos se reflejan en los pasajes de *Nuestras cuentas diarias 1* que inserto a continuación:

> Página 23.- Aparece una hoja de calendario y, más abajo, algunos números entre 1 y 30; en seguida se da la consigna:
>
> "Lea los siguientes números en voz alta. Luego escríbalos con palabras. Si no se acuerda, cuente en el calendario".[3] (INEA, 1986a, p. 23)
>
> Página 25.- La página comienza con la frase: "Usted sabe leer y escribir otros números. Si no se acuerda, piense en los que aparecen en las monedas y billetes". En seguida aparece la imagen de una mujer pensando en una moneda de $100 a la vez que dice para sí misma: "100 pesos, se dice cien" (INEA, 1986a, p. 25).
>
> En la lección titulada "Cuentas de todos los días", se inicia la escritura del cálculo aditivo; ahí se menciona: "Casi todos los días hacemos cuentas y las hacemos sin utilizar ni lápiz ni papel. En esta lección vamos a practicar esas cuentas que hacemos diariamente" (pp. 60-61).
>
> A continuación, en la misma lección, se dan recomendaciones de "hacer las cuentas sin apuntar, como se hacen todos los días", y se inicia el registro del cálculo a partir de leer y completar notas de tiendas donde los números están constituidos por "centenas cerradas", conforme a los precios de la época. (INEA, 1986, pp. 60-65)
>
> Respecto de la medición:
>
> Se presentan imágenes donde hay personas midiendo (un albañil en una construcción, una mujer que confecciona una falda) y se anota: "Medimos, para construir una casa, para hacer un vestido, para comprar y vender... Algunas personas, por su trabajo, siempre están midiendo. Como Lucha, que trabaja en una tienda de telas" (INEA, 1986a, pp. 51-53).

A mi juicio, un mérito de estos materiales fue la ruptura con el aprendizaje lineal de la matemática, donde lo que manda es la secuencia "natural" de los números y el tamaño de estos para ir complejizando los cálculos. Otro mérito, vinculado al anterior, lo constituyó el reconocimiento del saber construido en la vida y su interacción constante con el que se comunicaba mediante el libro.

[3] La situación del calendario fue elaborada por Olimpia Figueras.

3. SOBRE LA UTILIDAD DE LOS MATERIALES ELABORADOS

Aquellos libros fueron bien acogidos por los funcionarios del INEA y se mantuvieron en uso durante más de 10 años. Pero se supo poco sobre cómo fueron recibidos por quienes ayudaban a las personas a aprender utilizándolos, y menos aún se conocieron las reacciones de los aprendientes.

Y es que, desafortunadamente, nunca hicimos un seguimiento de su uso en los círculos de estudio, y si el INEA realizó alguno, no hizo públicos sus resultados. Si bien una cierta funcionalidad los mantuvo vigentes durante bastante tiempo, en los hechos los datos con que contamos son escasos y hablan de lo que sin duda es el destino de toda innovación: lo que los investigadores y diseñadores de propuestas educativas planean no necesariamente ocurre en los hechos; la innovación es aceptada o es rechazada, pero siempre es reinterpretada.

Hay testimonios de que algunos contenidos, páginas y secuencias fueron útiles, como puede verse en las palabras de una mujer mayor que dijo estar aprendiendo la escritura de los números y tratar de memorizarlos apoyada en el primer volumen de *Nuestras cuentas diarias:* "Estoy aprendiendo a leer los números, si se me olvida, veo en el calendario". O en las declaraciones de algunas mujeres quienes –ya más adelantada la primaria y utilizando materiales que continuaron adoptando el enfoque de Cuentas diarias– hacían afirmaciones como: "Todo lo que trae de kilos, de litros, de papas, de manzanas, me sirvió mucho para organizarme mejor en el gasto de la casa" (María Elena, 40 años). (Tomado de Ávila, Eudave, Estrada y Alcalá, 2008).

También hay testimonios de que la lectura de los libros del nivel inicial necesitaba de ayuda. A los neolectores no les resultaba fácil entender la matemática escrita y su gramática. Un caso que fue recuperado por Carmina Sánchez (2003) (figura 1) es ilustrativo al respecto.

En la página 167 del libro *Nuestras cuentas diarias 1*, se ilustra la agrupación en decenas:

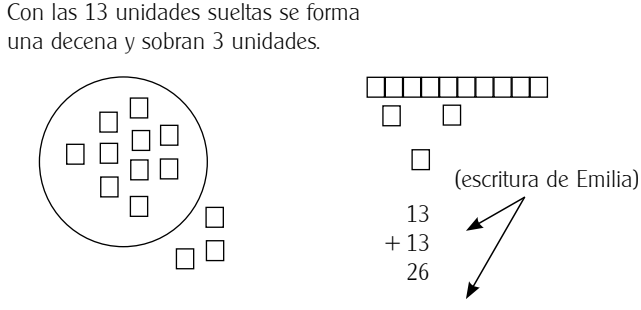


Figura 1. Ejemplo de agrupación en decenas (INEA, 1986a, p. 167)

Según la descripción de Sánchez, Emilia –una mujer mayor, estudiante del nivel inicial– comienza a leer:

> "Con las trece unidades sueltas se forma una decena", reflexiona sobre lo leído y comenta: "Con los 13 sueltos se forma una unidad. Sí, o sea, 3 unidades". Después de comentar esto, realiza la operación: 13 + 13 = 26, considerando ambos conjuntos como elementos que debe sumar y no como equivalentes. (Sánchez, 2003, p. 15)

En opinión de Sánchez, se trata de un problema de lectura. Desde una perspectiva más actual (como la de R. Duval), sería válido decir que la escritura propuesta implicó un cambio de registro –de lo oral a lo escrito–, y que ya en el nuevo registro, el tratamiento solicitado no fue bien interpretado. En efecto, el agrupamiento decimal de las 13 unidades "sueltas" fue reinterpretado por Emilia a partir de sus conocimientos previos –su manera de calcular oralmente y la gramática escolar correspondiente a ese cálculo que ya va aprendiendo. Estos conocimientos la orientan a sumar, no a agrupar en decenas. Es una reinterpretación orientada por las experiencias previas que se distancia de lo propuesto en el libro.

4. LOS TEMAS RELEVANTES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE ADULTOS PROVENÍAN TAMBIÉN DE UN CONTEXTO CONCEPTUAL

La convicción respecto de la relevancia de las matemáticas en la escolarización de adultos –compartida con otros investigadores– provenía de lo social, de la importancia de la escolarización de estas personas reconocida hacia 1980. Algunos años después me di cuenta que, a pesar de esta motivación social, mi atención estaba muy centrada en las estrategias que utilizan las personas para resolver los problemas aritméticos. Por ello, parte importante de mi primera investigación al respecto se enfocó en los procedimientos construidos y utilizados en la cotidianeidad para resolverlos (Ávila, 1990).

Este interés sin duda estaba influido por el contexto epistemológico propio de la época. En aquel entonces, la noción de conocimiento por asimilación y acomodación que nos ofrecía Piaget, así como la metodología piagetiana para el estudio de la cognición, eran muy reconocidos y utilizados. Leer a Piaget y su método clínico era obligado en las licenciaturas de psicología y pedagogía en México; también en los posgrados en educación y en educación matemática. La formación que se obtenía en este tipo de programas acercaba a esa manera de pensar a los sujetos y de indagar su pensamiento.

Es decir que, tal como lo veo ahora, la focalización en las estrategias, en las "maneras específicas de hacer" para enfrentar las situaciones –y en los procesos cognitivos que reflejan estas formas de hacer–, no se debía únicamente a un interés personal gratuito en una metodología de investigación, sino que provenía del contexto epistemológico de la época. Una evidencia de ello es que, en un tiempo en que no existía el inter-

net, ni siquiera el correo electrónico, en el seminario internacional "La enseñanza y el aprendizaje de la matemática básica a los jóvenes y adultos de los sectores populares", realizado en Marly le Roi (Francia) en marzo de 1993, conocí, entre otros, los trabajos de Germán Mariño (un reconocido educador colombiano) también centrados en procesos de resolución de problemas aritméticos en adultos de escasa escolaridad. En estos trabajos, tanto el interés por las maneras de hacer de las personas como la forma de indagación eran compartidos: la entrevista clínica se situaba en el centro como herramienta de indagación para comprender de qué modo las personas operaban con la aritmética. El siguiente párrafo, tomado de un texto de Mariño, refleja esta filiación piagetiana, al punto en que, como él mismo dice, en un primer acercamiento intentó catalogar a los adultos en los niveles establecidos por el célebre investigador suizo; respecto de un segundo trabajo comenta:

> También en el campo de las interpretaciones existen variaciones, pues en nuestro primer trabajo las constataciones empíricas eran utilizadas para tratar de ubicar, dentro de los estadios piagetianos, al adulto analfabeto, mientras que ahora, la reflexión se polariza (apoyándonos nuevamente en Piaget) sobre el intento de explicar las coincidencias entre la psicogénesis (del adulto analfabeto) y la historia de la matemática. (Mariño, 1985, p. 7)

A este contexto epistemológico –que penetrara también las investigaciones sobre el pensamiento infantil– se agregaba el deslumbramiento por la sistematicidad y coherencia, incluso la potencia del pensamiento que afloraba al interrogar a las personas e identificar sus estrategias espontáneas de cálculo. De este modo, alimentado también por la que hoy identifico como seducción, se acrecentó mi interés por entender el conocimiento de las personas, y cómo éste podría ser reconocido y recuperado en la escolarización matemática de quienes no habían ido a la escuela cuando niños.

El sentimiento de ese momento hacia el saber matemático de los analfabetos de nuevo no era un hecho aislado. Mariño, en un escrito de 1997, declara: "Diez años después vemos con claridad que nos encontrábamos deslumbrados por el descubrimiento de los saberes populares y que llegábamos a valorarlos tanto que asumíamos una posición aislacionista" (Mariño, 1997, p. 81).

Pero Mariño fue más allá de sus intentos iniciales "aislacionistas", en ese período tradujo los resultados de su estudio en un material para el aprendizaje de una aritmética "alternativa", al que tituló *Cuentas claras* (Mariño, 1983) y donde los algoritmos escritos seguían la lógica del cálculo oral. Posteriormente elaboró otro material donde buscaba un "diálogo de saberes". Afirmaba que no se trataba de reverenciar dichos saberes, sino de conducir a la matemática escrita reconociéndolos, y planteaba puentes muy interesantes para hacer transitar con comprensión, del saber de la oralidad al de la escritura (Mariño, 1985).

Isabel Soto, una investigadora chilena que había estudiado en Europa, avanzaba por un carril similar; aunque ella tenía como marco la escuela de H. Freudenthal, se había

concentrado en identificar las formas en que campesinos chilenos resolvían problemas aritméticos y de medición. En su artículo publicado en *Educación Matemática* sobre las estrategias que utilizaban estos campesinos para resolver problemas con fracciones, se constata la influencia de la metodología piagetiana (Soto y Rouche, 1995).

El hecho es que, aunque el interés por el aprendizaje no escolar y el escolar de las personas sin escolaridad era auténticamente social, la focalización en lo procedimental y la cognición también era real. El interés compartido que estaba en el fondo era reconocer el saber matemático construido en la vida, pero también colaborar para que el tránsito a la matemática escrita fuera terso y con comprensión, y esto efectivamente tenía como origen una preocupación social.

5. UNA AMPLIACIÓN DE LA MIRADA: EL ENCUENTRO ENTRE EL CONOCIMIENTO INFORMAL Y EL ESCOLAR

El encuentro con lecturas de orientación sociocultural, especialmente los trabajos de Jean Lave (1991), nos colocó frente a ideas por demás cuestionadoras respecto del estudio del pensamiento que se había realizado hasta esas fechas. Esta autora cuestionaba duramente la visión de lo que llamaba "cognición centrada en el laboratorio". Afirmaba que: "lo que llamamos cognición es, de hecho, un fenómeno social complejo", a la vez que ofrecía la salida a tal postura mediante las teorías contemporáneas sobre la práctica social, y adicionalmente sentenciaba: "la 'actividad' matemática (por proponer un nombre a una forma dividida de cognición) adopta formas diferentes en situaciones diferentes" (p. 17).

Estas ideas nos permitieron percatarnos de que analizar estrategias de resolución e intentar armonizar los procedimientos de la matemática escrita con los informales era un aspecto relevante, quizás central, pero ni único ni suficiente como elemento para pensar y planear la escolarización matemática elemental de las personas adultas. De este modo, en posteriores trabajos el interés se amplió hacia la relación de las personas con el saber escolar o, mejor dicho, hacia la interacción del saber de la vida con el saber de la escuela que las personas buscan con el fin de mejorar su condición personal y social, por lo que nuestras preguntas cambiaron:

¿Cómo se da el encuentro entre la matemática oral y la que se busca comunicar en la escuela? ¿Las personas dejan de lado sus saberes previos para asimilar los que se les presenta en la institución? ¿El aprendizaje matemático escolar modifica la forma de hacer matemáticas de las personas? Fue entonces que con un grupo de colegas acudí a las llamadas plazas comunitarias (centros educativos del INEA) y documentamos el encuentro entre los conocimientos de los no alfabetizados, o con educación básica inconclusa, y el conocimiento escolar.

Efectivamente, mediante una indagación que incluía resolución de problemas, entrevistas, visitas a centros educativos y el análisis de lo que ahí ocurre alrededor de algunos temas escolares de matemáticas (Ávila *et al.,* 2008; Eudave, 2009; Eudave, 2016; Estrada

y Ávila, 2009; Ávila, 2009; Ávila y Alcalá, 2013), llegamos a la conclusión que en otra colaboración resumí del siguiente modo:

> [Es posible] poner en duda los beneficios de la escolarización en el desempeño matemático frente a problemas específicos. Todos [nuestros estudios] concluyen señalando que, en general, el avance en el nivel de escolaridad no mejora [de manera importante] el desempeño frente a los problemas planteados. [Al parecer,] son el trabajo y el intercambio comercial (actividad importante en la vida cotidiana) los que mejor ayudan a desarrollar ciertas habilidades y saberes matemáticos, aunque de carácter local. (Ávila, 2014, p. 59)

En efecto, una cuestión constatada en estos estudios fue que al enfrentar la solución de ciertos problemas –aun siendo planteados en el contexto escolar– en su mayoría las personas prefieren recurrir a los conocimientos y las estrategias que han construido en su vida familiar y laboral y en la actividad de intercambio comercial, más que a lo que se les propone en la escuela, incluso cuando se está por concluir la educación básica. Esta situación parece ser más marcada en las personas cuya actividad cotidiana o laboral les ha obligado a desarrollar conocimientos y estrategias de resolución "fuertes", como los trabajadores de la construcción o los comerciantes.

Desde luego, este hecho necesita más examen y más respuestas: ¿por qué muchas personas no sustituyen sus estrategias y formas de acercamiento a los problemas matemáticos, a pesar de haberse escolarizado?, ¿se debe a que esta matemática –tal como se comunica– no es útil para resolver problemas "de la vida"? ¿Se debe a que el servicio educativo que se ofrece a estas personas en realidad les enseña muy poco? ¿Se debe a que el conocimiento no escolar tiene más funcionalidad que el escolar porque está adaptado a las situaciones específicas que lo implican? ¿Qué tanto el examen del contrato didáctico institucional que se celebra en esos centros ayudará a obtener las respuestas?[4]

El trabajo experimental en un círculo de alfabetización (Ávila, 2007) ofreció apenas algunas pistas para dar respuesta a estas preguntas. Después de un largo proceso de contacto con la aritmética escolar y su escritura, los jóvenes participantes en la experiencia habían elaborado "métodos híbridos" de cálculo escrito que utilizaban al resolver problemas sencillos. Uno de estos métodos consistía en utilizar la notación y disposición convencionales para registrar el cálculo por realizar, conforme al problema planteado; usar cálculo mental o registrar cálculos auxiliares de cuño personal para resolver y, finalmente, anotar el resultado en el lugar correspondiente a la notación convencional.

Lo anterior puede verse como un avance en la interacción con la matemática escrita. Pero en este caso mediaba la voluntad de orientar el proceso para hacer conscientes

[4] En palabras de Chevallard (1992), el contrato didáctico institucional está constituido por un conjunto de cláusulas que distribuyen las responsabilidades recíprocas en el juego que se establece en cada institución docente entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, como director del proceso de estudio (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 210).

a los participantes de "el doble sistema de cálculo" que utilizaban. En las condiciones comunes en que se desarrolla este tipo de actividad matemática, es poco probable que tal voluntad esté presente.

6. CONTRATOS DIDÁCTICOS INSTITUCIONALES Y PROCESOS DE ESTUDIO EN LOS CENTROS DE EDUCACIÓN DE JÓVENES Y ADULTOS

Con el alimento de nuevas ideas que llegaban como oleadas a la educación matemática –específicamente las de contrato didáctico institucional y de proceso de estudio de Chevallard (1999)– nuestro análisis de la actividad matemática que se realiza en las plazas comunitarias del INEA, con el uso de materiales que prolongaron el enfoque de *Nuestras cuentas diarias*, mostró lo siguiente:

En los centros donde las personas jóvenes o adultas buscan cursar su educación básica, la relación didáctica se establece de manera peculiar: no existe en estricto sentido un docente que dirija los procesos de estudio, tampoco que ayude directamente en ese proceso. En las condiciones más comunes en que opera este servicio educativo vale decir que, para el caso de matemáticas, "el estudiante es su propio director de estudio". El asesor solo ayuda al estudio en términos generales, favoreciendo la expresión de las ideas y las dudas, animando para leer con atención el libro, o constatando que el libro se haya resuelto, y no en el proceso de estudio de contenidos específicos, ámbito en el que interviene más escasamente (Ávila *et al.,* 2008; Ávila, 2013).

Como línea básica de su proceso de estudio en matemáticas, el estudiante va leyendo y respondiendo el libro con base en el cual desea acreditar un determinado curso. Resultado de esta autodirección, es muy común que quien no comprende o no puede responder el texto, tome decisiones como pedir asesoría o clases de matemáticas a algún familiar que sabe más (Ávila *et al.,* 2008; Ávila, 2013). Llama la atención que las más de las veces, no se recurre al asesor para obtener esta ayuda. Y es que, en los hechos, la actividad matemática se guía por un *contrato didáctico institucional de orientación certificadora* que encamina la actividad hacia la resolución de exámenes con fines de acreditación (Ávila, 2013).

Ahora bien, hay otro ámbito de la educación matemática de jóvenes y adultos que pervive, a pesar de haber sido creado desde inicios del siglo XX: el de las escuelas nocturnas, cuya forma de acción es totalmente distinta a la del INEA.

En el artículo dedicado a este tema (Ávila, 2012), se analizan las prácticas institucionales de una escuela nocturna y los procesos de estudio de las matemáticas que ahí tienen lugar. La indagación muestra el peso del contexto institucional sobre dichos procesos y las praxeologías que estos producen.[5]

[5] En la teoría antropológica de lo didáctico, el saber matemático se caracteriza como *praxeología*, es decir, como la conjunción de un "saber-hacer" y un "saber", de una praxis y un logos. De manera sintética, un saber matemático debe constituir una organización completa que resulta de la asociación de "un saber hacer" y un "saber" (cfr. Bosch, Espinoza y Gascón, 2003).

En estos centros educativos, quienes ayudan a los procesos de estudio son profesores de educación primaria, y entre ellos se han creado discursos (saberes) coherentes y válidos acerca del saber matemático que se desarrolla en la vida y su relación con el que puede ofrecerse en el ámbito escolar. Ahí se tiene claro que las personas no son ignorantes, que tienen conocimientos matemáticos, pero que carecen de una escritura para registrarlos y para operar con ellos de manera eficiente:

> [...] En realidad no tenemos que darles los conocimientos, ellos ya los tienen por su vida que han tenido, por toda su trayectoria, pero realmente ellos no manejan lo escrito... hay que enseñarles lo escrito, para que no se les olvide, para que registren. (Mtra. Aurora). (Ávila, 2012, p. 14)

> [Los niños y los adultos] son diferentes; una diferencia principal es que los adultos, a pesar de tener ya una experiencia como adultos con algunos temas, tienen que empezar como niños en algunos [por ejemplo en geometría], y en otros temas [como en las operaciones aritméticas] no, porque lo único que les falta es pasarlo al cuaderno, porque lo saben hacer [...] yo creo que esa es la diferencia principal entre unos y otros [...] aquí todos tienen interés, todos quieren saber, todos quieren aprender, quieren pasar al cuaderno lo que ya saben. (Mtra. Paz). (Ávila, 2012, p. 15)

Sin embargo, este saber (este logos) no se refleja en el hacer, es decir, en las tareas que se plantean y las técnicas que se proponen para realizar dichas tareas con el fin de lograr el objetivo que subyace en el discurso institucional. La enseñanza como acción de ayuda a los procesos de estudio –salvo una excepción que aquí no es posible detallar– parece desconocer cómo establecer el vínculo entre la matemática de la escuela y la de la vida. En efecto, lo que se privilegia durante las clases de quienes expresan este logos es la repetición de números y procedimientos de cálculo, apartados de las situaciones que les darían significado. A partir de lo anterior se concluyó: en la escuela nocturna existe una discontinuidad didáctica entre logos y praxis (entre el saber y el hacer de los docentes), que se traduce luego en otra discontinuidad: la existente entre la simbolización y lo procedimental, que van por un lado, y las situaciones problemáticas donde el conocimiento matemático funciona, que van por otro lado, o que simplemente no van.

A la luz de la noción de contrato didáctico institucional, constatamos también que los problemas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas se explican en función de lo que ocurre en la institución en su conjunto, y no solo en actos de voluntad de los representantes de ella (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998; Bosch *et al.*, 2003). Una cláusula de este contrato que destaca por el gran peso que tiene sobre los procesos de estudio en la escuela nocturna es la aceptación silenciosa de que todos los que asisten a estudiar aprobarán. Esta cláusula deriva de la gran escasez de alumnos dispuestos a estudiar seis años para obtener su certificado de educación primaria, por lo que la

atención de los docentes no está en los resultados de su acción, sino en la escasez de estudiantes: "De por sí que son pocos, si los reprobamos, ya no vienen [...] nos quedaríamos con muy pocos y nos cierran la escuela. (Mtra. Luz, directora)." (Ávila, 2012, p. 23).

Esta situación se traduce en un contrato didáctico-institucional caracterizado por la irrelevancia del aprendizaje escolar. Se trata de un contrato escasamente didáctico (Brousseau, 1995), que no obliga al profesor a que sus alumnos aprendan. El resultado es que los procesos didácticos se trivializan, se deterioran, incluso se diluyen, porque el alumno queda liberado de toda responsabilidad y, con ello, también el profesor. Aun así, las escuelas nocturnas continúan en funcionamiento.

Con la intención de aportar elementos para estos complejos escenarios educativos, más allá del análisis de tal realidad escolar, actualmente experimento situaciones didácticas que recuperen y amplíen los saberes previos de quienes asisten a ellos. La tarea emprendida –por ahora en torno a la división– consiste en plantear situaciones que constituyan retos alcanzables y resolubles a partir de las experiencias previas de quienes asisten a estudiar. La emergencia de saberes y estrategias producto de la experiencia, la minusvaloración del cálculo mental y el interés (aunque también la dificultad) por transitar a la matemática escrita, así como el gusto por una matemática más lúdica, no utilitaria –experimentada alrededor de la calculadora y el tangram– son elementos que han caracterizado la interacción con el contenido matemático en este proceso.

7. EL ESTADO DE LAS COSAS, HOY

Hace tres décadas comenzamos a mirar la educación matemática de adultos como problema didáctico y de investigación. En un cierto sentido, el contexto social que rodea el tema sigue siendo similar: millones de personas desean o necesitan cursar una educación matemática básica de calidad, porque la matemática escrita, además de potenciar el saber matemático oral, tiene un valor social indiscutible (Knijnik, 1997). Pero en lo político el contexto cambió, y en uno de esos giros que hacen visibles o invisibles los problemas, la cuestión de la escolarización matemática de los jóvenes y adultos se invisibilizó.

Cuando se elaboraron los libros para el INEA en 1986, la educación para adultos, y en particular la educación matemática para esta población, era un tema socialmente muy valorado. Así, un par de años después del seminario de Marly le Roi mencionado atrás, la OREALC (UNESCO-Chile) realizó otro que sería su continuación en Río de Janeiro (1995),[6] donde nuevamente se discutió la educación matemática en la alfabetización y la educación de jóvenes y adultos.

Pero la llama que parecía encenderse se apagó; las reuniones internacionales dejaron de celebrarse y los trabajos sobre el tema fueron desapareciendo de los congresos

[6] "Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación". UNESCO-Santiago. Río de Janeiro, Brasil. 24-28 de octubre de 1995.

y las instituciones involucradas. Del mismo modo, fueron escasos los artículos publicados en revistas de investigación. En Argentina y Brasil, por ejemplo, hoy solamente hay esfuerzos aislados, a juzgar por el escaso número de publicaciones localizadas y por las informaciones proporcionadas por sus autoras (Fonseca, 2009; Broitman, 2012; Cademartori y Broitman, 2016).

Efectivamente, la educación matemática de jóvenes y adultos perdió espacio en Brasil.[7] Ya Fonseca (2009) mencionaba incluso que las exigencias estatales por atender la educación matemática de las personas de sectores populares estaban básicamente ligadas a la tecnología, asumiendo así filosofías y formas distintas de aquella con la que surgió la educación de adultos.

En cuanto al panorama colombiano, Mariño señala la inexistencia de trabajos e iniciativas sobre el tema desde hace años. La explicación que da a este abandono contiene dos elementos centrales: hace tiempo que todos los recursos del Estado dedicados a la educación –incluidos los destinados a la investigación educativa– se orientan a la educación de niños, y los analfabetos parecen no existir. El otro elemento que según Mariño impacta en la desatención a esta línea de trabajo es la falta de interlocución con otros colegas. Trabajar este tema, dice, es convertirse en un "lobo solitario".[8]

El caso de México se parece. Las y los investigadores interesados en el tema siempre hemos sido muy pocos, y en las políticas educativas se ha llegado al punto en que hoy el Instituto Nacional para la Educación de Adultos, más que de una educación o de una escolarización de calidad, se ocupa de certificar los saberes de las personas, desinteresándose de los procesos formativos previos a dicha certificación, lo que va convirtiendo al INEA en una instancia simplemente certificadora.

A pesar de esta invisibilidad en lo político, mantengo la convicción de que la investigación en este tema es necesaria en lo social y relevante en lo teórico. En este último sentido, es mucho lo que nos ha permitido conocer:

a) La existencia del pensamiento matemático no escolar y la lógica de este pensamiento.
b) Los fenómenos en torno al encuentro entre el saber escolar y el no escolar, y la importancia de establecer puentes de significación entre ambos saberes.
c) Las dificultades para transitar de un tipo de representación del saber (oral) a otro (el escrito) donde la gramática es distinta.

Pero aún no sabemos todo sobre la cognición y el sistema de cálculo constituido en la experiencia de vida, o sobre la relación que establecen las personas con el saber matemático escolar; tampoco sabemos lo suficiente sobre la acción didáctica que se desarrolla en las instituciones que ofrecen educación básica a los jóvenes y adultos. Al respecto, quiero destacar que el encuentro con teorías de tipo sociocultural que podemos

[7] G. Knijnik, en comunicación personal, mayo de 2018.
[8] G. Mariño, en comunicación personal, mayo de 2018.

considerar más abarcativas, no significa que sean innecesarios los estudios de corte piagetiano que desentrañan la lógica de la cognición, u otros enfoques que puedan aportar elementos a nuestra comprensión de la complejidad de este ámbito. Porque, en un plano más vinculado a la acción educativa, se está lejos de ofrecer –como política– una escolarización matemática pertinente y de calidad a quienes se vieron imposibilitados de ejercer el derecho de ir a la escuela en la infancia. Los colegas argentinos Gerez-Cuevas y Delprato (2017) consideran que un problema principal de la enseñanza en estos escenarios es que el modelo pedagógico para estas condiciones organizacionales ha permanecido informulado (p. 280). Mi acuerdo con esta afirmación es solo parcial. Considero más bien que las existentes son formulaciones inconclusas del modelo. En cambio, mi acuerdo es total con las preguntas planteadas sobre la formación de los docentes en estos contextos y los desafíos que estos profesionales deben enfrentar:

- ¿cómo acceder e interpretar saberes matemáticos de los alumnos?;
- ¿cómo clarificar un proyecto de enseñanza que delinee un itinerario que posibilite gestionar variantes de actividades comunes para responder a un aula con una población heterogénea que busca a la vez preservar una enseñanza simultánea?; y
- ¿cómo gestionar situaciones de expresión pública de técnicas empleadas por los alumnos para promover la "publicidad" de los conocimientos en el aula? (Gerez-Cuevas y Delprato, 2017, p. 288).

Las respuestas a preguntas como estas únicamente son posibles mediante la investigación.

8. REFLEXIÓN FINAL

En el artículo que escribí en 1993, concluía señalando la necesidad de revisar la enseñanza de las matemáticas en la educación de adultos. Afirmaba también que *Nuestras cuentas diarias* marcó algunas señales para el camino, aunque el problema no se agotaba con vincular el saber de la experiencia con el saber escolar. Hoy mantengo tal idea, pero agrego otra: la escolarización básica y el aprendizaje escolar de estas personas es mucho más complejo que elaborar libros y suponer que los participantes en el proceso seguirán las rutas ahí delineadas.

Si consideramos la escolarización matemática de este sector de población como un proceso donde se reconocen los saberes de la vida y se proporciona una escritura que potencia la memoria, la eficiencia y la eficacia en la construcción y validación de soluciones, entonces –y no obstante los avances conseguidos– falta demasiado por saber y por hacer.

Acercamientos a las aulas donde se enseña matemática escrita a los jóvenes y adul-

tos, como los que actualmente realizan Gerez-Cuevas y Delprato, o como los que ensayo mediante experimentación de secuencias didácticas, seguramente permitirán plantear nuevas preguntas y conseguir nuevas respuestas sobre esta línea de investigación.

Por supuesto, se hace necesario que quienes financian y delinean las políticas educativas sean sensibles a los rezagos que se viven en nuestros países y consideren la importancia de atenderlos. Experiencias en Colombia y Brasil indican que la educación de jóvenes y adultos ha tenido sus mayores oportunidades con los gobiernos de izquierda. Más allá de las declaraciones ideológicas, es indispensable que quienes definen lo que se hace con los recursos asignados a la educación, dejen de mirarla como una inversión y retomen el hecho fundamental de que ésta es un derecho de todas las personas. Un retorno a este reconocimiento muy posiblemente traería también por consecuencia que la soledad en la investigación se aminore.

REFERENCIAS

Ávila, A. (1990). El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 20*(3), 55-96.

Ávila, A. (1993). El saber matemático extraescolar en los libros para la educación de adultos. *Educación Matemática, 5*(3), 60-77.

Ávila, A. (2007). Del cálculo oral al cálculo escrito. Una batalla para acceder a una nueva significación. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 27*(3), 313-348.

Ávila, A. (2009). ¿Del cálculo oral al cálculo escrito? Constataciones a partir de una situación de proporcionalidad. En J. Kalman y B. V. Street (Coords.), *Lectura, escritura y matemáticas como prácticas sociales* (pp. 223-241). México DF, México: Siglo XXI Editores.

Ávila, A. (2012). Estudiar matemáticas en una primaria nocturna. Logos y praxis en un proyecto con orientación social. *Educación Matemática, 24*(2), 5-28.

Ávila, A. (2013). Entre el autodidactismo, la solidaridad y la certificación. Procesos de estudio de las matemáticas en cuatro plazas comunitarias del INEA. *Perfiles Educativos, 35*(142), 75-86.

Ávila, A. (2014). Del saber *de* la experiencia al saber *en* la experiencia: 25 años de investigación sobre saberes matemáticos y escolarización tardía en México [Número especial]. *Educación Matemática. 25 años*, 52-72.

Ávila, A., Eudave, D., Estrada, J. L. y Alcalá, E. (2008). *Matemáticas y educación de jóvenes y adultos. Estudio a través de la voz y el saber de los usuarios*. Reporte de investigación inédito, Universidad Pedagógica Nacional/Universidad Autónoma de Aguascalientes/Instituto de Educación de Aguascalientes, México.

Ávila, A. y Alcalá, E. (2013). ¿Cuál es la edad de Teresa? ¿Cuánto cuesta un pastelillo? Algunas preguntas sobre los saberes matemáticos no escolares y su uso en distintos contextos. *Revista Interamericana de Educación de Adultos, 35*(2), 43-64.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows

mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(1), 79-136.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Broitman, C. (2012). Relación con el saber y recursos matemáticos de adultos que inician la escolaridad primaria. *Revista del IICE*, (32), 39-54.

Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. En R. Noirfalise y M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIII École d'Été de Didactique des Mathématiques Saint-Sauves d'Auverge* (pp. 3-46). Clermont-Ferrand, France: IREM de Clermont-Ferrand.

Cademartori, P. y Broitman, C. (2016). Matemáticas escolares y extraescolares. Una mirada de los pobladores rurales de la provincia de Buenos Aires hacia sus propios saberes. En D. Juárez Bolaños (Coord.), *Educación rural: experiencias y propuestas de mejora* (pp. 105-126). México DF, México: Colofón.

Carraher, T. y Schliemann, A. (1983). Fracasso escolar: uma questao social. *Cuadernos de Pesquisa*. 42, 79-86.

Carraher, T., Carraher, D. W. y Dias Schliemann, A. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 82-97.

Centro para el Estudio de Medios y Procedimientos Avanzados de la Educación (CEMPAE). (1980). *Primaria Intensiva para Adultos. Matemáticas. Primera Parte* (2ª ed.). México DF, México: Secretaría de Educación Pública. (1ª ed., 1975).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fundamentaux de la didactique: Perspectives apportées par un approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'ánalyse des practiques enseignantes en théorie anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México DF, México: SEP/Cooperación Española. (Col. Biblioteca del Normalista).

Estrada, J. L. y Ávila, A. (2009). Los usuarios de la educación básica para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área. *Educación Matemática, 21*(3), 33-66.

Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática, 21*(2), 5-37.

Eudave, D. (2016). ¿Cómo afectan las trayectorias escolares y de vida en los conocimientos matemáticos de usuarios de EPJA? *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos, 45*(Sept.-Dic), 7-18.

Fonseca, C. F. R. (2009). *Educaçao matematica de jovens e adultos: Especificidades, desafíos e contribuições*. Belo Horizonte, Brasil: Auténtica.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Madrid, España: Siglo XXI.

Gerez-Cuevas, N. y Delprato, M. F. (2017). Heterogeneidad y educación matemática. Una cuestión pendiente en políticas de enseñanza en EDJA. En D. Fregona, S. Smith, M. Villarreal y F. Viola (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la educación matemática* (pp. 271-301). Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA). (1986a). *Nuestras cuentas diarias. Primera Parte* (vol. 1). México: Autor.

Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA). (1986b). *Nuestras cuentas diarias. Primera Parte* (vol. 2). México: Autor.

Knijnik, G. (1997). Lo popular y lo legítimo en la educación matemática de jóvenes y adultos. En *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Memoria de las Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación* (pp. 43-54*)*. Santiago de Chile: UNESCO-Santiago.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Mariño, G. (1983). *Cuentas claras*. Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1985). *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Constataciones y propuestas*. Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1997). Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Memoria de las Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación de adultos* (pp. 77-100). Santiago de Chile: UNESCO-Santiago.

Nunes, T. (2001). La matemática en la vida y en la escuela: dos décadas de investigación. En A. Lizarzaburu y G. Zapata (Comps.), *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina: Experiencias y desafíos* (pp. 234-252). Madrid, España: Ediciones Morata/PROEIB-Andes.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (1980). Un saber sin escritura. *El Correo de la UNESCO. Una ventana abierta al mundo, Año 13* (Junio), 18-21.

Sánchez, C. (2003). Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, (4), 12-16.

Soto, I. y Rouche, N. (1995). Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática, 7*(1), 77-96.

La feria de Pitágoras en su segundo cuarto de siglo

Alfinio Flores Peñafiel
University of Delaware, Estados Unidos de América

Resumen: Este capítulo es una visión retrospectiva del artículo "La feria de Pitágoras", publicado en 1992 en la revista *Educación Matemática.* Al principio se describe el artículo original. Después se discute el modelo de Van Hiele sobre el desarrollo del pensamiento geométrico, el contexto en que fue escrito el artículo y la relevancia del artículo en ese entonces. Luego se presenta la evolución, el desarrollo y las extensiones de trabajos sobre el tema. Primero se analiza cómo se enfatizan la acción, la comunicación y la reflexión cuando las actividades son conducidas. Más adelante se ilustran varias extensiones de las actividades de *La feria,* que incluyen dos actividades diseñadas por una maestra; extensiones a semicírculos y otras figuras en los lados del triángulo; análogos del teorema en la tercera y cuarta dimensión; ternas pitagóricas, y varias conexiones de la ley de cosenos. Luego se ofrecen ejemplos de páginas interactivas de geometría dinámica relacionadas con el teorema de Pitágoras. Para finalizar, se discute la importancia de resaltar también las aportaciones de otras culturas y de las mujeres al tema.

1. DESCRIPCIÓN DEL ARTÍCULO ORIGINAL

El artículo "La feria de Pitágoras" fue publicado en 1992 en dos partes (Flores, 1992a; 1992b). Un objetivo era ilustrar cómo una teoría del aprendizaje, el modelo de Van Hiele sobre el desarrollo del pensamiento geométrico, podía servir de guía en la presentación de un mismo tema para alumnos con diferentes grados de desarrollo en su pensamiento geométrico. Un segundo objetivo era mostrar cómo el teorema juega un papel importante en varias ramas de las matemáticas, no sólo en la geometría euclidiana clásica. Un tercer objetivo era proporcionar a maestros de diferentes grados escolares actividades para sus alumnos relacionadas con el teorema. La figura 1 muestra el contenido del artículo original. En el artículo original se dice que *La feria de Pitágoras*

> Empieza con casos particulares, a fin de familiarizar al lector con el teorema y sus partes. Luego se dan distintas demostraciones del teorema de Pitágoras, adecuadas para diferentes niveles de pensamiento geométrico de los alumnos, primero demostraciones informales, luego demostraciones formales. Después se generaliza el teorema en varias direcciones, pero siempre en un contexto euclidiano: en el espacio, trigonometría. Finalmente se analiza el teorema en $\mathbb{R}^2$ visto como espacio métrico y vectorial, donde una métrica euclidiana, sugerida por el teorema de Pitágoras, es

una de las posibles métricas, pero no la única. Finalmente se ve que el teorema no es válido en la esfera, la cual es un modelo de geometría no euclidiana (Flores, 1992a, p. 67).

Introducción
Enfoque empírico
    Casos particulares
    Un ángulo recto con una soga
    Tangramas
    Pitágoras en el geoplano
Rompecabezas de Pitágoras
Demostraciones con triángulos rectángulos
Demostraciones por partición y reagrupamiento
Un lema importante
    La demostración de Euclides
    Demostración de triángulos semejantes
El converso del teorema de Pitágoras
Ternas pitagóricas
Generalizaciones del teorema de Pitágoras
    Otro tipo de figuras sobre los lados
    Otra demostración: generalización y especialización
    Pitágoras en el espacio
    La ley de cosenos
    Pitágoras y la trigonometría
    La generalización de Pappus
El análogo del teorema de Pitágoras en la geometría sólida
Pitágoras en otros mundos
    Pitágoras y la geometría analítica
    Pitágoras y los vectores
    Geometrías no euclidianas
Referencias

Figura 1. Contenido de *La feria de Pitágoras* (adaptado de Flores, 1992b, p. 78)

Las actividades de *La feria de Pitágoras*, que incluyen enfoques clásicos o que me han gustado del teorema de Pitágoras, fueron recopiladas y adaptadas de varias fuentes que se listan en las referencias del artículo original. En *La feria* se incluyen actividades informales para alumnos de primaria y secundaria, así como demostraciones más formales para alumnos de matemáticas de nivel medio superior y de nivel superior. En

La feria también se describen actividades para profesores de matemáticas. Esto último es un reflejo de que para mí siempre ha sido clara la importancia de los maestros en el proceso de aprendizaje y la relevancia de trabajar con ellos para la investigación en educación matemática.

En *La feria* no se trabajó únicamente con la versión tradicional del teorema de Pitágoras (un triángulo rectángulo y cuadrados sobre los lados). También se incorporaron otras figuras en los lados del triángulo (por ejemplo, semicírculos y triángulos). Además, se incluyeron extensiones fuera del plano, por ejemplo, se añadió un análogo en la tercera dimensión donde se trabaja con un tetraedro en el cual tres de sus caras son triángulos rectángulos, y se compara la suma de los cuadrados de las áreas de estos triángulos con el cuadrado del área del triángulo más grande. El propósito de ir más allá de la versión tradicional del teorema fue que las lectoras y lectores pudieran ubicar el teorema en un contexto matemático más amplio.

La visión retrospectiva se hace en dos partes. Primero se discute el modelo de Van Hiele, el contexto en el que se desarrolló el artículo, así como su relevancia en ese entonces. Luego se discute la evolución y el desarrollo de mis trabajos sobre el tema y la relación con otros trabajos realizados desde la publicación del artículo hasta la actualidad.

2. CONTEXTO Y RELEVANCIA

2.1. El modelo de Van Hiele

El modelo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico fue elaborado por Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele en los Países Bajos en 1957. El modelo es parte de la tesis doctoral de Van Hiele-Geldof dirigida por Freudenthal. Ella y su esposo hicieron investigaciones con alumnos sobre el aprendizaje de la geometría utilizando este modelo. Desafortunadamente, ella murió poco después. Su esposo continuó con el desarrollo y diseminación del modelo (Van Hiele, 1959; 1973).

El modelo de Van Hiele tiene tres componentes: la visión *[insight]*, los niveles de desarrollo del pensamiento y las fases de aprendizaje (Hoffer, 1983). Una persona tiene visión si: a) es capaz de desempeñarse en una situación posiblemente desconocida; b) desempeña competentemente (correcta y adecuadamente) los actos requeridos por la situación, y c) desempeña intencionadamente (deliberada y conscientemente) un método que resuelve la situación. Para tener visión, los alumnos entienden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo hacerlo. Los alumnos pueden aplicar su conocimiento para resolver problemas. A continuación, describimos los niveles de pensamiento geométrico.

Nivel 1 (Nivel básico): Visualización

Las figuras geométricas son contempladas como un todo. El estudiante identifica, nombra, compara y opera las figuras por su apariencia global. Identifica partes de una figura, pero no analiza las figuras en términos de sus componentes. No usa las propiedades para caracterizar una clase de figuras y no hace generalizaciones. Los estudiantes pueden pensar que dos figuras son diferentes porque se ven diferentes, sin enfocar su atención en los lados y los ángulos. Algunos alumnos llaman a la segunda figura diamante, en vez de cuadrado (figura 2).

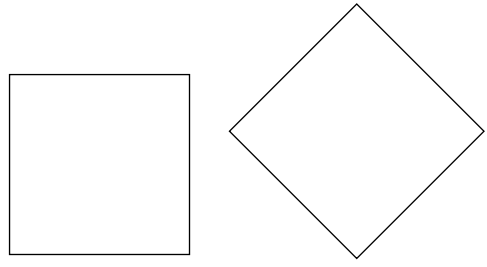


Figura 2. Dos cuadrados

Nivel 2: Análisis de propiedades

Un estudiante puede analizar las figuras en términos de sus componentes, describir sus partes y listar sus propiedades. Se utilizan descripciones más que definiciones. El estudiante descubre o prueba propiedades o reglas de manera empírica (por ejemplo doblando, midiendo, utilizando una cuadrícula o un diagrama). A este nivel, un estudiante se puede dar cuenta de que las dos formas en la figura 2 son cuadrados, pues ambas tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

Nivel 3: Deducción informal

Un estudiante puede entender el papel de las definiciones; puede establecer la relación entre las figuras (por ejemplo, entre cuadrados y rectángulos); puede ordenar jerárquicamente las figuras de acuerdo con sus características; puede deducir hechos de manera lógica de hechos que ha aceptado previamente usando argumentos informales. En este nivel, los alumnos se dan cuenta de que un cuadrado es un caso especial de rectángulo, ya que tiene cuatro lados y cuatro ángulos rectos, las características que definen un rectángulo.

Nivel 4: Deducción axiomática

Un alumno puede entender el significado de la demostración en el contexto de definiciones, axiomas y teoremas. El estudiante demuestra teoremas de manera deductiva a partir de los axiomas o de teoremas demostrados previamente. Algunos enunciados se aceptan como axiomas, esto es, como evidentes y sin necesidad de demostración. Todos los teoremas se derivan de estos axiomas o de teoremas previamente demostrados. Este nivel corresponde a un curso tradicional de geometría formal en el nivel medio superior.

Nivel 5: Rigor

Un estudiante puede entender las relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. El estudiante establece teoremas en diferentes sistemas de postulados, y analiza y compara estos sistemas. Este nivel se alcanza sólo después de que los alumnos han tenido la oportunidad de estudiar tanto la geometría euclidiana como la no-euclidiana en tratados axiomáticos. Esto corresponde a un curso avanzado en la universidad.

Para ayudar a los alumnos a elevar sus niveles de pensamiento, los Van Hiele especificaron una secuencia de cinco fases de aprendizaje: exploración, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, e integración. En la fase de exploración, maestro y alumnos conversan acerca de los objetos de estudio. El maestro aprende cómo los alumnos interpretan las palabras y les proporciona algo de comprensión sobre el tópico que se va a estudiar. Se plantean preguntas y se hacen observaciones que usan el vocabulario y los objetos del tema, y se pone el escenario para estudiar más.

En la fase de orientación dirigida, el maestro secuencia cuidadosamente actividades para que los alumnos exploren y empiecen a darse cuenta de la dirección del estudio, familiarizándolos con las estructuras características. Muchas de las actividades en esta fase son tareas de un paso que requieren respuestas específicas. En la fase de explicitación, los alumnos refinan su uso del vocabulario y expresan sus opiniones acerca de las estructuras inherentes del estudio, basándose en experiencias previas y con mínima guía del maestro. Es esencial que los alumnos hagan las observaciones explícitas. Durante esta fase empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio. En la fase de orientación libre, los alumnos trabajan en tareas que requieren varios pasos o que pueden ser completadas de maneras distintas. Adquieren experiencia en encontrar su propio camino o resolver problemas. Al orientarse a sí mismos en el campo de investigación, muchas de las relaciones entre los objetos de estudio se vuelven explícitas para los alumnos.

En la fase de integración, los alumnos revisan los métodos a su disposición y forman una visión general. Los objetos y relaciones se unifican e internalizan en un nuevo dominio de pensamiento. El maestro ayuda en el proceso haciendo reconocimientos

globales de lo que los alumnos ya saben. Al finalizar la quinta fase, se alcanza el nuevo nivel de pensamiento.

El modelo de Van Hiele fue adoptado en la Unión Soviética entre 1960 y 1964 para investigar el aprendizaje de la geometría y elaborar planes y programas de estudio a nivel primaria (Wirszup, 1976). En los Estados Unidos de América, los investigadores empezaron a prestar atención al modelo de Van Hiele a fines de la década de 1970. Hoffer (1977) describe los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico para ayudar a los maestros a planear la instrucción en geometría. Hoffer (1981) también describe los niveles en un artículo en el que enfatiza que para el aprendizaje de la geometría, además de la demostración, es importante desarrollar habilidades visuales, verbales, para dibujar, lógicas y aplicadas. El libro de geometría para el nivel medio superior de Hoffer (1979) sigue a grandes rasgos el modelo de Van Hiele. Los alumnos primero desarrollan habilidades visuales y gráficas, luego exploran conceptos geométricos, y sólo después empieza el enfoque deductivo. Algunos escritos de los Van Hiele fueron traducidos al inglés y poco después fue publicada una monografía acerca de su modelo (Fuys, Geddes y Tischler, 1984; 1988). Otros investigadores publicaron también artículos relacionados con el modelo por esos años (por ejemplo, Burger y Shaughnessy, 1986). Van Hiele (1986) publicó la versión en inglés de su libro sobre su teoría del aprendizaje.

Poco después, investigadores en España estudiaron el modelo de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). Sin embargo, en 1992 había muy pocos artículos en Latinoamérica que mencionaran los niveles de Van Hiele en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, o materiales didácticos para los que se hubiera usado el modelo como guía para su elaboración. Antes de *La feria* dirigí una tesis de maestría acerca de las fases de aprendizaje del modelo (Rodríguez Luévanos, 1990). Después publiqué un artículo en inglés, haciendo más explícitos los niveles de Van Hiele en diferentes enfoques hacia el teorema de Pitágoras (Flores, 1993).

Investigaciones posteriores han mostrado la necesidad de extender y adaptar el modelo para describir mejor la complejidad del desarrollo del pensamiento geométrico. Por ejemplo, para niños pequeños, Clements y Sarama (2000) incluyen el nivel de pre-reconocimiento, anterior al nivel de visualización. Las investigaciones también han revelado la naturaleza dinámica del pensamiento geométrico de los alumnos (Battista, 2007). Los niveles no son estáticos, sino que los alumnos utilizan razonamiento correspondiente a diferentes niveles en diferentes ocasiones, dependiendo del contexto y de su familiaridad con el tema. Así resulta mejor describir el razonamiento del alumno en una actividad como correspondiente a un nivel u otro, en vez de decir que el alumno está en cierto nivel. En años recientes se han seguido publicando investigaciones relacionadas con el modelo (por ejemplo, Clements y Sarama, 2009). El modelo de Van Hiele ha sido comparado y contrastado con otros modelos de aprendizaje, tales como la taxonomía de estructura de resultados de aprendizaje (Jurdak, 1991). Desde luego, como en el caso de muchas teorías en educación, también ha habido críticas más o menos severas al modelo de Van Hiele (Papademetri-Kachrimani, 2012).

El artículo *La feria* fue publicado cuando yo trabajaba en San Diego State University, pero el origen de las ideas es anterior. El interés de utilizar actividades con materiales concretos para maestros y alumnos surgió mucho antes, cuando tuve la fortuna de participar, como traductor, en los talleres para profesores de matemáticas conducidos por Donovan Johnson en varias ciudades de México en 1978. Después, en la década de 1980, conduje mis propios talleres y cursos de actualización para maestros de matemáticas de secundaria en Guanajuato y otros lugares de México, en los que se incluían temas de aritmética, álgebra y geometría. En San Diego decidí reunir los materiales de estos talleres relacionados con el teorema de Pitágoras, completarlos con algunas actividades adicionales y organizarlos usando el esquema de Van Hiele como guía.

3. EVOLUCIÓN Y DESARROLLO

3.1. Acción, comunicación y reflexión

He resaltado antes la importancia de la acción, la comunicación y la reflexión por parte de los alumnos para que entiendan mejor los conceptos matemáticos (Flores Peñafiel, 1996). En *La feria de Pitágoras*, primero se enfatiza la acción de los alumnos con materiales concretos y otras formas de representación para lograr una mejor comprensión del teorema. En algunos casos, como el *Rompecabezas de Pitágoras*, después de cada actividad se le hacen preguntas al alumno para que verbalice sus descubrimientos y los justifique usando sus propias palabras. Enfatizar el papel de la comunicación es especialmente importante para los futuros maestros. Al comunicar sus ideas, los maestros tienen la oportunidad de organizar mejor su pensamiento, y darse cuenta de lo difícil que puede ser expresar con claridad sus ideas. Los maestros pueden entender mejor la necesidad de dar a los alumnos la oportunidad de comunicar su pensamiento matemático, y no sólo escuchar al maestro. La actividad *Rompecabezas de Pitágoras* consiste en rellenar un contorno con varias piezas geométricas hechas de cartulina (Hall, 1972) (figura 3).

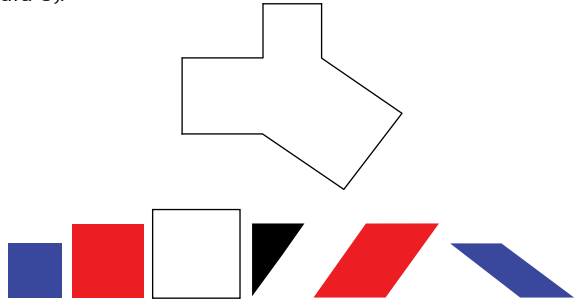


Figura 3. El contorno y piezas para llenarlo

Los futuros maestros explicaron por qué dos piezas de cartón, tales como el paralelogramo rojo y el cuadrado rojo (cuyas bases y alturas miden lo mismo), tienen la misma área. Sus explicaciones revelaron modos de razonamiento matemático correspondientes a diferentes niveles en el modelo de Van Hiele. Por ejemplo, una futura maestra usó pensamiento empírico, correspondiente al nivel 2. Sobreponiendo el paralelogramo sobre el cuadrado, vio que sobraba un pequeño triángulo de un lado (figura 4), y dijo: "Si recortamos este triángulo y lo ponemos del otro lado, veremos que cubre todo el cuadrado".

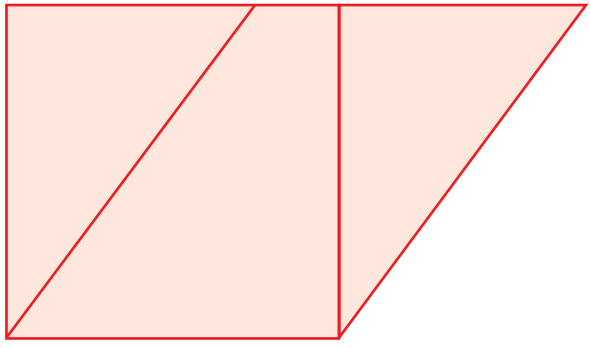


Figura 4. Paralelogramo y cuadrado sobrepuestos

Otra futura maestra utilizó su conocimiento previo sobre la fórmula del área del paralelogramo, y pensamiento deductivo, correspondiente al nivel 3. Ella explicó: "El área del cuadrado es lado por lado, y la del paralelogramo es base por altura. La base del paralelogramo es igual al lado del cuadrado, y la altura del paralelogramo es igual al lado. Por tanto, tienen la misma área". Otros maestros usaron también pensamiento deductivo usando el hecho de que el área total del contorno del rompecabezas no había cambiado, que tres de las piezas usadas eran las mismas, y que sólo se había sustituido el paralelogramo por el cuadrado (figura 5).

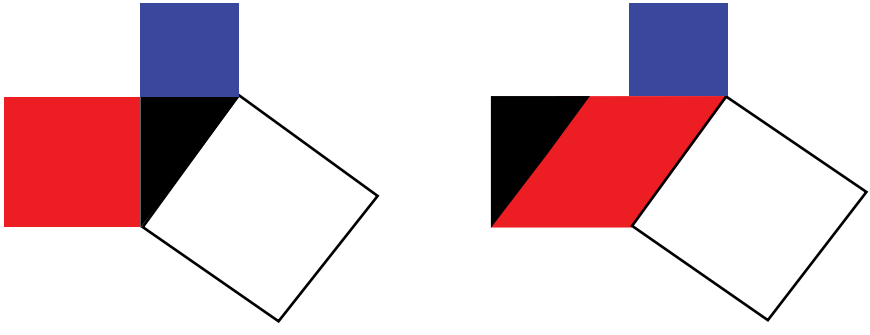


Figura 5. El contorno llenado de dos maneras diferentes

En la última actividad, los maestros utilizaron razonamiento deductivo correspondiente al nivel 3 al argumentar, usando los resultados de actividades anteriores, que el área del cuadrado sobre la hipotenusa era igual que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos. Los maestros habían encontrado que las áreas del paralelogramo rojo y del cuadrado rojo eran iguales (actividades 1 y 2); que las áreas del paralelogramo azul y del cuadrado azul eran iguales (actividades 1 y 3); y que la suma de las áreas de los dos paralelogramos era igual al área del cuadrado blanco (actividades 1 y 4). Usando propiedades de la igualdad tales como la transitividad, concluyeron que la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos era igual al área del cuadrado sobre la hipotenusa. Algunos de los futuros maestros utilizaron su propia notación y representación gráfica para complementar su argumento verbal acerca de áreas iguales (figura 6). En esta notación el signo = se usa para indicar igualdad de áreas.

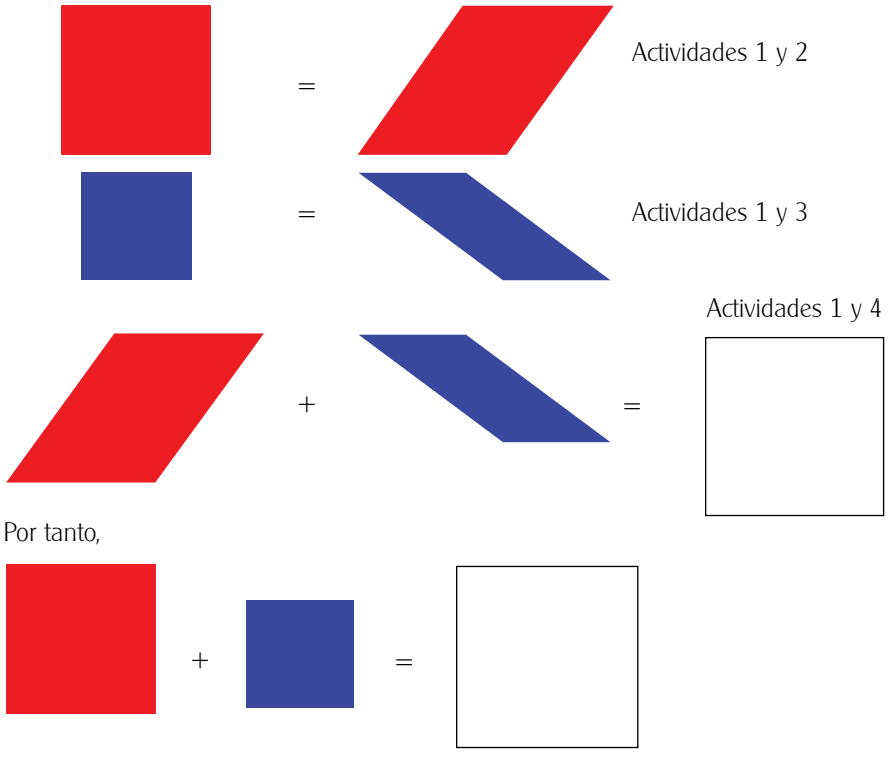


Figura 6. Representación pictórica de un razonamiento deductivo

Para facilitar la reflexión sobre lo aprendido con la actividad, les pedí a los futuros maestros que identificaran el nivel de Van Hiele correspondiente a los diferentes tipos de

argumento para justificar los resultados de las actividades. Los maestros correctamente identificaron los argumentos de tipo empírico como correspondientes al nivel 2, y los argumentos deductivos como correspondientes al nivel 3.

3.2. EXTENSIONES DE *LA FERIA*

A lo largo de los años he continuado trabajando con las actividades de *La feria*, con diferentes grupos de alumnos y maestros, y haciendo extensiones a temas relacionados.

3.2.1. Dos actividades diseñadas por una maestra

La maestra Yun, de Corea, participó en un curso de maestría en Arizona, Estados Unidos, donde conduje algunas de las actividades de *La feria*. En su proyecto para el curso, la maestra Yun desarrolló un enfoque empírico del teorema de Pitágoras para alumnos que utilizan pensamiento geométrico correspondiente al nivel 2. Las actividades fueron publicadas en español (Flores Peñafiel y Yun, 2008) y en inglés (Yun y Flores, 2008). En la primera actividad, los cuadrados sobre los catetos se llenan con una capa de frijoles de goma (figura 7). Luego se quita la cerca que forma el triángulo rectángulo y se deslizan los frijoles para llenar el cuadrado sobre la hipotenusa. En la segunda actividad, los alumnos exploran una extensión del teorema de Pitágoras para semicírculos construidos sobre los catetos y la hipotenusa (figura 8).

Figura 7. Comprobación empírica del teorema de Pitágoras

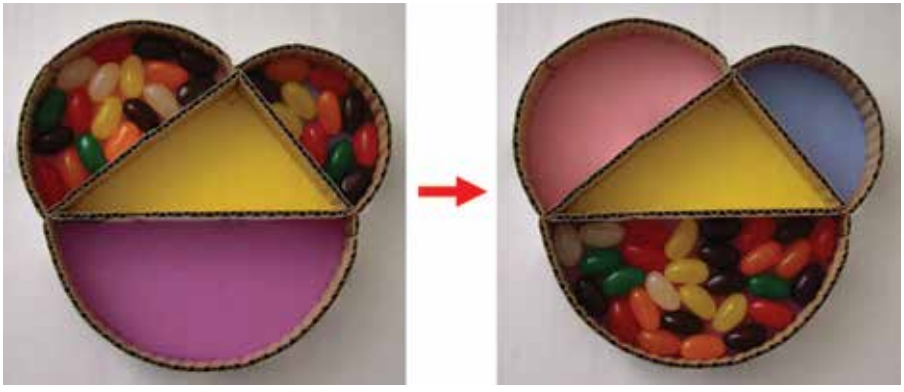


Figura 8. Extensión del teorema de Pitágoras para semicírculos

3.2.2. Semicírculos y otras figuras en los lados

Alumnos de nivel medio superior en Delaware y en Colorado, Estados Unidos, calcularon las áreas de semicírculos en los lados de un triángulo rectángulo, con catetos de longitud a y b, y con hipotenusa de longitud c. Usando el resultado $a^2 + b^2 = c^2$, encontraron que la suma de las áreas de los semicírculos en los catetos era igual al área del semicírculo sobre la hipotenusa $\frac{1}{2}\frac{a^2}{4}\pi + \frac{1}{2}\frac{b^2}{4}\pi = \frac{1}{2}\frac{c^2}{4}\pi$. Al reflexionar sobre el resultado, los alumnos se dieron cuenta de que esta igualdad es un caso particular de la ecuación $ka^2 + kb^2 = kc^2$, que el valor de k depende de qué tipo de figuras semejantes se construyan sobre los lados, y que probar el resultado para un valor de k específico es equivalente a probar el teorema.

En *La feria* se muestra el caso en que el triángulo rectángulo original se divide en dos triángulos semejantes a él por medio de la altura sobre la hipotenusa (figura 9). En este caso, los triángulos se construyen al interior del triángulo, en vez de hacia el exterior. Los alumnos pueden calcular el valor de k para un triángulo dado, ya que $b = c \cos \alpha$ y $h = b \operatorname{sen} \alpha$. El área del triángulo completo es $\frac{1}{2}\, c \times h = \frac{1}{2} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha\, c^2$, de modo que $k = \frac{1}{2} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$.

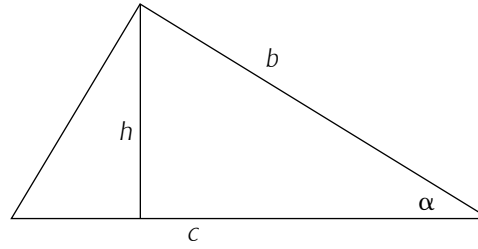


Figura 9. Un caso especial de $ka^2 + kb^2 = kc^2$

Utilizando el resultado para los semicírculos, los alumnos descubrieron que la suma de las áreas de las lunas de Alhazen (figura 10) es igual al área del triángulo rectángulo. Algunos alumnos justificaron su resultado de la siguiente manera. El área del semicírculo sobre el cateto menor es $a_1 + a_2$. El semicírculo sobre el otro cateto tiene área $b_1 + b_2$, y el semicírculo sobre la hipotenusa tiene área $t + a_1 + b_1$. Sabemos que $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = t + a_1 + b_1$, o sea que $a_2 + b_2 = t$. Es decir, la suma de las áreas de las lunas es igual al área del triángulo. Los alumnos expresaron su sorpresa y gusto por el resultado.

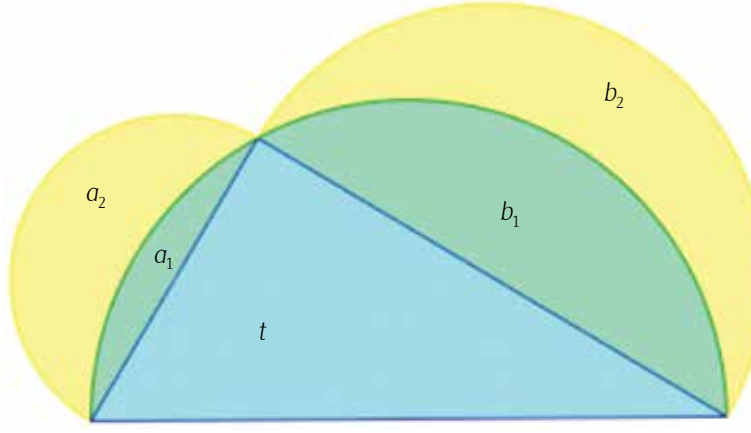


Figura 10. Lunas de Alhazen

3.2.3. Análogo del teorema en la tercera dimensión

La actividad de *La feria* sobre el análogo del teorema de Pitágoras en la geometría sólida, para el caso particular de tres triángulos rectángulos congruentes y un triángulo equilátero, fue conducida con alumnos de nivel medio superior en los años 2013 y 2014.

Los alumnos usaron cuatro triángulos para formar una pirámide con un vértice en el que concurren tres ángulos rectos (figura 11). Encontraron que la suma de las áreas de los tres triángulos rectángulos era mayor que el área del triángulo equilátero, un análogo de la desigualdad del triángulo para superficies. También calcularon los cuadrados de las áreas y encontraron, para este caso particular, un análogo del teorema de Pitágoras para áreas. Si A, B, C denotan las áreas de los triángulos rectángulos y D denota el área del triángulo equilátero, entonces $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$. Para el caso general, en *La feria* se utilizó la demostración de Pólya (1962). Hull (2003) da una demostración alternativa usando proyecciones.

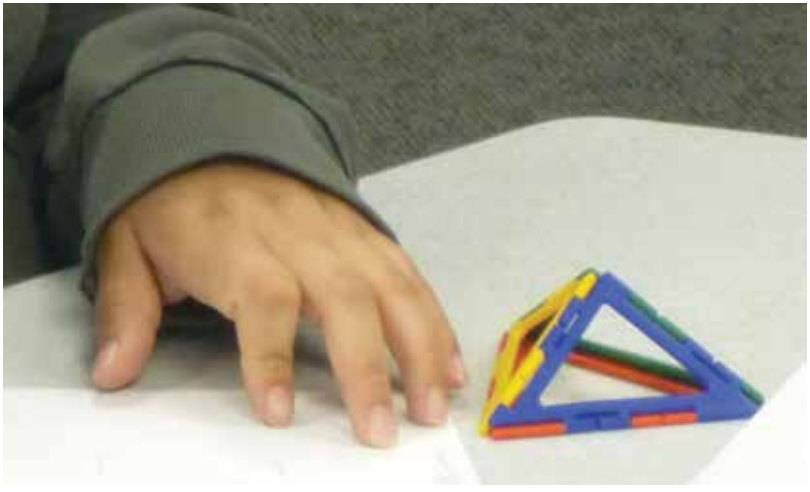


Figura 11. Pirámide con tres triángulos rectángulos

3.2.4. Análogo del teorema en la cuarta dimensión

Las alumnas de nivel medio superior en el campamento *Las Chicas de Matemáticas* (Soto-Johnson y Flores Peñafiel, 2014) exploraron las relaciones entre los volúmenes de los sólidos que se forman al partir un cubo en un tetraedro regular y cuatro pirámides rectangulares. Encontraron que la suma de los volúmenes de las pirámides rectangulares era mayor que el volumen del tetraedro regular. También encontraron que la suma de los cuadrados de los volúmenes de las pirámides rectangulares era exactamente igual al cuadrado del volumen del tetraedro regular.

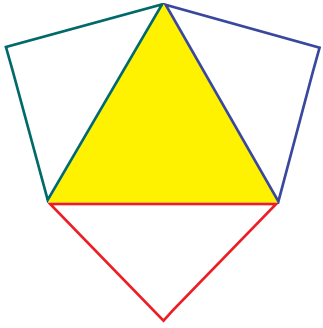


Figura 12. Una red para un tetraedro rectangular

Alumnos universitarios en un curso de geometría para futuros maestros también armaron las figuras, calcularon áreas y volúmenes, y además exploraron representaciones de poliedros tridimensionales en el plano por medio de redes. Después, exploraron el pentatopo, el politopo más sencillo en la cuarta dimensión, compuesto por cinco celdas, y su representación en el espacio de tres dimensiones. En el plano, una red de un tetraedro está compuesta por tres triángulos que rodean un triángulo (figura 12). De manera análoga, en el espacio, una red de un pentatopo está compuesta de cuatro tetraedros que rodean un tetraedro. Una red para el caso particular de un pentatopo rectangular con cuatro tetraedros regulares es un cubo compuesto por un tetraedro regular y cuatro pirámides rectangulares congruentes (figura 13). Si A, B, C y D denotan los volúmenes de las pirámides rectangulares, y E el volumen del tetraedro regular inscrito en el cubo, entonces $A + B + C + D \geq E$, y $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = E^2$. Los alumnos vieron así que los resultados sobre los volúmenes de las pirámides eran, el primero, un análogo de la desigualdad del triángulo para volúmenes de los poliedros que forman un pentatopo de la cuarta dimensión, y el segundo, un caso particular de un análogo del teorema de Pitágoras para la cuarta dimensión (Flores, 2015).

Figura 13. Una red tridimensional para un pentatopo

3.2.5. Ternas pitagóricas

Uno de los ejemplos más impresionantes del grado de desarrollo alcanzado por los matemáticos en la antigua Babilonia es la tableta de ternas pitagóricas conocida como Plimpton 322 (Neugebauer, 1945). Esta tableta fue escrita entre los años 1900 a. C. y 1600 a. C., o sea más de mil años antes de Pitágoras. La tableta, ahora incompleta, contiene números correspondientes a ternas pitagóricas ordenadas como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Dos columnas de ternas pitagóricas*

a	*c*	*n*
119	169	1
3 367	4 825	2
4 601	6 649	3
12 709	18 541	4
65	97	5
319	481	6
2 291	3 541	7
799	1 249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1 679	2 929	12
161	289	13
1 771	3 229	14
56	106	15

Si se completa la columna faltante *b* (tabla 2), se puede ver que los números son más redondos, y también son redondos en el sistema sexagesimal usado por los babilonios. Una actividad con mis alumnos universitarios es completar la tabla con la columna faltante. Los alumnos pueden escribir un programa corto para computadora, a fin de calcular el número faltante de la terna. En un curso de historia de las matemáticas, donde los futuros maestros aprenden acerca del sistema sexagesimal, se pueden escribir los números usando una notación moderna para expresar los números en base sesenta. Así 1,12 representa $1 \times 60 + 12$.

Tabla 2. *Extendiendo las columnas*

base sesenta	*b*	*a*	*c*	*n*	$\text{sen}^{-1}\ b/c$
	120	119	169	1	45.24°
	3 456	3 367	4 825	2	45.74°
	4 800	4 601	6 649	3	46.21°
3,45,0	13 500	12 709	18 541	4	46.73°
	72	65	97	5	47.92°
6,0	360	319	481	6	
	2 700	2 291	3 541	7	
	960	799	1249	8	
10,0	600	481	769	9	
	6 480	4 961	8 161	10	
	60	45	75	11	
	2 400	1 679	2 929	12	
	240	161	289	13	
	2 700	1 771	3 229	14	
1,30	90	56	106	15	

Los números en las columnas *a, b, c* no parecen tener un orden, pero la tableta también incluye las razones c^2/b^2 y estas razones están en orden. Los alumnos pueden calcular las razones *b*/*c* y ver que corresponden al seno de ángulos que difieren en medida alrededor de 1°. Podemos conjeturar que esta tabla era una especie de tabla trigonométrica (Buck, 1980).

En *La feria* se da una fórmula atribuida a Pitágoras para generar ternas pitagóricas. Sin embargo, la fórmula aparece un poco como caída del cielo, sin indicar cómo pudo haber sido descubierta. Una de mis inquietudes ha sido buscar formas en que los alumnos puedan entender cómo un resultado puede ser descubierto y no sólo cómo puede ser probado (Flores, 1992c), y cuando sea posible, presentar pruebas que no solamente demuestren, sino que también expliquen (Flores Peñafiel, 1993). Esta inquietud surgió por mi propia experiencia como alumno de secundaria, cuando fue presentada una demostración del teorema de Pitágoras basada en proporciones entre los lados de triángulos semejantes. Me quedé con la sensación de que, si bien podía yo seguir los pasos de la demostración, no tenía yo la menor idea de cómo a alguien se le había ocurrido utilizar proporciones entre lados de triángulos para probar un resultado sobre áreas de

cuadrados, y me quedó la curiosidad de si era posible encontrar una demostración que usara áreas directamente.

Los alumnos pueden encontrar que una fórmula para generar ternas pitagóricas se puede derivar de conceptos básicos como la media aritmética y la media geométrica (Flores Peñafiel, 2013). La figura 14 muestra la media aritmética de a y b como el radio del semicírculo, y la media geométrica como el segmento perpendicular al diámetro. Tenemos que $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, por lo que $\left(a+b\right)^2 = \left(2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 + \left(a-b\right)^2$. Si hacemos $a = n^2$, $b = m^2$, con n, m números enteros, entonces los números $n^2 + m^2$, $2nm$, y $n^2 - m^2$ forman una terna pitagórica.

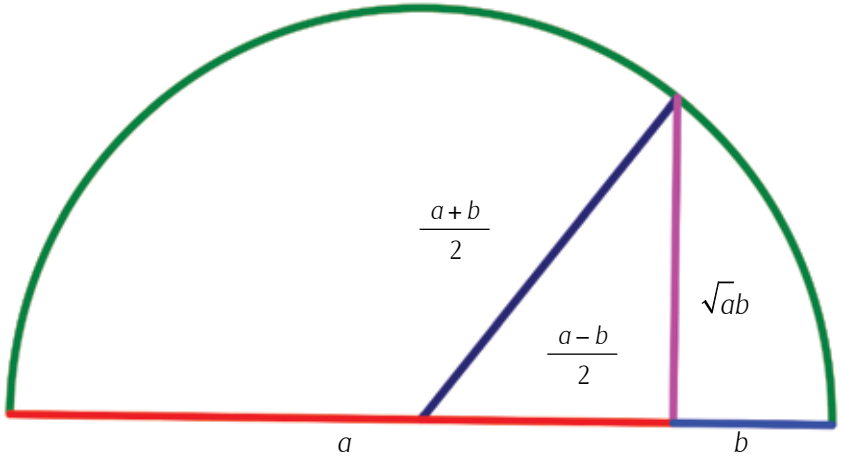


Figura 14. Media aritmética y media geométrica

3.2.6. La ley de cosenos

Siguiendo la sugerencia de Steffe (1990) de usar la ley de cosenos para dar unidad a varios temas de matemáticas, publiqué un artículo en inglés acerca de las conexiones de la ley de cosenos con diferentes tópicos de matemáticas (Flores, 1999). Esta sección está basada en ese artículo con una adición. La ley de cosenos es una generalización del teorema de Pitágoras para un triángulo arbitrario de lados a, b, c. Se tiene que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, donde γ es el ángulo opuesto al lado c. Discutimos la relación de la ley de cosenos con varios resultados que los alumnos aprenden usualmente de manera desconectada. Al igual que en *La feria*, usamos tanto representaciones geométricas como algebraicas.

El coseno de la diferencia de dos ángulos

En el círculo unitario se localizan los puntos (cos α, sen α) y (cos β, sen β) (figura 15). La distancia entre los puntos se puede calcular, por una parte, usando la ley de cosenos $d^2 = 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$, y por otra, usando la fórmula $d^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2$. De aquí se sigue que $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2 = 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$. Desarrollando y simplificando términos se obtiene la expresión $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$.

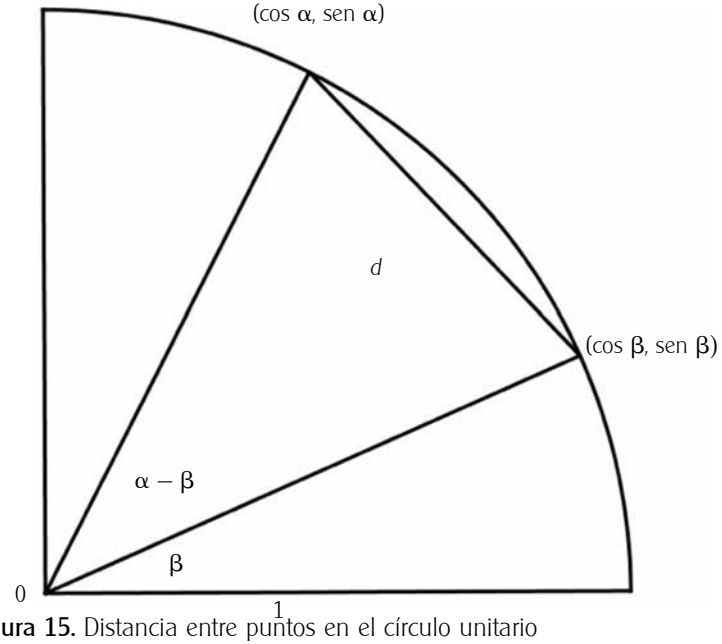


Figura 15. Distancia entre puntos en el círculo unitario

La desigualdad de Cauchy

La distancia entre los puntos P y Q (figura 16) se puede calcular, por un lado, usando la ley de cosenos, y por otro, usando la fórmula para la distancia, de donde $(a - c)^2 + (b - d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}\cos\theta$. De aquí se sigue que $\cos\theta = \dfrac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}}$. Elevando ambos lados al cuadrado tenemos $\cos^2\theta = \cos^2\theta = \dfrac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$. Como $\cos^2\theta \leq 1$ se tiene la desigualdad de Cauchy $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Otra forma de obtener esta desigualdad es notando que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad + bc)^2$. Como $(ad - bc)^2 \geq 0$ se obtiene la desigualdad, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$.

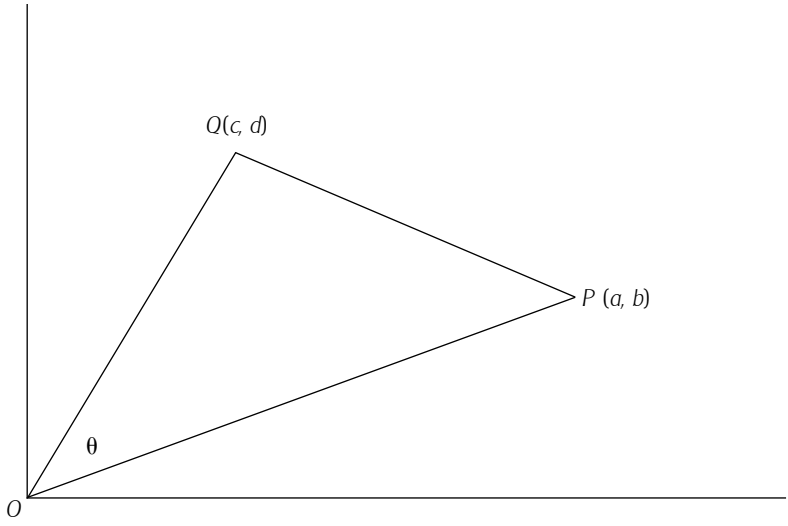


Figura 16. Distancia entre dos puntos

La interpretación geométrica del determinante

La condición para la igualdad en la expresión de Cauchy es que $ad - bc = 0$. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, esto es equivalente a $a/b = c/d$, es decir los puntos O, Q, y P son colineales. La expresión $ad - bc$ es el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Esta matriz representa la transformación lineal del plano que manda el vector (1, 0) a (a, b), y el vector (0, 1) a (c, d). Veremos que el valor absoluto de este determinante representa el área del paralelogramo determinado por el origen, (a, b) y (c, d) en dos formas diferentes. En la primera, partimos de la expresión $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad + bc)^2$. Dividimos ambos lados por $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, $1 = \dfrac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + \dfrac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$. Vimos arriba que $\cos^2 \theta = \dfrac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$, por lo que $\dfrac{(ad - bc)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \operatorname{sen}^2 \theta$, ya que $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$. Se tiene entonces que $(ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \operatorname{sen}^2 \theta$, de donde $|ad - bc| = ||P|| \, ||Q|| \, |\operatorname{sen} \theta|$, que representa el área del paralelogramo (figura 17).

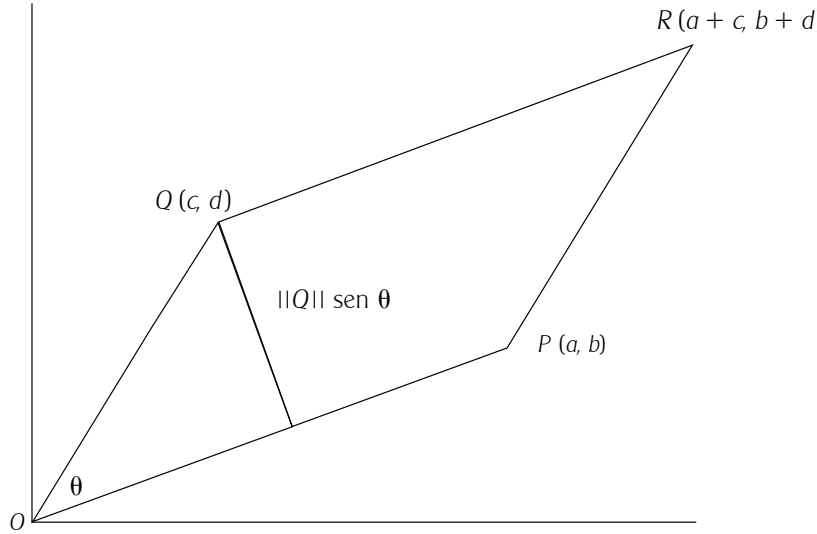


Figura 17. Área del paralelogramo

Para la segunda forma, restamos los triángulos y rectángulos de colores del rectángulo $(a + c)$ por $(b + d)$ (figura 18). Área paralelogramo $= ab + ad + bc + cd - ab - cd - 2bc = ad - bc$.

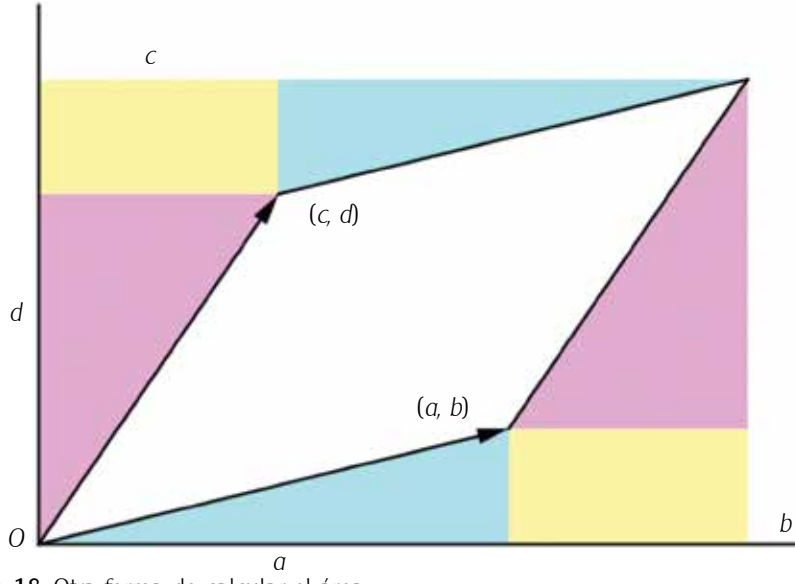


Figura 18. Otra forma de calcular el área

Seno de la diferencia de dos ángulos

Un caso particular del resultado de arriba es cuando los dos puntos están en el círculo unitario (figura 19). Por un lado, el área del paralelogramo puede ser expresado como $1 \times 1 \times \text{sen}(\alpha - \beta)$. Por otro lado, como el valor del determinante $\text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta$, de donde $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha \,\text{sen}\,\beta$.

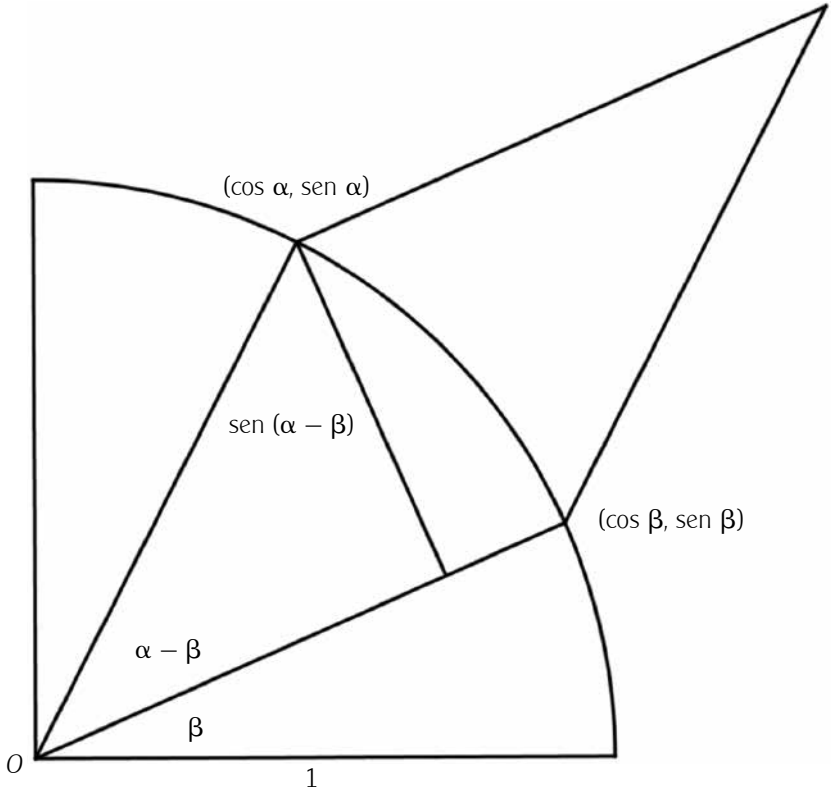


Figura 19. sen $(\alpha - \beta)$

La desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy

Podemos ver que la desigualdad para los lados de un triángulo y la desigualdad de Cauchy son equivalentes. La figura 20 sugiere que OP + PR ≥ OR, esto es, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$. Elevando ambos lados al cuadrado y reduciendo la expresión, obtenemos $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \geq ac+bd$, que es equivalente a la desigualdad de Cauchy.

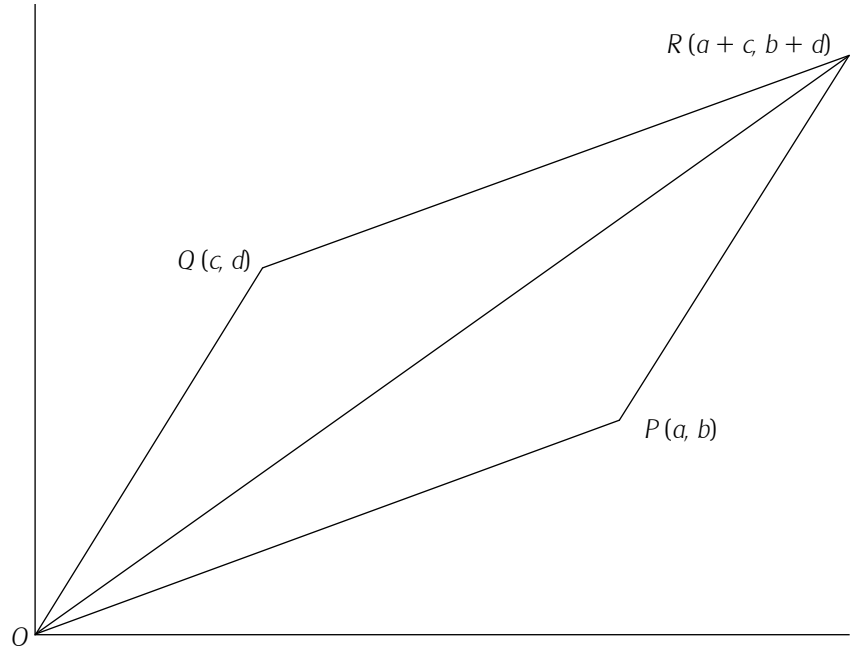


Figura 20. Desigualdad en los lados de un triángulo

El producto interior de dos vectores

Definimos la proyección a_c de un vector $\boldsymbol{a}$ sobre un vector $\boldsymbol{c}$ como $a_c = ||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}_c \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores, y $\boldsymbol{u}_c$ es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{c}$. La proyección de $\boldsymbol{c}$ sobre $\boldsymbol{a}$ está dada por $c_a = ||\boldsymbol{c}||\boldsymbol{u}_a \cos \theta$. La relación entre a_c y c_a está dada por $\frac{a_c}{||\boldsymbol{a}||} + \frac{c_a}{||\boldsymbol{c}||}$ (véase figura 21). Por tanto, $a_c\ ||\boldsymbol{c}|| = c_a\ ||\boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{c}|| = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{c}|| \cos \theta$. El número $||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{c}|| \cos \theta$ se llama el producto interior de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ (Friedrichs, 1965). También se llama el producto punto y se denota por $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

La ley de cosenos se puede usar para expresar el producto interior de dos vectores en términos de sus coordenadas. Por una parte, $||X - Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2 - 2||X||\ ||Y|| \cos \alpha$ (figura 22). Por otro lado, $||X - Y||^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$. Expandiendo los lados derechos y simplificando, obtenemos $||X||\ ||Y|| \cos \alpha = x_1y_1 + x_2y_2$. En muchos libros, el producto interior de dos vectores $X = (x_1, x_2)$ y $Y = (y_1, y_2)$ se define como $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$, sin hacer ninguna referencia a la interpretación geométrica del producto.

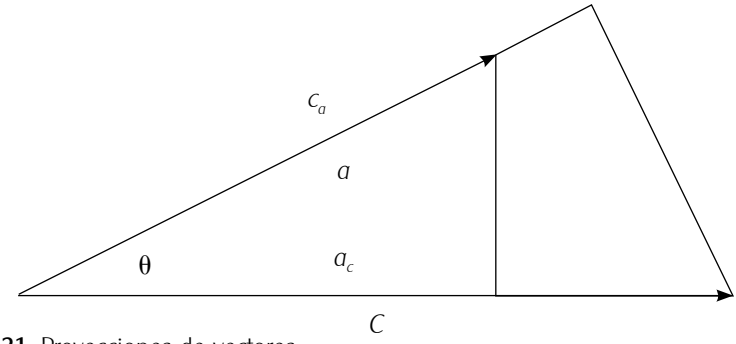


Figura 21. Proyecciones de vectores

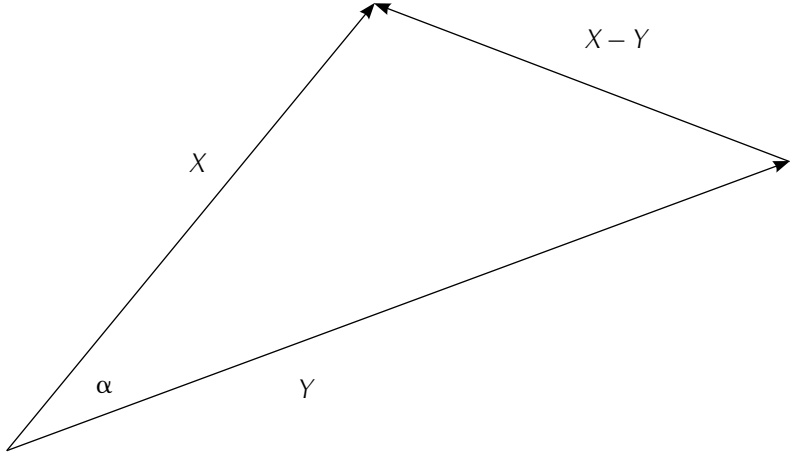


Figura 22. Diferencia de dos vectores

Podemos enunciar también la desigualdad de Cauchy como $\|X\|\,\|Y\| \geq |x_1y_1 + x_2y_2| = |X \cdot Y|$. La ley de cosenos se puede expresar en términos del producto interior, $\|X - Y\|^2 = (X - Y) \cdot (X - Y) = X \cdot X + Y \cdot Y - 2X \cdot Y = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2X \cdot Y$.

En particular, la proyección de un vector unitario (cos β, sin β) sobre otro vector unitario (cos α, sin α) está dada por (cos α, sin α) · (cos β, sin β). La proyección también es igual a cos (α − β) (figura 23). Por tanto, cos (α − β) = cos α cos β + sen α sen β.

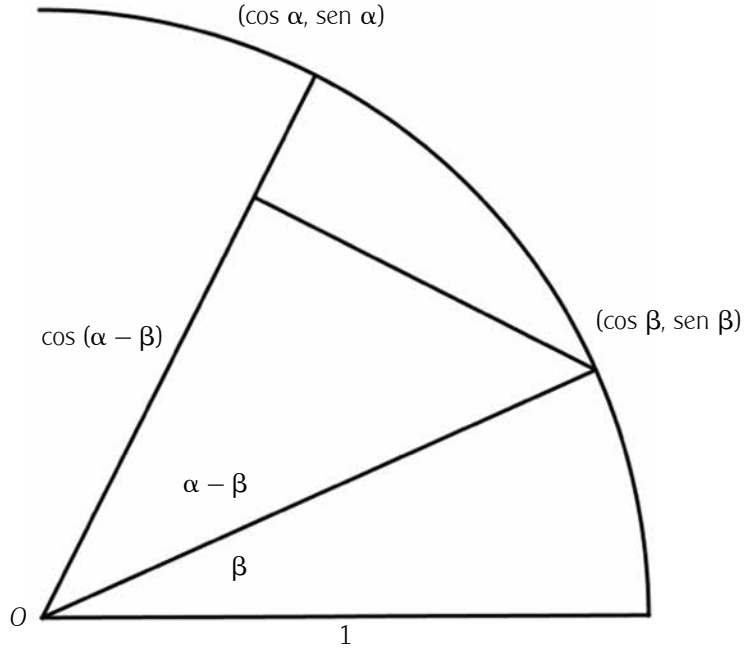


Figura 23. Proyección de vector unitario

4. PÁGINAS INTERACTIVAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

En 1992, el uso de programas interactivos de geometría tales como Cabri y Geometer's Sketchpad estaba apenas en sus inicios. *La feria* no incorpora actividades con este tipo de programas. Actualmente es evidente la importancia de las computadoras y los programas de geometría dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. La utilización de programas interactivos da a los alumnos la oportunidad no sólo de *ampliar* sus capacidades, sino también de *reorganizar* su pensamiento (Pea, 1987). En el ambiente creado por los programas interactivos dinámicos, los alumnos y maestros pueden resolver problemas, experimentar, observar cuáles relaciones cambian y cuáles se mantienen constantes, notar patrones, conjeturar y reunir evidencia (Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín, 2016). Para dar a alumnos y maestros este tipo de oportunidades, he incorporado el uso de programas de geometría dinámica en la enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras. Con el programa gratuito Geogebra, páginas interactivas pueden estar al alcance de todos. A continuación, describimos brevemente algunas relacionadas con el teorema de Pitágoras (Flores Peñafiel, 2017).

La página *Cuatro triángulos bisagras* (figura 24) muestra el cuadrado grande com-

puesto por cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí y el cuadrado sobre la hipotenusa. Los alumnos pueden girar dos de los triángulos sobre las bisagras rojas. El cuadrado grande queda ahora formado por los mismos cuatro triángulos y los cuadrados sobre los catetos. Las figuras usadas en esta página interactiva son semejantes a las usadas por el matemático Bhaskara en el siglo XII en la India.

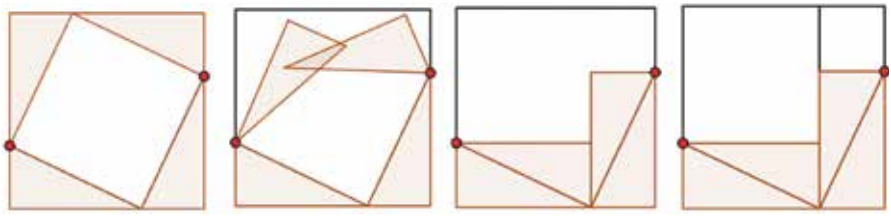


Figura 24. Cuatro triángulos y los cuadrados de los lados

La página *Cuatro triángulos2 bisagras* (figura 25) muestra inicialmente cuatro triángulos rectángulos congruentes, que junto con un cuadrado de lado $b - a$ forman el cuadrado sobre la hipotenusa. Los alumnos pueden girar dos de los triángulos para formar los cuadrados sobre los catetos. El cuadrado inicial es semejante a las figuras usadas en la antigua China relacionadas con el teorema (Swetz y Kao, 1977). El libro antiguo *Zhou bi suan jing* contiene ejemplos para calcular lados de triángulos rectángulos que muestran que el teorema era conocido y utilizado en China desde los tiempos antiguos (Cullen, 1996). Zhou se refiere a la antigua dinastía china (c. 1046 a.C.-771 a.C.).

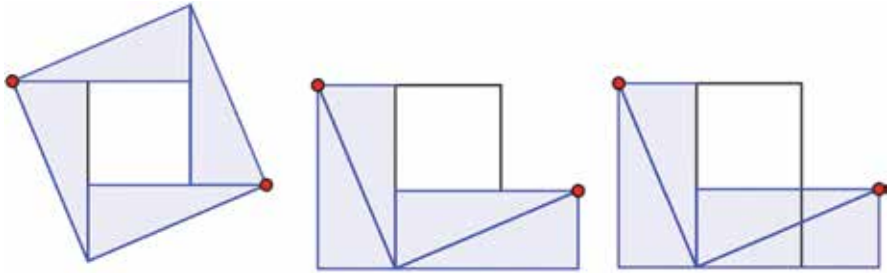


Figura 25. Cuadrado sobre la hipotenusa y cuadrados sobre los catetos

En la página *Dos triángulos bisagras* (figura 26) se muestran dos triángulos rectángulos y un polígono irregular que junto con los triángulos forman los cuadrados de los catetos. Cuando los alumnos giran los dos triángulos 90°, se forma el cuadrado sobre la hipotenusa.

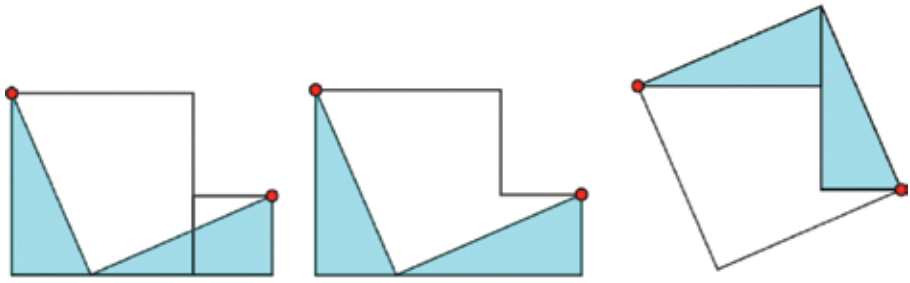


Figura 26. Dos triángulos se giran

La página *Dudeney bisagras* (figura 27) muestra inicialmente el cuadrado sobre el cateto mayor, dividido en cuatro cuadriláteros congruentes. Los alumnos pueden hacer girar tres de estos cuadriláteros moviendo el control deslizante (figura 28). Al final de la rotación de 180°, los cuatro cuadriláteros más el cuadrado sobre el cateto menor forman el cuadrado sobre la hipotenusa (figura 29).

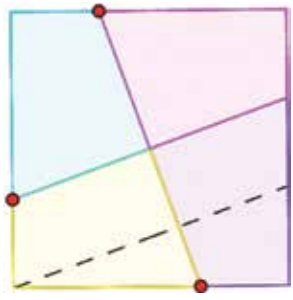


Figura 27. Partición del cuadrado sobre el cateto mayor

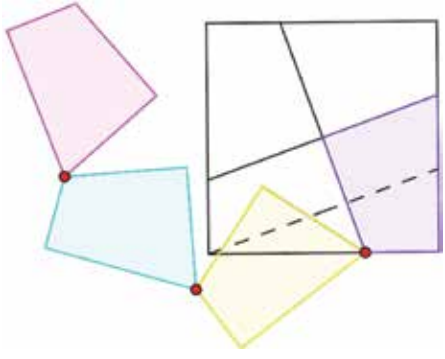


Figura 28. Tres de las partes giran

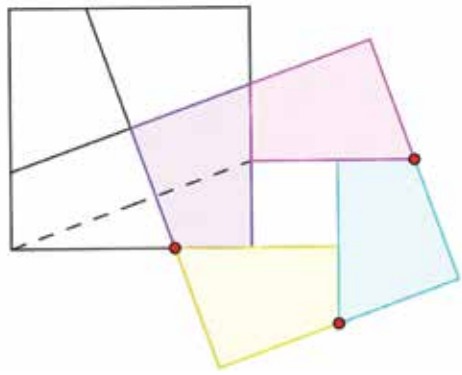


Figura 29. Partición del cuadrado sobre la hipotenusa

La idea de usar bisagras para particiones y recomposiciones de polígonos es de Dudeney (1919), por lo que su nombre se asocia con el uso de bisagras en esta partición del cuadrado sobre el cateto. Autores anteriores usaron esta partición de manera estática (Loomis, 1968, pp. 104-105).

Los alumnos pueden usar figuras con bisagras en otros temas. Pueden establecer conexiones entre las fórmulas para las áreas de triángulos, rectángulos, paralelogramos, trapecios, etc. (Flores, 2009), y pueden interactuar con adoquinados con bisagras para ver dinámicamente transformaciones entre diferentes formas de adoquinar el plano con polígonos (Flores, 2017).

En los dos siguientes ejemplos, los alumnos trasladan figuras geométricas para llenar contornos. En la página *Pitágoras cinco piezas,* los cuadrados sobre los catetos están formados por cinco piezas de colores (figura 30). Los alumnos trasladan las piezas para llenar el cuadrado sobre la hipotenusa.

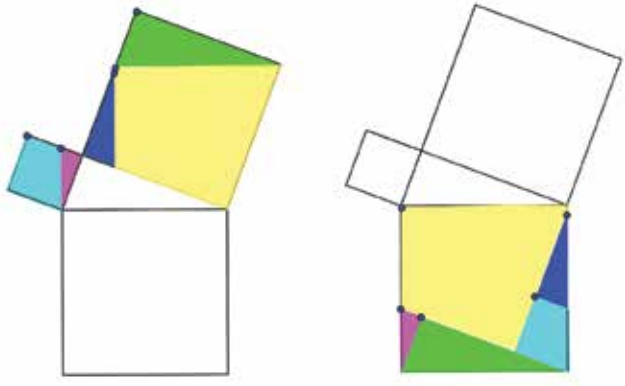


Figura 30. Reacomodando cinco piezas

En la página *Hexágonos dinámicos* (figura 31), los alumnos trabajan con dos contornos hexagonales con la misma área. El primer hexágono, formado un cuadrilátero y su imagen rotada 180°, puede ser llenado por el cuadrado sobre la hipotenusa y dos triángulos rectángulos. El contorno del otro hexágono puede ser llenado por los cuadrados sobre los catetos y los dos triángulos rectángulos.

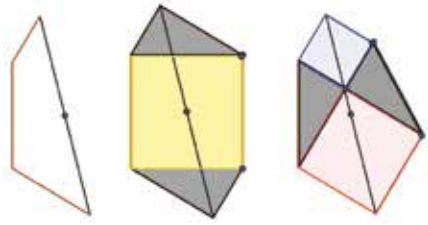


Figura 31. Demostración usando dos hexágonos

La página *Pitágoras rompecabezas* contiene las figuras para armar de diferentes maneras el rompecabezas mencionado antes y así establecer igualdades de áreas.

La página *Pitágoras Dirichlet* (figura 32) sugiere que la cuarta parte del cuadrado sobre la hipotenusa puede ser cubierta por un cuadrado que es la cuarta parte del cuadrado del cateto menor, y cuatro fragmentos que forman la cuarta parte del cuadrado del otro cateto. El patrón geométrico formado por cuadrados de dos diferentes tamaños que cubre un área es parecido a las configuraciones que diseñan los tejedores de esteras en Angola, y que fueron utilizadas por Gerdes (1999) para demostrar el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, Gerdes (p. 77) usa el hecho de que un adoquinado del plano cuya región fundamental está formada por dos cuadrados de diferentes tamaños (cuyos lados corresponden a los catetos), la región de Dirichlet (Coxeter, 1969) correspondiente a la retícula formada por los centros de los cuadrados más pequeños es el cuadrado de la hipotenusa.

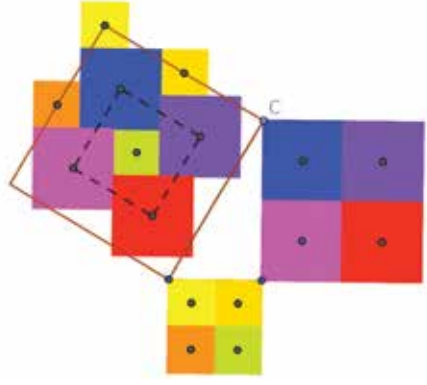


Figura 32. Región de Dirichlet

Desde luego, interactuar con las figuras dinámicas para ver cómo se relacionan las diferentes áreas es sólo el primer paso. Los alumnos deben ser guiados para expresar con sus propias palabras las relaciones que observan, conjeturar y dar argumentos convincentes para justificar sus conjeturas. Para una discusión explícita de los principios matemáticos que subyacen a las demostraciones sugeridas por las figuras dinámicas, véase Flores Peñafiel (aceptado).

5. CONTRIBUCIONES DE OTRAS CULTURAS Y DE MUJERES

En *La feria* se menciona que en la India se conocían ternas pitagóricas tales como 12, 35, 37, y que "los babilonios, dos milenios antes de nuestra era, elaboraron listas de ternas pitagóricas, con algunas ternas tan impresionantes como 3 367, 3 456, 4 825" (Flores, 1992a, p. 83). En el artículo no se menciona si alguno de los enfoques en los que se basan las actividades tuvo su origen en China, la India, Mesopotamia o en otras culturas no europeas. En *La feria*, los únicos matemáticos mencionados por nombre son parte de la cultura griega (Pitágoras, Euclides, Pappus). Es común una parcialidad eurocéntrica en los libros de historia de las matemáticas publicados en las Américas. Al no mencionar explícitamente las aportaciones de matemáticos de otras culturas, contribuimos, consciente o inconscientemente, a perpetuar esta parcialidad. En *La feria* no se menciona ninguna mujer en el artículo y en la lista de referencias sólo aparece un par de mujeres. Es común también que en los libros de matemáticas se mencionen muchos más hombres que mujeres, y que no se enfatice que hoy en día hay muchas mujeres que hacen contribuciones importantes a las matemáticas y su enseñanza.

Darse cuenta de estas parcialidades es especialmente importante para futuros maestros. Un maestro que no cuestione si los ejemplos y referencias del libro favorecen más a un grupo que a otro puede involuntariamente dar a sus alumnos una visión errónea de quiénes pueden contribuir a las matemáticas (Flores y Kimpton, 2012). Si todos los matemáticos mencionados son varones, europeos y ya muertos, los alumnos y alumnas de hoy en día pueden inferir que contribuir a las matemáticas no es para ellos o ellas. En esta mirada retrospectiva he tratado de mencionar explícitamente hombres y mujeres de varias culturas, así como tener una lista de referencias más balanceada, en la que se ve que tanto hombres como mujeres han hecho aportaciones importantes al tema.

6. COMENTARIOS FINALES

La feria de Pitágoras ha mantenido una cierta utilidad a lo largo de los años. Yo sigo utilizando las actividades del artículo con alumnos de diferentes niveles y con maestros en ejercicio o en formación. Antes de que el artículo fuera fácilmente accesible por internet, recibía solicitudes de copias del artículo de maestros en México. He continua-

do trabajando con extensiones del teorema y con otras herramientas de aprendizaje. Espero que en el futuro *La feria de Pitágoras* y los trabajos relacionados sigan siendo de utilidad, y que otros autores continúen extendiendo y mejorando las ideas y enfoques expuestos en *La feria* y artículos relacionados.

Don Quijote dice: "No hay padre ni madre a quien sus hijos le parezcan feos, y en los que son del entendimiento corre más este engaño" (Cervantes, 1979, p. 418). Ojalá los lectores sean comprensivos si he sido indulgente con *La feria de Pitágoras* en esta mirada retrospectiva.

REFERENCIAS

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics thinking and learning* (pp. 843-908). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Buck, R. C. (1980). Sherlock Holmes in Babylon. *American Mathematical Monthly, 87*(5), 335-345.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

Cervantes, M. de. (1979). *El ingenioso hidalgo don Quijote de la Mancha*. Madrid, España: Espasa-Calpe.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 6*(8), 482-488.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, USA: Routledge.

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to geometry* (2nd ed.). New York, USA: Wiley.

Cullen, C. (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: The Zhou bi suan jing*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Dudeney, H. E. (1919). *The Canterbury puzzles*. (2nd ed.). Edinburgh, Scotland: Thomas Nelson and sons. Recuperado de: http://www.gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm

Flores Peñafiel, A. (1993). Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: Pruebas que explican. *Miscelánea Matemática, 19*, 11-23.

Flores Peñafiel, A. (1996). Acción, comunicación y reflexión: Componentes esenciales para entender matemáticas. En M. Santos y E. Sánchez (Eds.), *Perspectivas en educación matemática* (pp. 85-102). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores Peñafiel, A. (2013). Prueba sin palabras: Ternas pitagóricas de las medias aritmética y geométrica. *Eureka, 29*, 6.

Flores Peñafiel, A. (2017). Particiones dinámicas para el teorema de Pitágoras [Applet]. Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/UEQj5gJE

Flores Peñafiel, A. (Aceptado). Páginas interactivas para el teorema de Pitágoras. En C. A.

Cuevas Vallejo, R. G. Cruz Flores y M. Martínez Reyes (Eds.), *Tendencias actuales de la enseñanza de ciencia y las matemáticas. Una perspectiva para investigadores y docentes*. México: Pearson.

Flores Peñafiel, A. y Yun, J. O. (2008). El teorema de Pitágoras con frijoles de goma. *Educación Matemática, 20*(1), 103-113.

Flores, A. (1992a). La feria de Pitágoras (1ª de dos partes). *Educación Matemática, 4*(1), 66-83. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-1/vol4-1-6.pdf

Flores, A. (1992b). La feria de Pitágoras (2ª de dos partes). *Educación Matemática, 4(*2), 62-78. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-6.pdf

Flores, A. (1992c). Ida y vuelta: Primero adivinar, luego probar. *Educación Matemática, 4*(2), 79-96.

Flores, A. (1993). Pythagoras meets Van Hiele. *School Science and Mathematics, 93*(3), 152-157.

Flores, A. (1999). The law of cosines: Connections for future teachers. *PRIMUS, 9*(2), 123-132.

Flores, A. (2009). Area formulas with hinged figures. En T. V. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 297-313). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Flores, A. (2015). Students exploring analogues of the Pythagorean theorem and the triangle inequality in four dimensions. *Mathematics in School, 44*(3), 3-6.

Flores, A. (2017). Hinged tilings. *North American GeoGebra Journal, 6*(1), 1-11.

Flores, A. y Kimpton, K. E. (2012). Multicultural and gender equity issues in a history of mathematics course. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 3*(2), 37-42.

Friedrichs, K. O. (1965). *From Pythagoras to Einstein*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (Eds.). (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York, USA: CUNY, Brooklyn College School of Education. Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED287697.pdf

Gerdes, P. (1999). *Geometry from Africa*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Hall, G. D. (1972). A Pythagorean puzzle. *Arithmetic Teacher, 19*(1), 67-70.

Hoffer, A. (1977). *Geometry and visualization. Mathematics Resource Project*. Palo Alto, California, USA: Creative Publications.

Hoffer, A. (1979). *Geometry: A model of the universe*. Menlo Park, California, USA: Addison Wesley. Recuperado de: https://archive.org/stream/geometrymodelofu00hoff

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 205-227). New York, USA: Academic Press.

Hull, L. (2003). Pythagoras in higher dimensions I: Three approaches. En C. Pritchard. (Ed.), *The changing shape of geometry* (pp. 237-238). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Jurdak, M. (1991). Van Hiele levels and the SOLO taxonomy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(1), 57-60.

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean proposition*. Washington, DC, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Neugebauer, O. (1945). *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Connecticut, USA: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research.

Papademetri-Kachrimani, C. (2012). Revisiting Van Hiele. *For the Learning of Mathematics, 32*(3), 2-7.

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies in mathematics education. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89-122). Hillsdale, New Jersey, USA: Erlbaum.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*, vol. 1. New York, USA: John Wiley & Sons.

Rodríguez Luévanos, R. A. (1990). *El modelo de Van Hiele del desarrollo del pensamiento geométrico: Una experiencia en la Universidad Autónoma de Nuevo León* (tesis de maestría inédita). México: Sección de Matemática Educativa Cinvestav.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L. y Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM, 48*(6), 827-842.

Soto-Johnson, H. y Flores Peñafiel, A. (2014). Las Chicas de Matemáticas 2014. *Eureka, 33*, 13-23.

Steffe, L. P. (1990). On the knowledge of mathematics teachers. En R. B. Davis, C. A. Maher y N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 167-184). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Swetz, F. J. y Kao, T. I. (1977). *Was Pythagoras Chinese?* Pennsylvania, USA: Pennsylvania State University Press/National Council of Teachers of Mathematics.

Van Hiele, P. M. (1959). La pensée de l'enfant et la geometrie. *Bulletin de l'Association des Professeurs Mathematiques de l'Enseignement Public, 198*, 199-205.

Van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend, The Netherlands: Muusses.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Florida, USA: Academic Press.

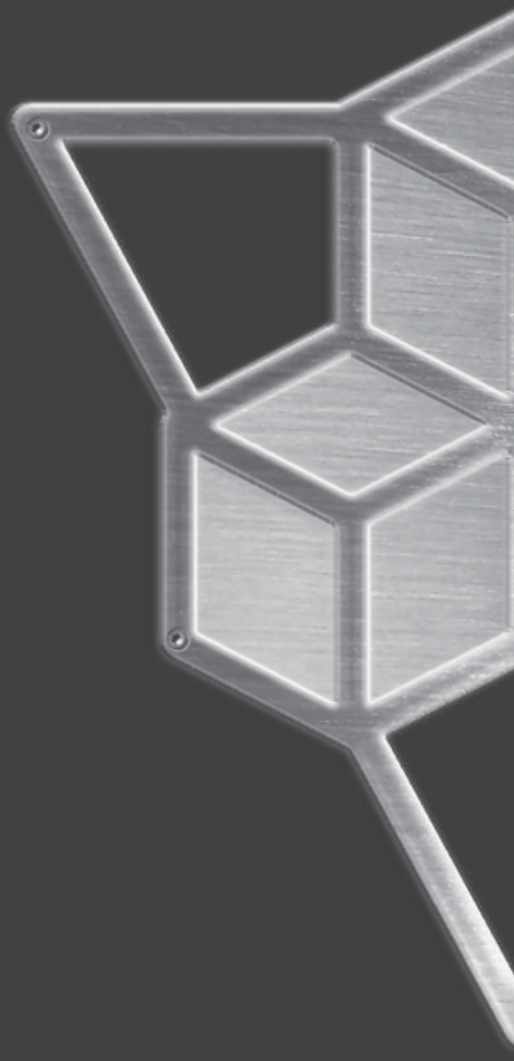
Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J. Martin y D. Bradbard (Eds.), *Space and geometry. Papers from a research workshop* (pp. 75-97). Athens, Georgia, USA: Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Reproduction Service No. ED 132 033).

Yun, J. O. y Flores, A. (2008). The Pythagorean theorem with jelly beans. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(4), 202-207.

Comité evaluador

Luis Manuel Aguayo
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas, México
José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, México
María Fernanda Delprato
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
Ceneida Fernández Verdú
Universidad de Alicante, España
Manuel Goizueta
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Mar Moreno
Universidad de Alicante, España
Paulino Preciado Babb
Universidad de Calgary, Canadá
Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander, Colombia
Avenilde Romo Vázquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA)-IPN, México
Ana Isabel Sacristán
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México
Mario Sánchez Aguilar
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA)-IPN, México
Ernesto Sánchez
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México
Diana Violeta Solares
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Educación Matemática fue la primera revista en español dedicada a difundir la investigación en este campo y este 2018 llegó a sus 30 años de vida. ***Rutas de la Educación Matemática*** es un libro de celebración de estas tres décadas de difusión de trabajos producidos en Iberoamérica. En sus páginas se conjuntan recuentos y reflexiones de un puñado de destacados investigadores que trazan 18 rutas de investigación al mirar con las lentes del presente sus escritos publicados los primeros años de *Educación Matemática*.

En este ejercicio de reflexión y análisis –realizado sobre temas como aprendizaje y cognición, matemáticas y tecnología, enfoques y teorías socio-culturales, interacción y lenguaje en el aula, o desarrollos curriculares–, es posible observar el contexto académico en que se iniciaron los trabajos, los puntos de inflexión y las lecturas y conceptos que determinaron giros en las trayectorias de investigación.

El lector interesado en entender el sentido de la investigación en educación matemática, así como su origen, desarrollo y transformación, tiene en este libro una fuente valiosísima para lograrlo.