

DEL CÁLCULO ORAL AL CÁLCULO ESCRITO: REELABORAR PARA ACCEDER A UNA NUEVA SIGNIFICACIÓN

Alicia Ávila*

RÉSUMÉ

Au Mexique, comme dans tous les pays du tiers monde, des millions de jeunes et adultes n'ont pas eu accès à la scolarité pendant l'enfance. Aujourd'hui selon des données de l'UNESCO et de la CEPAL (Commission Economique pour l'Amérique Latine), il y a 39 millions d'adultes analphabètes en Amérique Latine.

Les personnes qui ne sont pas allées à l'école, développent dans la vie des connaissances numériques et des habilités de calcul chargées de sens qui atteignent souvent une systématité et une efficacité importantes. Pourtant, beaucoup d'entre elles par pression sociale ou simplement par désir de savoir "ce que les autres savent" recourent aux services d'alphabétisation et d'éducation de base pour jeunes et adultes implémentés par les gouvernements ou les associations.

A partir du trajet d'un groupe de jeunes et d'adultes qui ont l'intention d'apprendre l'arithmétique écrite, on analyse l'interaction entre deux types de savoirs : savoir de l'expérience et savoir scolaire. Plusieurs phénomènes ont été constatés : la perte de sens lorsque le sujet se confronte aux écritures numériques ; la persistance de la monnaie comme référence pour l'action de calculer ; la présence constante de procédures propres au calcul oral ainsi que la nécessité de leur réélaboration comme condition d'appropriation significative de l'arithmétique écrite. Les phénomènes observés contredisent une croyance généralisée dans certains pays selon laquelle enseigner les mathématiques scolaires à ces jeunes et adultes est une tâche brève et simple.

ABSTRACT

In Mexico, as in other third world countries, millions of youth and adults had no access to formal schooling when they were children. Statistics from UNESCO and ECLAC (Economic Commission for Latin America and the Caribbean) show that Latin America is home to 39 million illiterate adults.

* Universidad Pedagógica Nacional. México.
aliavi@prodigy.net.mx

During their lifetimes, people without schooling develop profoundly meaningful numerical knowledge and calculating skills that are frequently highly systematic and effective. Yet many of them, yielding to social pressure or simply wanting to know “what everyone else does,” resort to services sponsored by governments or civic associations to eliminate illiteracy and provide a basic education for youth and adults.

In this article, a small group of youth and adults are tracked in their attempt to learn written arithmetic. An analysis is performed of the interaction between two types of knowledge: *experiential* knowledge and school-based knowledge. Observations note a loss of quantitative sense when dealing with written numbers, the persistence of money as the referent of calculations, and the constant presence of oral calculation procedures, as well as the need for restructuring their knowledge as a condition for written arithmetic to be appropriated meaningfully. The phenomena observed run counter to the belief held in many countries that the classroom teaching of mathematics to youth and adults is a brief and simple task.

RESUMEN

En México, como en todos los países del tercer mundo, muchos millones de jóvenes y adultos no tuvieron acceso a la escolaridad en la infancia. Hoy, según datos de la UNESCO y la CEPAL (Comisión Económica para América Latina), hay 39 millones de analfabetos adultos en América Latina.

Las personas que no han ido a la escuela desarrollan en su vida conocimientos numéricos y destrezas de cálculo cargados de significado que con frecuencia alcanzan una importante sistematicidad y eficacia. Sin embargo muchas de ellas, por presiones sociales o con el simple deseo de saber “lo que los otros saben”, acuden a los servicios de alfabetización y educación básica para jóvenes y adultos que los gobiernos o asociaciones civiles implementan.

A partir del trayecto de un grupo de jóvenes y adultos que intenta aprender la aritmética escrita, se analiza la interacción entre dos tipos de saberes: el *de la experiencia* y el escolar. Se constatan varios fenómenos: la pérdida de sentido al enfrentarse a las escrituras numéricas; la persistencia del dinero como referente de la acción de calcular; la presencia constante de los procedimientos propios del cálculo oral, así como la necesidad de su reelaboración como condición de apropiación significativa de la aritmética escrita. Los fenómenos observados contradicen la creencia generalizada en muchos países de que enseñar las matemáticas escolares a estos jóvenes y adultos es una tarea breve y simple.

Key-words: adult education, arithmetic, out-of-school learning, symbolic reasoning, mathematical notation.

I. INTRODUCCIÓN

Es creencia (y práctica) generalizada, que la educación matemática elemental de jóvenes y adultos puede reducirse a un trayecto lineal y cortísimo con base en el cual las personas adquirirán los saberes y los códigos que constituyen la cultura “letrada”. Esta creencia tiene consecuencias: en el caso de México, por ejemplo, se observa últimamente una tendencia a acortar los tiempos en los que las personas pueden obtener certificaciones y se postula que unos cuantos meses serán suficientes para la adquisición de los saberes matemáticos incluidos en la educación básica que se ofrece a este sector de población. La postura es por demás ingenua y desinformada, continúa siendo aparentemente válida gracias al menos a dos razones:

- Muchos de los jóvenes y adultos que asisten a los servicios educativos cuentan con saberes escolares previos que les permiten ser relativamente exitosos en su nuevo trayecto de escolarización;
- En una sociedad que valora los grados por encima de los conocimientos y destrezas, se ofrecen certificaciones que con frecuencia no respaldan la adquisición efectiva de éstos ni el desarrollo de habilidades de ningún tipo.

En contraposición a las creencias antes anotadas, he constatado en el transcurso de la investigación que aquí reporto, que la incorporación de los jóvenes y adultos al uso significativo y funcional de la aritmética escrita es un proceso complejo. La complejidad deriva principalmente del hecho de que entran en interacción los conocimientos previos de las personas y los saberes codificados que pretenden comunicarse. Y es que, en el terreno del cálculo, los jóvenes y adultos han elaborado conocimientos y estrategias de solución cuya lógica luego resulta enfrentada con los que circulan en el ámbito escolar. De ahí que, como ha señalado Carvalho (1997), valga preguntarse si “la relación entre estos dos tipos de saberes refiere a la continuidad o a la ruptura” (p.65). Este es el tema central del escrito. El objetivo es mostrar la interacción entre el conocimiento aritmético desarrollado en la experiencia de vida y el que se adquiere en el ámbito escolar durante un proceso de *alfabetización matemática*. Este encuentro es inevitable. Joia lo ha señalado con notable simplicidad:

“[...] los adultos insisten en recuperar, en el aula, conceptos, procedimientos y nociones matemáticas que construyeron en el espacio cotidiano y de trabajo, independientemente de lo que sus profesores les quieren enseñar”. (Joia, 1997, p. 27).

El reconocimiento de este hecho permitió plantear la hipótesis siguiente: es necesaria una re-elaboración de las viejas formas de operar como condición de adquisición significativa de la aritmética escolar. Tal hipó-

tesis orientó las acciones experimentales que hicieron emerger los fenómenos de los que se ocupa este escrito, y que se exponen conforme al siguiente plan: en primer término, se presentan nuestras concepciones sobre el aprendizaje matemático de los jóvenes y adultos; en un segundo apartado se expone la metodología adoptada así como las condiciones en que se desarrolló la investigación; el subsiguiente inciso se dedica a la exposición de resultados; finalmente se incluye una discusión de dichos resultados.

II. NUESTRAS CONCEPCIONES SOBRE EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO DE LOS JÓVENES Y ADULTOS

Mi postura en relación con el aprendizaje matemático escolar de los jóvenes y adultos tiene varias fuentes. En primer término, se sustenta en los supuestos hoy bien conocidos de las corrientes constructivistas, puesto que:

1. Considero que el conocimiento supone una elaboración por parte del sujeto;
2. Asumo una posición interaccionista conforme a la cual la interacción del sujeto con las situaciones problemáticas provoca conocimiento;
3. Acepto que el conocimiento está determinado no sólo por las situaciones sino también por las estructuras cognitivas del sujeto, es decir, que la vinculación con las situaciones se hace por mediación de las características cognoscitivas de quien aprende y los recursos intelectuales de éste determinan cómo las interpreta y enfrenta.

El conjunto de las afirmaciones anteriores puede llevar a la conclusión de que el constructivismo del cual hablo es el estrictamente piagetano. Sin embargo, tales ideas son apenas una explicación parcial de la postura asumida. Según la aproximación que Piaget privilegió, el saber tiene su origen en la acción del sujeto sobre el objeto, en un movimiento circular entre el cognoscente y el objeto: la experiencia con el objeto modifica al sujeto y, una vez éste modificado, el objeto se modifica. Dicha posición, a la vez que válida, me parece insuficiente para explicar e impulsar en los jóvenes y adultos la *apropiación* del saber matemático escolar, puesto que la interacción con otros interlocutores – según postulan las corrientes socio-constructivistas¹ y según ha sido confirmado por

1. Mediante la expresión corrientes socio-constructivistas me refiero a aquéllas que conceden un papel esencial y benéfico a las interacciones sociales

algunos investigadores de la educación de jóvenes y adultos (por ejemplo Carvalho, 1995) – colabora también de manera esencial en dicha *apropiación*.

La aceptación de esta doble aportación hace útil una precisión: las corrientes socio-culturales postulan que la inter-subjetividad precede a la intra-subjetividad, tal como lo planteó Vygotsky (1994). La postura asumida en este trabajo no refiere a dicho orden. Se considera que la interacción con la situación deberá preceder a la discusión; la primera ofrece el “conflicto” que obliga a la reelaboración; la segunda tendrá como tema los procedimientos desarrollados, las dificultades enfrentadas y las soluciones construidas. De este modo, la discusión, precedida de la acción sobre la situación, favorecerá la reelaboración de los conocimientos previos y la apropiación de los saberes previstos.

Ahora bien, en relación con el aprendizaje matemático de los jóvenes y adultos, parto del hecho de que la escritura matemática convencional tiene un alto valor social reconocido por las personas que asisten a un proceso de alfabetización matemática, pero también un valor real. En el caso de los algoritmos, la escritura permite operar eficientemente con números que no se prestan a cálculo mental, ofrece modelos que son útiles para resolver todos los casos, permanecen sobre el papel (son recuperables) y, además, pueden automatizarse. Asumo por otra parte que quienes asisten a un proceso de apropiación de la aritmética escrita cuentan con concepciones y estrategias de resolución construidas en la experiencia de vida (en adelante experiencia) que les han servido de herramienta para enfrentar los problemas propios del ámbito cotidiano y laboral.

En efecto, gracias al conjunto de los trabajos realizados en la región latinoamericana, sabemos de la habilidad de cálculo que es posible desarrollar en la experiencia; también de la lógica con que dicho cálculo funciona. Todas las investigaciones han llegado a una conclusión común: los adultos analfabetos o con escasa escolaridad enfrentan (con mayor o menor eficacia) los problemas matemáticos que la vida les plantea y lo hacen con una lógica coherente y peculiar; esto es, con una lógica que muestra regularidad, sistematicidad y rasgos que la distinguen de la matemática escrita (Mariño, 1983; Avila, 1989 y 1990; Carraher, Carraher y Schlieman, 1991; Soto, 1992; Delprato, 2002); adelante se exponen algunos de estos rasgos. En relación con el saber escolar, las afirmaciones derivadas de los distintos estudios también son

en el desarrollo cognitivo y la construcción del conocimiento. A.N. Perret-Clermont (1984) y a W. Doise y G. Mugny (1981) se cuentan entre los representantes destacados de dichas corrientes.

coincidentes: la que se ofrece en la educación de adultos es una matemática ajena, memorística y sin sentido, mucho menos significativa y flexible que la que se construye en la vida.

No obstante la relevancia (reconocida) de tales hallazgos, poco se ha hecho para cambiar las cosas en la educación matemática formal de los jóvenes y adultos. Este trabajo tiene como ambición arrojar luz sobre el encuentro entre los dos tipos de conocimiento matemático: el construido en la experiencia y el escolar. Específicamente, se busca documentar la interacción entre el cálculo oral y el cálculo escrito.

La expresión *cálculo oral*, deriva – por analogía – de la utilizada por los antropólogos para referir a las culturas ágrafas, las que no tienen escritura (Ong, 1996). Esta expresión aquí es utilizada como un genérico, sirve para nombrar en su conjunto al sistema de cálculo que se construye en la experiencia de vida; se apela a esta expresión – y no a la de cálculo mental – para destacar la existencia de un sistema de cálculo construido al margen de la escuela, que obedece a ciertas reglas y prescinde de la escritura. El cálculo mental, tal como se entiende en este trabajo, refiere simplemente a prescindir del lápiz y el papel cuando se realizan operaciones específicas; constituye una herramienta del cálculo oral que puede también ser practicado por quienes conocen la escritura. Un ejemplo de las formas propias del cálculo oral probablemente no utilizada por quienes cuentan con la escritura simbólica, es la realización de la multiplicación a la manera de los antiguos egipcios, mediante duplicaciones sucesivas (cf. Avila, 1990; Mariño, s/f y 1997; Knijnik, 2006).

Como apunté ya en la introducción, cabe la hipótesis de que los conocimientos y formas de operar en el ámbito cotidiano puedan constituir un obstáculo para la adquisición de los procedimientos y formas de la matemática escrita propia de la escuela, pues el *cálculo oral* y el cálculo escolar en muchos sentidos corren por vías distintas, y no son pocos los puntos en que éstas son opuestas. Valgan al respecto los siguientes señalamientos:

1. En el cálculo oral siempre están en mente cantidades (litros, naranjas, dinero), mientras en el cálculo escrito se puede proceder sin referencia a contexto alguno.
2. Mediante cálculo oral, se suma considerando primero las cifras de mayor valor relativo (primero los miles, luego los cienes...), mientras en el cálculo escrito se procede a la inversa, comenzando por las cifras de menor valor relativo (primero las unidades, luego las decenas...).
3. En el cálculo oral, se resta sin descomponer las cifras implicadas y mediante un razonamiento aditivo: “lo que falta para”,

mientras que con el lápiz y papel, se descomponen los números y se restan primero las unidades, luego las decenas...

4. En el cálculo oral, las personas con un cierto nivel de destreza, multiplican mediante duplicaciones sucesivas, mientras que el cálculo escrito correspondiente se sustenta en la descomposición de las cifras y la propiedad distributiva.
5. En el cálculo oral, la estimación y los indicadores del contexto juegan un rol fundamental en la ponderación y control de los resultados.
6. En el cálculo escrito, es fácil que la significación se pierda ya que, en estricto sentido, para operar no se hacen necesarias ni la estimación ni las referencias al contexto.²

La aritmética no es sólo cálculo, empero, me he centrado en la simbolización y los procedimientos de cálculo y hay una razón para ello: coincidido con Carvalho (1997) en que

“incluso si se considera que la matemática no se restringe a representaciones numéricas, la cuantificación, su representación, aunque sólo sea oral, y las operaciones que se realizan con esa cuantificación, son parte importante del conocimiento matemático que cualquier grupo cultural desarrolla”. (p.66)

Aún más allá, a mi entender, la tarea fundamental en la alfabetización matemática de jóvenes y adultos no es enseñar a resolver problemas (eso dentro de ciertos límites las personas lo hacen), la tarea es contribuir a la comprensión y uso funcional de la matemática escrita porque, como se ha señalado – (Knijnik, 1997; Delprato, 2002) – desde el punto de vista social vale más,

“porque de su aprendizaje puede depender, por ejemplo, el acceso a un empleo más calificado o mejor remunerado o la realización de sus actividades productivas en niveles más competitivos” (Knijnik, 1997, p. 45).

Se trata entonces de reelaborar las formas de cálculo propias del pensamiento no escolarizado para acceder al escolarizado. Al respecto supongo la pertinencia de situaciones y tareas que provoquen la reelaboración de las estrategias y nociones previas como resultado de dos cosas:

1. Las interacciones con las situaciones-problema y tareas planteadas, y
2. La interacción y colaboración entre los miembros del grupo en torno al objetivo previsto, incluyendo las establecidas con un *interlocutor más capaz*: el conductor del proceso de aprendizaje.

2. Un desarrollo de las afirmaciones anotadas en 1, 2, 3, 4 y 5 puede verse en Avila, 1989, 1990 y 1997.

Ahora bien, el reconocimiento de las formas de calcular construidas en la vida conduce a señalar que la alfabetización matemática, en tanto que proceso institucional, consiste no tanto en enseñar conceptos, procedimientos y estrategias, como en favorecer un acceso comprensivo y funcional a la matemática escrita. La noción, como yo la entiendo, alude a la apropiación de las escrituras numéricas y a las formas de operar con tales escrituras, nunca a la idea de que las personas no escolarizadas carecen de conocimientos matemáticos. Las siguientes palabras, pronunciadas por un analfabeto brasileño en el marco de un proceso de alfabetización, expresan bien el sentido que otorgo a la alfabetización matemática: “Las cuentas que tú me pides yo sé hacerlas todas... pero yo no tengo la malicia del lenguaje” (Ferreira-Reis Fonseca, 2003, p. 33).

Sobre la base de tales concepciones, las situaciones planteadas en la investigación no constituyeron en sí mismas retos importantes en términos relacionales sino, sobre todo, situaciones con las que se hacía necesario interactuar utilizando los códigos propios de la matemática escolar:

- Al leerlas e interpretarlas;
- Al resolverlas;
- Al registrar y comunicar los resultados obtenidos.

III. CONDICIONES Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

1. Objetivos de la investigación

Los hechos que sustentan nuestro análisis tuvieron lugar en el marco de un proceso de *alfabetización matemática* realizado directamente por quien esto escribe. En los nueve meses que duró el proceso se abordaron diversos temas, aquí me referiré exclusivamente a problemas de suma y resta así como a la escritura de los procedimientos de cálculo.

La reflexión en torno a la relación *saber de la experiencia* -*saber formal*, ha vislumbrado varias opciones para hacer transitar de uno a otro ámbito: la elaboración de puentes comunicantes entre uno y otro saber (Ávila y Waldegg, 1997); un movimiento de ida y vuelta entre la escuela y la comunidad (Knijnik, 2003); construcción de una escritura para los conocimientos que las personas ya poseen (Mariño, s/f); el diálogo cultural que refiere a la creación de una escritura institucional que incluya elementos de ambas culturas (Mariño, 1997); el privilegio de las escrituras espontáneas de los aprendientes (Carvalho, 1995 y 1997). Sin embargo, son sólo las propuestas de Mariño o la de Carvalho las que se han documentado ampliamente. El primero habla de su propia postura en los siguientes términos:

“Diez años después [de haber implementado una escritura para el cálculo oral] vemos con claridad que nos encontrábamos deslumbrados por el descubrimiento de los saberes populares y que llegábamos a valorarlos tanto que asumíamos una posición aislacionista. Quizás nuestra terquedad no fue más que la expresión de un período histórico, donde requeríamos a toda costa darle identidad a los sectores populares para compensar las desigualdades sociales” (Mariño, 1997, p.81).

En la educación de adultos, continúa Mariño, también existe otra posición que se podría enmarcar dentro de lo que se denomina “diálogo cultural”:

“En términos de educación matemática, el reto consistiría en diseñar sistemas de notación numérica o algoritmos, para la suma por ejemplo, que retomando las estrategias contenidas en los saberes previos las calificara con los aportes de la matemática estatuida” (Mariño, 1997, p. 80).

Es así que, en un segundo acercamiento, Mariño propone materiales sustentados en procedimientos escritos “híbridos”. De este acercamiento – respecto al cual se muestra optimista – afirma que se tiene un largo camino por recorrer y muchas cosas por mejorar y modificar (Mariño, 1997, p. 100).

Carvalho, con una perspectiva también dialogante pero bastante distinta de la precedente, desarrolla su investigación bajo el supuesto de que:

“Estudiar la interacción entre el saber de la práctica y el escolar, sólo sería posible a partir del estudio de los procedimientos propios que los estudiantes jóvenes o adultos traen al salón de clases” (Carvalho, 1997, p. 67).

Dicho supuesto conduce a privilegiar los procedimientos y escrituras espontáneas durante un proceso de adquisición de la matemática escrita. Pero en sus conclusiones Carvalho afirma que “las personas participantes no tenían interés ni encontraban sentido a registrar sus propias estrategias de solución, ya que no le veían necesidad práctica y no comprendían los motivos académicos” (Carvalho, 1995, p. 224).

En este trabajo decidí enfrentar a los participantes con los procedimientos convencionales y su escritura, sin promover en el registro gráfico institucional la incorporación de elementos de los procedimientos espontáneos como sugiere Mariño, ni privilegiar la representación gráfica de estos últimos, como propone Carvalho. No por negar dichas formas de operar, sino bajo el supuesto de que son los propios de la matemática escrita convencional con los que las personas deberán interactuar en una sociedad letrada, y porque “son esos los que las personas quieren aprender” (Mariño, 1995; Delprato, 2002). En efecto, por una parte coincido con la afirmación de que

“los adultos [y los jóvenes] llegan a la situación de aprendizaje formal con una historia cognitiva y afectiva mucho más avanzada que la de los niños, y que las diferencias ‘culturales’ son por lo tanto mucho más

acentuadas en el adulto que en los niños, así como sus ‘resistencias’ sociales y sus actitudes [hacia lo escolar]” (Barth, 1996, p. 27).

Pero sé también que el encuentro con lo escrito no se vive de la manera que lo viven los niños, estos últimos

“aceptan hacer dibujos, bosquejos y escrituras alternativas como parte de su proceso de aprendizaje mientras los jóvenes y adultos no” (Carvalho, 1995, p. 226).

Y es que éstos saben que si escriben las cuentas “a su propia manera”, están mostrando un déficit en relación con las formas que deberían saber utilizar. Así pues, el trabajo experimental que permite este análisis apoyó la apropiación de las escrituras numéricas y los procedimientos de cálculo convencionales con el enfoque descrito en el apartado II; dicha experimentación permitió a su vez analizar los fenómenos producidos con la interacción entre los dos tipos de saber en juego y que constituyen el tema de este escrito.

2. Nuestros datos

El proceso de *alfabetización matemática* que nos ocupa – sin duda condicionado por nuestras opciones didácticas – hizo emerger diversas cuestiones: sobre la pertinencia de las opciones didácticas, las fortalezas y debilidades de las situaciones y materiales elaborados, la formas de interacción en el grupo; o sobre las motivaciones y vida personal de los participantes. Sin embargo el foco de este texto lo constituyen los fenómenos producidos por la interacción entre el cálculo oral y el escrito durante el proceso de apropiación de este último.

Las escrituras, el cálculo en voz baja y las interacciones entre los participantes durante sus intentos de comprensión y uso de las escrituras aritméticas nos fueron útiles como índices de sus acercamientos a éstas últimas. Los elementos para analizar dichos acercamientos se tomaron tanto de las estrategias propias del cálculo oral que la literatura ha reportado, como de las propiedades del sistema decimal que permiten el funcionamiento de los procedimientos mentales o escritos. En la última parte del escrito se analiza el cambio de interacción entre los dos saberes cuando los problemas de resta pasan de la noción de “quitar” a la de “completar”. En este caso, el análisis se hace recuperando la explicación que Descaves (1999, cit. por Peltier, 2003) da a la diferencia de dificultad entre una y otra noción y que se expone adelante.

Los episodios seleccionados para sustentar nuestras afirmaciones incluyen interacciones previas y posteriores a las que corresponden estrictamente a la interacción entre los dos cálculos, casi siempre expresada por uno de los miembros del grupo. Esto se hizo con un fin que metodológicamente consideramos correcto y que expresamos en palabras de Artigue (1986, p. 53): “Insertar los fenómenos observados en una trama de hechos que guían su interpretación”. Con el mismo fin se

incorporan informaciones sobre el tratamiento didáctico de los diferentes temas.

El apoyo de un observador los primeros meses de trabajo y el de la alfabetizadora en los siguientes, fue un ayuda esencial para conservar las huellas del proceso el cual, salvo contadas sesiones, fue registrado mediante audio-grabación y notas. Se registraron también las producciones individuales de algunos de los participantes. Se intentó recuperar las hojas de trabajo para conservarlas como evidencias, pero esto se logró en escasa medida ya que un sentimiento de intimidad vinculaba a los asistentes con aquéllas.

3. Nuestras decisiones didácticas

La temática predominante en los problemas seleccionados fue la del intercambio comercial y el manejo del dinero. Este contexto se consideró conveniente para el proceso de alfabetización matemática, puesto que según diversos investigadores han señalado (Mariño, 1983; Carraher, Carraher y Schilemann, 1987; Avila, 1989 y 1990; Carvalho, 1995) es a la vez que fuente primordial del cálculo oral, ámbito privilegiado de aplicación del mismo. Lo anterior no significa que el aprendizaje formal de las matemáticas deba limitarse a esto, es incuestionable la necesidad de llevar a las personas más allá de lo que les es conocido, pero por una parte nuestra intención era precisamente transitar a lo convencional a partir de lo conocido. Por otra parte, la educación básica consta de varios ciclos más allá de la *alfabetización* y es a lo largo de ellos que ha de dosificarse una ampliación de horizontes.³

Bajo la hipótesis de que en la alfabetización matemática el problema es de escritura más que relacional, se incorporaron problemas similares a los que – por investigaciones previas – sabemos son frecuentes en la actividad cotidiana y que corresponden a las siguientes nociones: agregar y juntar para el caso de la suma; calcular un sobrante, completar y comparar para el caso de la resta. Este tipo de problemas corresponderían a las tres primeras categorías definidas por Vergnaud (1981), pero el criterio de inclusión fue el antes expuesto, no su correspondencia con esta categorización.

En relación con el campo aditivo, se diseñó entonces un conjunto de situaciones que favorecieran la resolución de problemas sencillos para cuya solución se implicase alguna de las nociones antes señaladas. Las siguientes son características de las situaciones planteadas:

3. En un trabajo previo, realizado en colaboración con G. Waldegg (Avila y Waldegg; 1997), se propuso una dosificación en tal sentido.

1. Se presentaban mediante anuncios y/o ilustraciones de supermercados, mercados, tiendas, calles, paradas de autobús, estaciones del metro... en los que aparecían números con distintas funciones y a partir de los cuales se derivaban los problemas.
2. Los números incorporados correspondían a situaciones y precios reales.
3. En tanto que material manipulable se utilizaron *billetes* y *monedas* de papel con valores correspondientes a los que estaban en circulación; se incluyeron además otros modelos decimales: regletas tipo Dienes y ‘paquetes de dulces’.

Por lo general, se entregaban materiales impresos individuales y se ponían a disposición los manipulables mencionados. La interacción grupal se apoyaba con escrituras públicas en el “pizarrón”.

A partir de una situación se resolvían algunos problemas utilizando cálculo mental y luego se resolvían otros mediante cálculo escrito. Las más de las veces, cuando el objetivo era acceder a la escritura (convencional) de un cierto cálculo, la conductora explicaba el procedimiento contrastando la forma propia del cálculo oral con la nueva forma de calcular. Posteriormente se trabajaba con el material impreso, ahí se incluía la leyenda: “Cuando escribimos calculamos así...” la cual precedía a la presentación del procedimiento convencional de cálculo en juego. La lectura e interpretación del procedimiento era apoyada por la conductora. A excepción de la actividad inicial con la suma – que se describe adelante – las tareas de cálculo se incorporaron después de haberse trabajado el sistema decimal de numeración.

Lo más común era que se invitara a revisar mediante cálculo mental los resultados obtenidos por escrito. Fue frecuente que de manera espontánea los participantes lo hicieran, también que utilizaran los billetes y monedas para obtener las soluciones o para comprobarlas cuando los cálculos se hacían más complejos, principalmente en la resta con des-agrupación. Las regletas o “paquetes de dulces” rara vez fueron utilizados espontáneamente por los participantes.

La promoción de la interacción y colaboración entre los miembros del grupo derivó de los supuestos conceptuales mencionados en el apartado II. Esta forma de trabajo se vio favorecida por el tamaño del grupo y a la disposición física de los participantes, ya que todos se sentaban alrededor de una única mesa. Por supuesto, también había momentos de trabajo individual. En cada una de las sesiones, el papel principal de la conductora consistió en promover la interacción con las situaciones-problema y, en un segundo momento, entre los miembros del grupo.

4. El espacio y la forma de trabajo

El modelo más extendido de alfabetización en México se sustenta en la constitución de círculos (pequeños grupos) de jóvenes y adultos que asisten a solicitar el servicio y que participan en el proceso bajo la coordinación de una persona sin formación específica para ello; por lo general, quienes coordinan el trabajo en los círculos, son jóvenes que han concluido la secundaria o la preparatoria;⁴ también se incorporan a esta tarea algunos jóvenes que cubren de esta manera su “servicio social” al concluir sus estudios profesionales; el papel que se les otorga oficialmente es el de asesor del proceso de aprendizaje y no el de profesor. Bajo esta modalidad – que busca lograr sus objetivos en el menor tiempo posible – el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos atendió en el año 2005 a 1 522 256 personas que solicitaron el servicio de educación básica o alfabetización (INEA, 2006).

El proceso que nos ocupa se realizó en un círculo de alfabetización cuyos miembros se reunían por la tarde dos veces a la semana. La labor de alfabetización se había iniciado seis meses atrás, la realizaba una mujer a quien me referiré con el nombre supuesto de Elisa.

Como es común en los programas de alfabetización en México, no se contaba con un salón de clases ordinario. El lugar donde el círculo se reunía era un estrecho corredor de la sacristía de una iglesia cuya tranquilidad luego era interrumpida por dos motivos diferentes: las campanadas de llamada a misa y algunas personas que por ahí transitaban.

El trabajo se realiza utilizando mesas y sillas plegables que se sacan de una bodega y se guardan al terminar la sesión. A falta de pizarrón, se trabajó con hojas de papel que se pegaban en la pared durante las sesiones. Transcurridos varios meses, fue posible utilizar un salón anexo a la sacristía. Aún sin pizarrón, el no tener que ponerse de pie cada vez que una persona pasaba fue una mejora importante para el desarrollo de la actividad.

Las actividades fueron conducidas por quien esto escribe. Empero, con el fin de apegarme a un formato convencional en el reporte, me referiré a la conductora del proceso en tercera persona. En un sentido, no fue la mejor condición para realizar la investigación, principalmente por el hecho de no poder registrar todas las interacciones ni todas las producciones de los participantes, tarea que se logró parcialmente con la

4. La secundaria forma parte de la educación básica, corresponde a los grados 8, 9 y 10; la preparatoria corresponde a los grados 11, 12 y 13 y es requisito para la incorporación a los estudios profesionales.

participación de la alfabetizadora. Además el hecho de saber que tarde o temprano habría de exponerme al escrutinio de eventuales lectores en tanto que docente, no hizo simple jugar el papel; en otro sentido, dadas las condiciones reales de la alfabetización matemática, la situación se tradujo en un beneficio para el logro de los objetivos previstos: quien coordinaba el proceso no tenía en mente un modelo de enseñanza basada en transmitir conocimientos de manera unilateral, forma muy utilizada en los círculos de alfabetización (Avila y Waldegg, 1997; Sánchez, 2003). Tal forma de trabajo difícilmente habría hecho evidentes los fenómenos que la opción elegida sí permitió observar.

5. Los participantes en el estudio

El grupo – constituido por personas de origen rural y avecindadas en la ciudad de México por algunos años – cambió su constitución a lo largo del proceso dedicado a la *alfabetización matemática*. Se inició con cinco miembros, pero dos mujeres mayores abandonaron por razones que adelante se comentan, mientras que tres jóvenes entrarían a dar vitalidad al proceso cuando éste tenía cuatro meses de iniciado. Los miembros con quienes se inició el trabajo fueron los siguientes:

Marta, una empleada doméstica de 25 años cuya lengua materna es el mixteco. Martha maneja muy bien el cálculo mental y mostró importante disposición para aprender el cálculo escrito.

Ligio: un obrero de 28 años con buen manejo del cálculo mental. Con mucha frecuencia, Ligio “llevará la delantera” y, de manera espontánea, ayudará a los compañeros; a la larga se convertirá en una suerte de tutor de algunos de ellos.

Jesús: un joven de 17 años, mozo en una casa y que ha trabajado en una pollería; Jesús, aunque con menor manejo del cálculo mental que Ligio o Martha, capta rápidamente la lógica de las escrituras aritméticas que se trabajarán a lo largo del proceso.

Antonia: de 45 años, también empleada doméstica. Antonia inició con tres meses de retraso el proceso de alfabetización. Le es difícil escribir y “captar” las cosas propias del ámbito escolar. Por ejemplo, no da vuelta a la hoja para continuar la lectura ni toma el lápiz para escribir si no se le indica explícitamente. Antonia abandonaría el proceso cuatro meses después de iniciado.

María Antonia, de 68 años, que comenzó su proceso de alfabetización con el resto del grupo, pero que estuvo ausente durante tres meses. María Antonia mostrará relativas habilidades de cálculo mental a la vez que grandes dificultades para leer. Abandonó el círculo al mismo tiempo que Antonia.

Quienes se incorporaron ya adelantado el trabajo son: **Norma**, **Catalina**, y **Margarita**, todas trabajadoras domésticas y menores de 20

años; las dos últimas tienen como lengua materna el mixteco. Estas tres jóvenes mostraron gran interés en aprender y habilidades importantes para vincularse con la simbolización matemática; particularmente Norma quien, al igual que Ligio, asumió espontáneamente el papel de tutora de sus compañeras en muchas ocasiones.

Ninguno de los miembros del círculo había asistido a la escuela en su infancia. Fueron las condiciones socio-económicas y geográficas las que impidieron su escolarización a una edad temprana. Es decir que ninguno de ellos había visto interrumpida su escolarización por fracaso al interior del sistema educativo.

IV. EL ENCUENTRO CON LA ARITMÉTICA ESCOLAR

1. La pérdida de significación

Los participantes se sentían cómodos e incluso entusiasmados cuando en la sesión se hacían ejercicios de cálculo mental, dominio en el cual varios de ellos eran bastante competentes. La tensión también disminuía cuando los números correspondientes a una situación se presentaban en anuncios de tiendas o supermercados. La razón era que aquellos se situaban en el contexto en que comúnmente se utilizan y contenían tanto los principales referentes del saber propio de la experiencia como indicadores del contexto que les permitían ponderar la corrección de los cálculos (Avila, 1997). Empero, lo fundamental del proceso sería hacer transitar a la aritmética escrita por lo que habría de abandonarse la comodidad del cálculo ágrafo. El tránsito iniciaría con una pérdida de significación.

En efecto, interpretar las escrituras numéricas, particularmente las correspondientes a los procedimientos de cálculo convencionales, es una tarea difícil para quienes no están familiarizados con ellas. Esta escritura constituye un sistema cuyas reglas no resulta fácil entender y utilizar. Testimonio de lo anterior es un episodio en el que participan Martha y Jesús y que corresponde a los primeros (y difíciles) encuentros con la “suma escrita”:

Se están resolviendo algunos problemas sencillos a partir de la ilustración de un puesto de mercado en el que cada uno de los productos que se venden tiene un cartel que indica el precio. Se supone que los asistentes ya conocen bastantes números entre 1 y 100 y comienzan a hacer sumas escritas utilizándolos puesto que la señora Elisa (la alfabetizadora) dedicó tiempo a dichos temas, aunque utilizando una perspectiva basada en la manipulación de símbolos y la repetición. En el proceso de investigación se han comenzado a re-trabajar ambos temas. Con la situación del mercado se pretendía introducir la escritura de sumas sencillas aprovechando los saberes transmitidos previamente por la

alfabetizada; uno de los problemas que pone de manifiesto la pérdida de significación es el siguiente:

¿Cuánto hay que pagar por dos cubetas y una blusa? (en la ilustración los artículos tienen anotado respectivamente \$8 y \$14).

Martha y Jesús han ido haciendo anotaciones y comentarios entre ellos. Jesús dice: “¡No sale!”, Martha hace un comentario similar. En sus cuadernos, han escrito lo siguiente:

Martha	Jesús
1 88	88
<u>+4</u> <u>+14</u>	<u>+14</u>
5	

El 5 que Martha obtuvo es resultado de descomponer el 14 y colocar el 1 y el 4 resultantes a la manera de dos sumandos y luego operar con ellos, como si ambos representaran grupos de unidades. La segunda suma – en la cual se ha compuesto un único número (88) a partir de dos ochos que representaban unidades – Martha la escribió con base en las sugerencias de Jesús. Sin embargo, ni él ni ella intentan resolverla. La expresión en sus caras indica que ha surgido un conflicto entre sus expectativas de solución y las escrituras que han logrado producir.

Jesús dice a la conductora: ¡Mire, no va a salir!

Conductora: A ver, ¿pues qué es lo que compraron?

Martha: ¡Las cubetas y la blusa, pero no sale!

Conductora: A ver, ¿dónde está lo de una cubeta?

Jesús: Aquí (señala un 8)

Conductora: ¿Y lo de la otra cubeta?

Jesús: (señala el otro 8)

Conductora: A ver, dicen que son 8 de una cubeta y 8 de la otra, ¿entonces qué pasó?

Jesús y Martha se voltean a ver, se ríen pero no responden

Conductora: A ver, ¿qué pasó?, son 8 de una cubeta y 8 de la otra, pero como ustedes los pusieron juntos, ¿qué número se hizo?

Jesús y Martha se quedan pensativos, mientras, Toña observa

Jesús (después de pensar un poco): ¿88?

Conductora: Sí, 88, y 8 de una cubeta y 8 de otra, ¿son 88? (se ríen)

Martha: ¡Son 16! (risas)

Conductora: Sí, por eso no les salía, porque en vez de 16 pusieron 88, si quieren escribir 8 y 8 deben ponerlo así: (anota en columna los dos 8's; en seguida, sin que se le pida, Martha “completa” la suma escribiendo el 14, configura la columna siguiente:)

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}$$

Jesús: Mire, maestra, mire cómo escribió Martha ahora (Jesús ya colocó correctamente las cantidades en su cuaderno)

Conductora: A ver, Martha, dónde están los 14 [pesos] de la cubeta, dónde los dejaste?

Martha: (se ríe, no responde, se ve confundida)

Conductora: A ver, que Jesús te explique cómo anotó el 14...

(Martha no espera que Jesús le explique, observa el cuaderno de éste y corrige su escritura pero ambos continúan sin hacer la suma)

Conductora: ¿Por qué ahora no quieren hacer las cuentas como el otro día que las hicimos “en la cabeza” y les salían muy bien?

(silencio)

Conductora: ¿Por querer escribir se están confundiendo?

Martha: Sí (asiente también con la cabeza) [...]

La destreza de Martha con el cálculo mental – la cual le da un importante poder de estimación que muestra al señalar “¡[Compramos] Las cubetas y las blusa, pero no sale!” – se ha desvanecido ante el cálculo escrito.

Se ve que las enseñanzas de la señora Elisa (la alfabetizadora) – que preceden al episodio recién anotado – derivaron en un aprendizaje carente de significado. Pero también se constata que las destrezas de Martha con el cálculo mental no le resultan útiles para resolver por escrito el problema que le ha sido planteado. Tales destrezas le ayudan a ponderar la corrección de los cálculos; pero esto es insuficiente para comprender las escrituras que trata de interpretar o producir; más aún para operar utilizándolas.

En efecto, el episodio muestra que el primer reto para un neo-lector en matemáticas – como lo es Martha – es dar sentido a lo anotado en el papel; luego viene el uso del código de acuerdo con ciertas reglas; en este caso las correspondientes a la suma: adicionadas las unidades de orden inferior, se pasa a sumar las de orden inmediato superior; para hacerlo, se repite el proceso antes utilizado, sin importar el valor relativo de las cifras; se procede reiteradamente de este modo, hasta agotar las unidades de diferentes órdenes (es decir, todas las columnas). Este procedimiento es distinto del que las personas usan cuando calculan mentalmente para resolver problemas cotidianos. En este caso se tiene como referente principal el manejo del dinero y las estrategias son más flexibles, pero por lo general, como ya se ha señalado, se suma comenzando por las cantidades con mayor valor relativo, como serían los billetes de mayor denominación y luego los de menor valor, hasta llegar a las monedas (Mariño, 1983; Avila, 1989 y 1990). Don José, un analfabeto muy avezado en el cálculo con dinero utilizó las siguientes palabras para expresar tal forma de operar: “Primero cuenta uno los billetes, hasta después los quintos, si no, estaría uno al revés” (Avila, 1990, p. 64).

Comparándola con el cálculo sobre papel, esta lógica equivaldría a sumar primero las centenas, luego las decenas y hasta después las uni-

dades, pero manteniendo en mente el valor relativo de las cifras (cienes, dieces, unos...).

Después de este escueto análisis, regreso a las escrituras de Martha. Ella sabe que $8 + 8$ no son 88 sino 16, también sabe que 80 pesos corresponden a 8 monedas de 10; *su problema no es conceptual, es de vinculación entre los conceptos y la escritura*: parece no haber descubierto que el valor que representan las cifras está vinculado a la posición que ocupan. De ahí que se permita descomponer los números y disponerlos libremente, sin considerar su valor relativo. Es entendible pues que Martha, teniendo sólo como experiencia al respecto las sumas que la alfabetizadora le había enseñado mecánicamente, y no contando con suficientes referentes que le dieran significado a la disposición espacial y a la descomposición o composición de los números, se encontrara perpleja ante las disposiciones numéricas que ella misma había producido. Posteriormente, la interacción con Jesús le permitirá disponer en columnas y resolver sumas de números de dos cifras.

Ahora bien, nosotros sabíamos que se hacía indispensable el manejo del sistema decimal de numeración y la comprensión de las reglas que lo sustentan para alcanzar un trabajo comprensivo con los algoritmos. Algo habíamos abordado en las sesiones previas, pero era claro que el trabajo había sido insuficiente. Entonces, se dedicaron varias sesiones a este tema.⁵

2. La batalla por recuperar la significación

El dinero, referente privilegiado en la recuperación del sentido

Cuando parecía haberse alcanzado cierta comprensión del valor posicional, se regresó al trabajo de cálculo propiamente dicho; entonces, la coordinadora vincula el valor posicional con la disposición espacial de algunas sumas:

“¿Se fijan entonces que debemos cuidar el lugar donde ponemos los números, que no podemos *deshacerlos* y ponerlos donde queramos?”

Martha, como reforzando la intervención de la coordinadora dice: “Si los pongo unos debajo de otros, los hago de a peso. ¡No conviene!”

5. Se trabajó la identificación, escritura y producción de números, las regularidades en la serie, así como la noción de valor posicional con base en el registro de cantidades representadas mediante billetes y monedas. Buscando transferir este conocimiento a otros modelos, se introdujo como situación una dulcería, donde se hacían paquetes en base 10 y regletas tipo Dienes. Estos modelos no resultaron tan útiles como el dinero. Las razones se exponen más adelante.

(risas). A lo que Ligio responde: “Hay que apartarlos bien: de 100, de 10, de a peso”.

En el episodio es posible ver una noción inicial – pero correcta – del valor posicional de las cifras sustentado en el valor del dinero. Esta comprensión, aunque incipiente, hacía factible continuar el trabajo con los algoritmos.

Hacia un cierto dominio de las columnas

Cada uno de los asistentes propone sumas de dos sumandos para que los compañeros los coloquen en columnas y después realicen el cálculo respectivo.

Ligio propone la suma 104 más 35. Inicialmente, coloca incorrectamente las cantidades que dictó:

$$\begin{array}{r} 104 \\ 35 \\ \hline \end{array}$$

Ligio: Está mal

Conductora: ¿Está mal?

Ligio: Sí [El 3] debe ir abajo del cero

Martha: Como ése (señala otra suma anotada en la hoja-pizarrón)

Conductora: ¿Como ése?, ¿y qué quiere decir como ése?

Martha: Está mal, lo puso en medio

Toña: Lo puso atravesado

Ligio anota la cuenta nuevamente:

$$\begin{array}{r} 104 \\ 35 \\ \hline \end{array}$$

Como se ve en el registro, la necesidad de disponer – para sumar en columnas – números con distinta cantidad de cifras, obligó a una reflexión sobre la disposición de aquéllas. Empero, en el episodio sólo han emergido argumentos de tipo espacial: “Debe ir abajo del cero”, “Lo puso en medio”, “Está atravesado”. Siendo válidos en tanto que señalamiento de un error, estos argumentos no necesariamente expresan comprensión del valor posicional de las cifras ni del sistema decimal de numeración, de cuyas reglas derivaría la justificación intelectual (en el sentido de Balacheff, 1987) de la disposición correcta de los sumandos. Los argumentos de este tipo aparecerían en seguida:

Conductora: [El resultado de la suma anterior es] 139, pero como Ligio la había puesto aquí, (señala la primera suma) saldría a 454, ya dijimos que está mal, pero ¿por qué sale mal?

Después de un corto silencio, Martha dice:

Martha: ¡Ah!, porque lo puso *de cambio*, tiene que poner de 100 aquí, de 10 allí y de peso aquí (señala en su cuaderno, que todos alcanzamos a ver, las columnas respectivas)

Conductora: ¿Estás de acuerdo Ligio?

Ligio asiente con un movimiento de cabeza, se sonríe [...]

Se observa aquí una evolución en las “pruebas” ofrecidas para justificar la corrección de las escrituras. Cuando Martha dice: “Lo puse de cambio”, en mi interpretación quiere decir que el 4, al estar en lo que sería una columna a la derecha del 5 (que representa unidades) estaría colocado en el lugar de los centavos. Los lugares, ahora están relacionados con el valor de posición: 100, 10 y uno, respectivamente.

En conjunto, los episodios precedentes muestran la construcción de una idea acerca del valor posicional de las cifras sustentada en los conocimientos previos sobre el valor del dinero. Derivado de esto, se ha establecido una regla: no mezclar en una misma columna cifras con distinto valor relativo. La comprensión alcanzada se manifestará de diferentes maneras: por ejemplo en la realización de cálculos correctos por parte de Jesús y en las explicaciones dadas por Ligio a Toña y María Antonia que habitualmente van rezagadas.

Toña y María Antonia: desfase temporal y abandono del proceso

Toña y María Antonia han mantenido un ritmo desigual en relación con sus compañeros más jóvenes. Sus participaciones públicas son escasas y con frecuencia muestran desconocimiento del tema en cuestión:

María Antonia: “¿Es el 3 con el 5 [piensa unos momentos]... 25?” (respondiendo a la solicitud de leer el 35);

Toña: “No sé” (a solicitud de expresar el resultado de la suma $91 + 19$ dispuesta en columnas).

Aunque en ocasiones a medida que las sesiones avanzaban respondían correctamente algunas preguntas o ejercicios, en prácticamente todos los registros hay anotaciones del tipo: “La señora Elisa ha dedicado la sesión a ayudar a María Antonia a resolver la tarea propuesta”; “Por momentos, la señora Elisa toma al lugar de Toña y prácticamente es ella quien resuelve el ejercicio”; “Espontáneamente, Ligio se sienta con Toña y le explica cómo resolver la actividad”; “María Antonia continúa ‘atorada’”.

Efectivamente, se produjo un claro desfase entre el ritmo de aprendizaje de los jóvenes y el de estas mujeres; puede suponerse que diversos factores intervienen en ello, entre otros la asimilación más lenta de la dinámica propia de los procesos escolares, e incluso la no aceptación de la implementada durante el proceso. Incluyo también, sólo como hipótesis que contribuye a explicar el desfase, el siguiente factor: por el largo tiempo en que estas mujeres han utilizado su sistema de cálculo, este se rigidizó y ahora su capacidad de adaptación ante el nuevo sistema es más lenta.

Finalmente, Toña y María Antonia – por decisión del grupo de alfabetizadoras – dejarán el círculo para ubicarse en otro. El objetivo es incorporarlas en el grupo a cargo de una mujer con una eficiencia pro-

bada en alfabetización. La ausencia de estas dos mujeres sería compensada con la presencia de Catalina, Margarita y Norma, quienes vendrían a dar una nueva dinámica al desarrollo de la experiencia.

Adición con reagrupación y aceptación del cálculo por columnas

El procedimiento “por columnas” sería finalmente utilizado con eficiencia por todos los jóvenes. A veces iniciando por la izquierda, a veces por la derecha, aunque luego se escucha decir a Martha o a Norma “¡Hay que empezar por acá (la derecha)”. El tránsito a su dominio implicó errores en el camino, no fueron pocos los casos en que los resultados iniciales de las sumas serían como éstos:

75 +37 10 12	489 +132 5 11 11
--------------------	------------------------

Varios elementos colaboraron en la ponderación y revisión de este tipo de resultados, pero entre ellos destaca el poder de estimación propio del cálculo oral que, ante tales escrituras, funcionaba casi de inmediato. Quizás algunos no sabían cómo corregir, o se tardaban en hacerlo, pero todos se percataban de que el error existía.

Una muestra del esfuerzo por asimilar el cálculo escrito – que culmina exitosamente – se ve en el registro de Catalina, quien ya avanzada la experiencia, para resolver un problema con la suma $74 + 18$ procede como se muestra en la figura 1:

1. Anota la suma con la siguiente disposición: $\begin{array}{r} 74 \\ +18 \\ \hline \end{array}$	2. Dibuja: IIIIII IIII 1 IIIIIII	3. Cuenta las rayitas que representan unidades, dice “12” en voz baja y anota el 12 bajo el 8. Cuenta en voz baja las rayitas correspondientes a las decenas; dice “8”, anota el 8: $\begin{array}{r} 74 \\ +18 \\ \hline 8\ 12 \end{array}$	4. Piensa unos segundos, borra el 1, borra el 8 y anota 9; obtiene el resultado correcto: $\begin{array}{r} 74 \\ +18 \\ \hline 92 \end{array}$
---	--	--	---

Figura 1. Resolución de Catalina a la suma $74 + 18$

Catalina ha aceptado tanto la disposición como el orden del cálculo escrito (primero las unidades), pero utiliza un paso intermedio: registrar *in extenso* las sumas parciales para luego adicionar las correspondientes a los distintos órdenes. Esta forma de operar, al dejar traza del proceso, descarga a la memoria y da oportunidad – en un segundo momento – de concentrarse en la tarea cognitiva más compleja: sumar unidades de distinto orden.

Resta con desagrupación y nueva presencia del cálculo oral

Los adultos analfabetos han elaborado en su experiencia de vida dos formas básicas de resolver los problemas de resta: una de ellas, analógica a la suma, consiste en restar primero los billetes, paquetes u objetos de mayor valor relativo, la cual es utilizada en los casos en que no está implicada la des-agrupación. La segunda forma de operar se pone a funcionar cuando se requiere desagrupar y consiste en calcular, sumando a partir del primer número, el número necesario para completar el mayor, sin descomponer los números. Con frecuencia, esta forma de proceder se apoya en el conteo o da lugar a varias aproximaciones (Mariño, 1983; Avila, 1990).

Más adelantado el proceso se abordaría la resta con des-agrupación. El siguiente registro refiere a un pasaje que interesa destacar a la luz de nuestro objetivo.

El trabajo se realiza a partir de problemas de compra-venta. En un cierto momento se sugiere modelar las acciones de resta mediante el conteo de *billetes* de papel y *monedas* de \$1 que han estado disponibles desde el comienzo de la sesión. La respuesta esperada es que se represente el minuendo, y luego se retire, de la cantidad representada, la indicada por el sustraendo. Esto obligaría a cambiar, físicamente, billetes de \$10 por monedas de \$1.

La interacción entre los asistentes es intensa, algunos acompañan el cálculo con movimiento de dedos y no con los billetes. Todos se ven concentrados en la tarea, aunque por momentos hay participaciones que expresan dificultades o necesidad de ayuda.

Por ejemplo, Margarita está confundida, ha restado lo siguiente pero parece no convencerse de su propio hacer, porque se queda viendo su apunte:

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 49 \\ \hline 3 \end{array}$$

Conductora: ¿No le entiendes, Margarita?

Margarita: ¿Pues cómo le empiezo, de arriba o de abajo? (se refiere a cómo restar las unidades)

Conductora: Fíjate bien, si tú ves los números completos que tenemos aquí, tienes 75, y quieres quitarle 49. Al 7, que vale 70, le quitaste ya el

4, que vale 40, y te quedan 30, que es lo que vale este 3, pero ahora al 5 le tienes que quitar 9... ¿y qué pasa ahí? [...] No te alcanza, ¿verdad?...

Margarita y Norma se sonríen y se miran con cierta complicidad

Conductora: ¿Quién quiere decirle a Margarita cómo hacerla?

Martha: Tiene que pedir prestado en el 7, van a quedar dos (se refiere al que será el resultado en las decenas) el que pide lo pone allá, [con los que valen uno] son quince [...].

Margarita: (su expresión continúa siendo de duda)

Conductora: A ver, Margarita, ¿te acuerdas qué hacíamos con los billetes cuando no nos alcanzaba el cambio para dar lo que necesitábamos?

Margarita: (asiente con un movimiento de cabeza)

Conductora: Bueno, pues aquí es como si un billete de a 10 lo cambiaras por monedas, por eso se hacen 15 con estos otros cinco, ¿sí te acuerdas o no?

Margarita: Sí [...]

Margarita (después de haber tomado los *billetes* y *monedas* correspondientes y haber cambiado un *billete* por 10 *monedas*, dice): ¿De estos se agarra el 9?

Conductora: ¿Pues tú qué crees?

Margarita: Que sí (se ríe, luego continúa trabajando)

En mi opinión, los procedimientos contruidos en la experiencia de vida son en buena medida responsables de la dificultad de Margarita para restar: ella ha comenzado a hacerlo de izquierda a derecha, usando el procedimiento espontáneo según el cual se cuenta primero lo que tiene más valor relativo; este procedimiento sólo es útil cuando la desagrupación no es necesaria. El procedimiento se hubiese aplicado sin conflicto frente al cálculo escrito si tal hubiese sido el caso, pero para restar 9 de 5 es necesario desagrupar, entonces el procedimiento encuentra su límite. Es la interacción entre el conocimiento previo (que conduce a iniciar por la izquierda pero que vale sólo para el caso más simple) y la nueva forma de restar que se le presenta (y que implica iniciar por la derecha) la que genera la confusión de Margarita. Si ella hubiese mantenido “pura” su forma previa de operar, habría calculado el complemento razonando más o menos así: “49 y 1 son 50; 50 y 25 son 75; 25 y 1 son 26, entonces 49 y 26 son 75” y luego habría anotado el resultado (26). Pero ella actúa de otro modo: ha aceptado la presión del cálculo por columnas, cuyas reglas intenta comprender y aplicar. Esto, por un momento la paraliza; finalmente resuelve bien.

Al final de la secuencia se constata un buen nivel de comprensión de la resta con des-agrupación; los billetes y monedas resultaron un recurso

de primer orden en este logro.⁶ Empero, el significado de resta hasta aquí utilizado es parcial, ya que sólo se han trabajado problemas donde esta operación es útil para calcular una disminución. La ampliación de este significado pondría en evidencia dificultades que colocan a la resta como un problema no sólo de escritura, sino también relacional. Esto es, como una operación donde determinar su utilidad como instrumento de resolución no se hace de inmediato, porque captar las relaciones entre los datos y vincularlas a la resta obliga al análisis, la reflexión y la deducción (cf Vergnaud, 1981).

Ampliación del significado resta y nuevo distanciamiento entre los dos cálculos

Hasta aquí se habían resuelto sólo problemas donde el significado que las situaciones le confieren a la resta es “quitar”. De tal suerte, el cálculo necesario para resolverlos guardaba una concordancia (directa) con las situaciones abordadas, es decir que la escritura aritmética que representa los problemas trabajados es idéntica a la que lleva a las soluciones (Descaves, 1999; cit. por Peltier, 2003, p. 42). Un ejemplo de esto es el siguiente: en el problema “Lupe va a comprar el mandado, si lleva \$75 y gasta \$49, ¿cuánto dinero le queda?”, la ecuación que representa el problema es: $75 - 49 = ?$ y corresponde también a la operación que conduce a la solución.

Restaba ahora enfrentar a situaciones en las que el sentido de la resta es “completar” o “encontrar una diferencia”. En este caso, no hay concordancia (directa) entre la representación del problema y la escritura de la operación que conduce a la solución. La siguiente situación ilustra lo anterior: “Tengo \$76, necesito \$100 para el abono del televisor, ¿cuánto dinero me hace falta?” La representación del problema es: $76 + ? = 100$; la escritura convencional que orienta a la solución es: $100 - 76 = ?$. Esto, como se ve, hace necesaria una operación cognitiva adicional: transformar en una expresión de resta la expresión de suma que se asocia directamente al problema planteado, lo cual implica un conocimien-

6. No ocurrió lo mismo con modelos también decimales pero distintos del sistema monetario de uso corriente, como por ejemplo el basado en paquetes (de dulces) o regletas tipo Dienes que se incorporaron con el fin de “descontextualizar” los datos más allá de situaciones que implicaban manejo del dinero. Baste decir que en una de las sesiones donde Norma trataba de explicar a Catalina cómo restar con des-agrupación con el apoyo de las regletas, en algún momento le dice: “Hazle como cuando le hacemos con el dinero, cambias el de a \$100 por diez de a \$10. Una vez dada esta recomendación, Catalina logra resolver la resta.

to de la relación entre ambas operaciones. Es fácil suponer que este hecho dificultará la ampliación del dominio semántico de la resta y la identificación del procedimiento experto como instrumento de resolución útil en tal dominio.

Y efectivamente, las interacciones generadas en el círculo muestran la dificultad implicada en la resolución de problemas con una noción de resta distinta a la de “quitar”: la de encontrar un faltante:

Jesús: ¡Aquí no le entiendo, a la 4! (se refiere al problema 4: Estamos a 20 de febrero, ¿cuántos días faltan para que termine el mes?)

Las participaciones de los otros también expresan falta de claridad.

Conductora: (dibuja sobre la hoja-pizarrón la hoja del calendario correspondiente a febrero y remarca el 20):

Ahora díganme, ¿cuánto falta para que se acabe el mes, o sea, cuánto falta para que sea día 28?

En ese momento, parece que todos comprenden cómo resolver el problema: Martha y Cata cuentan con los dedos a partir del 20, Jesús le dice a Norma: “Ya, ya sé cómo”; Norma dice a la conductora: “¡Estaba tan facilito!”. Mientras, Ligio apoya a Margarita, le dice: “Estamos a 20, ¿cuánto falta para el 28?” Margarita cuenta con los dedos, luego dice a Ligio: “¿Ocho?”, y tras obtener su aprobación, anota el 8.

La dificultad para resolver este tipo de problemas puede explicarse por una probable escasa frecuencia en la actividad cotidiana. El uso del calendario jugó un papel importante en la resolución del planteado en clase. Pero el procedimiento utilizado fue el conteo ascendente a partir de 20. Es decir que la estrategia de solución movilizada no se acercaba a la convencional consistente en realizar la resta $28 - 20$.

La dificultad para utilizar la resta como estrategia de solución puede entenderse por la concordancia indirecta entre el problema y la operación que permite resolverlo explicada por Descaves. Era necesario que la operación resta (incluyendo la técnica operatoria) fuera aceptada y comprendida en su sentido más amplio. Había que trabajar en ello.

Conflicto entre el algoritmo y la intuición: la resta como problema relacional

Se dio a los participantes una hoja con problemas de entre los cuales algunos implican la idea de complemento y comparación; en cada uno hay una suma y una resta sin resolver, compuestas con los datos de los problemas (en el anexo 1 pueden verse los problemas). La consigna es la siguiente: “Escoja la operación que sirve para encontrar la solución del problema y resuélvala”. Se hace evidente el conflicto entre la solución intuitiva para los problemas de calcular el faltante (sumar), y el procedimiento formal de solución (la resta). Resulta difícil llegar a un acuerdo sobre el acercamiento útil para resolver el siguiente:

Quiero comprar unos zapatos de \$70, tengo \$55, cuánto me falta para completar los \$70?

Conductora: [...] Vamos a ver si nos ponemos de acuerdo. Vamos a hacer las dos operaciones, a ver cuál resultado vemos que nos conviene. Todos se ponen a resolver las dos operaciones:

$$\begin{array}{r} 70 \\ - 55 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ + 55 \\ \hline \end{array}$$

Conductora: [...] Los zapatos valen 70, necesito setenta porque eso valen los zapatos, y ya tengo 55, entonces ¿cuánto me hará falta para completarlos?

(Todos se quedan pensativos)

Ligio: 15 pesos

(Los demás, por la expresión en sus caras, parecen decir que ya entendieron)

Conductora: Casi todos ustedes escogieron la suma para sacar la cuenta, pero con la suma nos resulta 125

Ligio: Ahí nos alcanza para los zapatos de 70

Conductora: Sí, porque tenemos 125, pero los zapatos cuestan nada más 70, y ya tenemos 55, nos faltarán los 125?

Ligio: Sí, porque con 15 pesos no me compro nada (risas)

Conductora: A ver, otra vez les pregunto: si ya tengo 55 y sólo cuestan 70 los zapatos, sí me hacen falta 125?

Ligio: O setenta

(Los demás sólo observan, aunque lo hacen con interés parece que no están dispuestos a participar)

Conductora: Los demás, ¿qué opinan?

(Silencio) [...]

No se avanzó más en la sesión. Parecía que la participación inicial de Ligio (“15 pesos”) colaboraría en la comprensión que los demás alcanzarían sobre el problema y el cálculo útil para resolverlo. Empero, los siguientes renglones del registro muestran poca claridad al respecto pues ante el interrogatorio Ligio retrocede. Y es que los jóvenes de nuestro estudio enfrentan una aparente paradoja: se demanda completar una cantidad y esto conforme al cálculo oral implica un razonamiento aditivo, sin embargo, es la operación resta la que permite obtener la solución. Lo que resuelve la aparente paradoja es la comprensión de la relación entre la suma y la resta (que conduce a la inversión de la expresión inicial (la suma *con hueco*) para llegar a la solución mediante un procedimiento canónico. Pero, como se ha señalado, el entendimiento de la relación entre problema y procedimiento de resolución se dificulta en los casos en que no es directa la concordancia entre el cálculo necesario para resolverlos y las situaciones abordadas.

En virtud de lo anterior se apeló al cálculo oral: se trabajó comparando los resultados obtenidos mediante los procedimientos intuitivos y

los procedimientos canónicos para sumar y restar.⁷ Fue necesario trabajar con varios problemas para que la aparente incoherencia se aceptara; el acercamiento finalmente dio resultados: al menos por un tiempo los jóvenes identificaron los problemas de búsqueda de faltantes o diferencias como problemas que pueden resolverse con la resta y utilizaron el procedimiento escrito para resolverlos. Pero sacamos en claro que *comprensión no significa uso*.

3. Estabilidad sólo relativa de los nuevos procedimientos

La comprensión de la noción resta en un sentido amplio, esto es, incluyendo la identificación del procedimiento canónico como herramienta para resolver problemas de faltantes o diferencias, se pondría a prueba casi al final del proceso, cuando se trabajó alrededor de un anuncio de supermercado donde algunos precios (corrientes en la época) implicaban pesos y centavos, y uno de los problemas a resolver fue el siguiente:

“Quiero comprar un aceite Dorela, pero sólo tengo \$6.20, ¿cuánto me falta para completarlo?”(en la ilustración, el precio del aceite es \$9.40).

Cata y Norma comentan entre ellas, hacen cálculo mental apoyado con conteo de dedos.

Margarita y Martha cuentan con los dedos, realizando un conteo ascendente a partir de \$6.20. Muy rápidamente Margarita dice: “3.20”, en voz baja, como para sí; casi inmediatamente Martha termina su conteo y dice también: “3.20”, luego lo hace Norma.

Conductora: ¿Y con qué sacamos esta cuenta que acaban de hacer si queremos escribirla, con una suma o con una resta?

Cata: Con resta

Ante la respuesta de Cata, Martha hace una expresión que indica desacuerdo

Conductora: A ver, Martha, ¿te acuerdas qué quiere decir sumar?

Martha: (asiente con un movimiento de cabeza) que vamos a juntar lo que tenemos

Conductora: Fíjate, si yo sumo, o sea que si yo junto 6.20 y 9.40, ¿me van a salir 3.20?

Martha: (mueve la cabeza denegando y se ríe)

Conductora: No, ¿verdad?, te saldría muy grande el resultado. Y si a 9.40 le restamos 6.20, o sea que le quitamos 6.20, ¿sí nos podrá salir 3.20?

Martha, y el resto de las compañeras asienten.

7. R.C. Flores (2003) ha mostrado recientemente la utilidad de este procedimiento con niños que cursan la escuela regular; también el estudio de Alvarado (en proceso) permite constatar esta utilidad.

Conductora: Entonces, ¿con qué fue esta cuenta, con suma o con resta?

Norma (se adelanta): Con resta

Conductora: Hagan pues la resta en su cuaderno [...]

El resto de los problemas derivados del anuncio (con suma, o con resta asociada a la idea de quitar) no causaron dificultades de escritura. Éstas aparecen ante los problemas que refieren a un faltante o una comparación. En este caso, la vuelta a las estrategias no convencionales es casi inmediata: los problemas se resuelven a partir de la idea de complemento, sin descomponer los números, con el apoyo del conteo ascendente y dejando de lado el cálculo escrito convencional; el conflicto entre el cálculo intuitivo y los procedimientos escritos reaparece. Es una cuestión que implica dos elementos íntimamente vinculados: comprensión de la estructura del problema y, sobre la base de dicha comprensión, la selección del procedimiento con el cual puede resolverse.

Pero el tiempo en el que los nuevos procedimientos se han utilizado es relativamente corto, probablemente, con el acercamiento reiterado a la aritmética escrita, a medida que se avance en la educación primaria se alcance mayor estabilidad al respecto.

V. DISCUSIÓN

Quienes asisten a los círculos de alfabetización y educación básica para jóvenes y adultos practican un cálculo en el que se manipulan cantidades (dinero, kilos, paquetes...) y prescinden de la escritura para realizarlo. Al respecto, la literatura ha constatado la amplia gama de saberes matemáticos contruidos en la experiencia pero ha ido más allá: ha resaltado las carencias de la matemática que se enseña en las escuelas, destacando que es mucho más pobre y desprovista de sentido que la que se maneja en la vida.

No obstante que la investigación sobre el tema ha reconocido poco el valor del lenguaje matemático convencional, o las ventajas que éste puede ofrecer a las personas, en la escolarización básica de los jóvenes y adultos un objetivo central es el manejo de las formas convencionales del cálculo escrito, basadas precisamente en la manipulación de símbolos.

Sería deseable que el significado con el que se operan las cantidades cotidianamente se conservara al transitar a la manipulación simbólica. Pero el desafío que implica dotar de significado a la matemática escrita se acrecienta cuando quienes la intentan aprender tienen un sistema de cálculo estructurado y estable y con base en él se acercan a las nuevas escrituras y procedimientos. Como aquí se ha constatado, no es fácil que al escribir los cálculos se conserve en mente el significado de los datos a

los que refieren los problemas, que “se vean” los billetes o las monedas, como sí “se ven” cuando se calcula mentalmente. Las disposiciones espaciales propias de los algoritmos y los mecanismos que permiten operar con ellos – “romper” los números y calcular iniciando por las unidades de menor orden – contribuyen a desdibujar dicho significado. Adicionalmente, una comprensión endeble del sistema decimal agudiza las dificultades.

En la búsqueda de soluciones a dicha problemática, la investigación latinoamericana ha sugerido formas alternativas de acercamiento al cálculo escrito; dos se han experimentado sistemáticamente: “el desarrollo de una escritura para el cálculo oral” y “la expresión escrita de las estrategias espontáneas de cálculo”. Ambas – en palabras de sus propios autores – mostraron bondades pero también límites. Aquí optamos por enfrentar al cálculo convencional sin conceder un espacio didáctico a la representación gráfica del cálculo oral. Lo hicimos bajo el supuesto de que la motivación de las personas es aprender el convencional, “el que los otros saben”. Esta opción permitió constatar la presencia constante del cálculo oral durante el proceso de alfabetización matemática.

En efecto, nuestros datos muestran – en coincidencia con los reportados por Carvalho – que los procedimientos espontáneos persisten en el pensamiento de las personas durante el proceso de alfabetización y, en no pocas ocasiones, su uso se hace explícito como instrumento de resolución. Pero nuestras observaciones van más allá. En relación con nuestra hipótesis inicial, constatamos la re-elaboración del cálculo oral como condición de apropiación significativa del cálculo escrito. En el caso de la suma, la reelaboración implica el orden de las operaciones: para la realización comprensiva de los cálculos, es indispensable la inversión de la secuencia “de lo más grande a los más chico” aunque en la experiencia de vida la nueva forma de ordenar esté desprovista de utilidad y sentido. En el caso de la resta la reelaboración va más allá: poder restar cuando la desagrupación está implicada significa abandonar la estrategia de complemento aditivo (que permite restar con los “números completos”) y sustituirla por otra que procede mediante la descomposición decimal y la inversión del orden que en la experiencia ha resultado funcional.

En virtud de lo anterior, un proceso de alfabetización matemática se caracteriza a la vez por la ruptura y la continuidad entre el saber de la experiencia y el saber escolar. Porque las experiencias con el dinero se traen al salón de clases y estas son las que permiten dar significado a las notaciones y la nueva forma de operar, sin embargo para ser útiles, dichas experiencias deben adaptarse a nuevas reglas, a veces contradictorias con las que hasta entonces se han utilizado.

Es decir que el trayecto que lleva a un cierto manejo de los cálculos con lápiz y papel es complejo. La pre-existencia de una lógica pragmática según la cual debe contarse primero lo que tiene más valor cuando se suma, o debe completarse aditivamente una cantidad cuando se resta, dificulta la comprensión y aceptación de los nuevos procedimientos. Para que la comprensión ocurra, es necesaria una vinculación adaptativa entre el cálculo con dinero y la escritura y esta vinculación toma tiempo. Porque el cálculo oral constituye el soporte del entendimiento de los símbolos y las reglas de notación del cálculo, pero dicho soporte – para seguir siéndolo – debe sufrir ajustes y rupturas que no son inmediatos.

No obstante estas dificultades, los jóvenes de nuestro estudio transitaron del cálculo oral al escrito, en un proceso de apropiación que se mostró incompatible en cuanto a temporalidad con el de las mujeres mayores, éstas no lograron acceder a la manipulación simbólica en el período en el que aquellos sí lo hicieron. Pero, no es éste un caso excepcional, otros estudios, por ejemplo el de Sánchez (2003), apuntan en la misma dirección. Esta investigadora ha mostrado cómo en un círculo de estudio los jóvenes que aprenden matemáticas copan la atención del asesor, y las personas mayores, quienes avanzan lentamente en las tareas, quedan en los hechos marginadas del proceso. Tal similitud no nos conforma. Es necesario indagar más sobre las causas de la incompatibilidad temporal entre el aprendizaje de los unos y los otros: ¿proviene de las propias personas? (dificultades de lectura, cierta rigidez en los esquemas de cálculo), o ¿es la organización didáctica el factor esencial que la provoca?

La estabilidad sólo relativa de los algoritmos escritos es otra de nuestras constataciones. Aún al final del proceso es frecuente que se eviten los pasos intermedios propios de los procedimientos escritos, sobre todo si se trata de la resta; se hace de la siguiente manera: se anota el cálculo conforme a la escritura convencional y se calcula mentalmente; si resulta necesario, se hacen registros no convencionales para ayudar a la memoria; finalmente, se anota el resultado en el espacio correspondiente de la escritura convencional.

Lo anterior no es necesariamente un déficit. Aunque el cálculo oral aflore persistentemente, la capacidad de lidiar exitosamente con las cuentas escritas – independientemente de los procesos intermedios que lleven a la solución correcta – constituye un avance en el tránsito a la aritmética convencional. El trayecto que en la historia de la humanidad llevó a la adopción de la escritura nos ayuda a ponderar el hecho: las formas orales de cultura tardaron mucho tiempo en verse efectivamente afectadas por la tecnología que ponía las palabras en papel (Ong, 1996). Es probable entonces que la permanencia en el sistema educativo y el

uso continuado del nuevo cálculo produzca una mayor estabilidad al respecto.

Nuestras concepciones iniciales sobre al aprendizaje matemático de los jóvenes y adultos consideraban la interacción con otros interlocutores como elemento promotor de la apropiación de la aritmética. Prácticamente todos los pasajes que sustentaron nuestras afirmaciones muestran la interacción permanente entre los miembros del grupo a partir de sus acercamientos a las situaciones planteadas. Y aunque no nos detuvimos en un análisis minucioso del eventual beneficio de dichas interacciones en las historias individuales, conviene anotar algunas reflexiones al respecto.

Los problemas planteados promovieron la puesta en funcionamiento y la búsqueda de ajuste de determinados esquemas de resolución; pero en general la socialización de los puntos de vista y las aportaciones de los participantes mostraron un peso importante en la apropiación de la aritmética escrita. Este peso probablemente sea derivación de nuestras opciones didácticas: los modestos alcances a-didáticos de las situaciones elaboradas.

También en relación con la interacción, constatamos un viejo principio del socio-constructivismo: no todas las interacciones son positivas. Es necesaria una cierta distancia entre los esquemas de los interlocutores para que los intercambios sean intelectualmente provechosos. En el caso aquí analizado, la interacción entre los jóvenes se tradujo en avances específicos. En cambio, la interacción con las mujeres mayores no rindió fruto. Bajo la hipótesis de que los primeros avanzaron gracias a la interacción, entonces, tal forma de trabajo amplió la brecha entre ellos y las mujeres mayores. Es un efecto no deseable que la contundencia de los datos no nos permite eludir.

Los hechos analizados derivaron de una indagación basada en una intervención didáctica (por cierto bien modesta) cuyos alcances deben ser discutidos. Se privilegió el intercambio comercial y el manejo del dinero por ser a la vez fuente de significados y espacio principal de aplicación de la aritmética cotidiana. Y efectivamente, el manejo del dinero se mostró como recurso de primer orden en la comprensión de la aritmética convencional. Pero comprensión no significa uso. Utilizar los procedimientos escritos obedece a factores distintos de su simple comprensión (por ejemplo: que los números no se presten al cálculo mental, o que los límites de la memoria obliguen el registro de cantidades). Nuestra opción didáctica – interesada en la interacción entre el cálculo oral y el escrito – nos llevó a trabajar con los números de uso cotidiano. Esto limitó la inclusión de números de varias cifras y, probablemente por ello, no se promovió con suficiencia el uso de los nuevos procedimientos. No obstante esta limitación, los participantes se

involucraron en las tareas propuestas, accedieron al cálculo escrito y se interesaron en lograrlo. Quizás el valor social que le conceden constituya un factor de motivación adicional en tal sentido.

Como quiera que sea, nuestra intervención didáctica favoreció la aparición de ciertos fenómenos. Es fácil imaginar que una opción didáctica distinta, por ejemplo una sustentada en la construcción de situaciones didácticas más “potentes” en el sentido de Brousseau (1986), generará otras interacciones y – muy probablemente – otros fenómenos. Esta es una cuestión que queda pendiente indagar, por ahora, en el marco de nuestras opciones, es posible suponer la re-aparición, en lo individual, de determinadas estrategias de resolución (la literatura lo constata una y otra vez). En lo colectivo, cabe la pregunta: ¿la historia de la clase (en términos de trayectoria y resultados) será repetible cuando se trate de otros jóvenes y adultos? Es probable que no, porque, como lo ha señalado Artigue, la participación del docente, la interacción entre los participantes, así como la difusión de las estrategias individuales tienen consecuencias en la historia de un grupo (Artigue, 1986).

Aunque por ahora nuestra respuesta a esta cuestión es incierta, y muchas otras cuestiones quedan sin responder – puesto que esta investigación es apenas semilla de una búsqueda con múltiples aristas – concedo valor a los datos aquí reportados, en tanto que arrojan luz sobre un asunto que la investigación ha enfrentado en muy escasa medida: el del encuentro entre el cálculo oral y el escrito.

Este asunto es importante porque aunque hasta hoy la literatura ha magnificado los alcances del saber de la experiencia y ha menospreciado los lenguajes que se enseñan en la escuela, ante los ojos de quienes no los poseen éstos tienen un valor indiscutible; adicionalmente, trabajos como el de Mercedes de Agüero (2002) constatan el valor real y no sólo ideológico de la matemática escrita en el ámbito laboral. Según deja ver esta investigadora, los saberes provenientes de la escuela resultan esenciales en el desarrollo y la viabilidad de una comunidad de práctica: la constituida por una cuadrilla de pintores. La cuadrilla no habría llegado muy lejos sin haber incluido a quien posee las herramientas simbólicas que se adquieren en la escuela y que dan al grupo la capacidad de planear sistemáticamente el trabajo, de negociar los precios, de organizar un buen manejo de los recursos. Esto es entendible porque el saber de la experiencia por lo general está anclado a problemas y situaciones específicas que le marcan límites. En cambio, la capacidad de registrar mediante símbolos el pensamiento y de elaborar con dichos símbolos modelos reutilizables en otras situaciones, se traduce en un poderoso amplificador de la capacidad operatoria. En fin, que en vez de deslegitimarla por la pobreza que hoy acompaña a su enseñanza, es más útil trabajar para entender el encuentro entre la mate-

mática escrita y la que se construye en la vida. Su comprensión es condición de posibilidad de encuentros más fecundos entre estos dos mundos. Los millones de analfabetos que habitan amplias regiones de nuestro planeta son argumento suficiente para incorporar el tema en nuestras agendas.

REFERENCIAS

- ALVARADO N. (en preparación), *La dificultad de los problemas aditivos. Estudio con alumnos de tercer grado*. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, México: UPN.
- ARTIGUE M. (1986), Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.1, 5-62.
- ÁVILA A. (1989), *Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados*. Tesis de maestría en Pedagogía, México: UNAM.
- ÁVILA A. (1990), El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, XX. (3), 55-95.
- ÁVILA A. (1997), Repensando el currículum de matemáticas para la educación de jóvenes y adultos, en Varios autores. *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 101-118). Santiago de Chile: UNESCO.
- ÁVILA A., WALDEGG G. (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*. México: INEA.
- BARTH B.M. (1996), Construire son savoir. En Bourgeois É. (ed), *L'adulte en formation. Regards pluriels*. (pp. 19-36). Bélgica: De Boeck Université. Perspectives en éducation.
- BALACHEFF N. (1987), Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- BROUSSEAU G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Tesis de Doctorado de Estado. Francia: Universidad de Burdeos I.
- CARRAHER T., CARRAHER D., SCHLIEMANN A. (1987), Written and oral Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18.2, 83-97.
- CARRAHER T., CARRAHER D., SCHLIEMANN A. (1991), *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI Editores.
- CARVALHO DE LUCHESI D. (1995), *A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar*. Tesis de doctorado. Brasil: Universidad de Campinas.
- CARVALHO DE LUCHESI D. (1997), El conocimiento matemático de la práctica y el conocimiento matemático escolar desde la perspectiva del salón de clase, en Varios autores. *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 65-76). Santiago de Chile: UNESCO.
- DE AGÜERO M. (2002), *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas matematizables de la vida cotidiana*. Tesis de doctorado en educación. México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.

- DELPRATO M.F. (2002), *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática*. Tesis de Maestría en Ciencias. México: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.
- DOISE W., MUGNY G. (1981), *Le développement social de l'intelligence*. Paris : Interéditions.
- FERREIRA-REIS FONSECA C. (2003), El género discursivo de la matemática escolar. Estrategias de inclusión cultural en la educación de jóvenes y adultos. *Decisio*. Primavera, 33-37.
- FLORES R. DEL C. (2003), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción. Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación*. Tesis de doctorado en educación. México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- INSTITUTO NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN DE LOS ADULTOS. *El INEA en Números*. www.conevyt.org.mx. Febrero de 2006.
- JOIA O. (1997), Cuatro preguntas sobre la educación matemática de jóvenes y adultos. En Varios autores, *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 27-34). Santiago de Chile: UNESCO.
- KNIJNIK G. (1997), Lo popular y lo legítimo en la educación matemática de jóvenes y adultos. En Varios autores, *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 43-54). Santiago de Chile: UNESCO.
- KNIJNIK G. (2003), Educación de personas adultas y etnomatemáticas. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, 4, 8-12.
- KNIJNIK G. (2006), La oralidad y la escritura en la educación matemática: reflexiones sobre el tema. *Educación Matemática*, 18(2), 149-166.
- MARIÑO G. (s/f), *Cuentas claras*. Bogotá: Dimensión Educativa.
- MARIÑO G. (1995), Comunicación personal a propósito de la propuesta. *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación de adultos*. Bogotá.
- MARIÑO G. (1997), Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En Varios autores, *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 77-100). Santiago de Chile: UNESCO.
- MARIÑO G. (1983), *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Constataciones y propuestas*. Bogotá: Dimensión Educativa.
- ONG W. (1996), *Oralidad y escritura. Tecnologías de la palabra*. México: Fondo de Cultura Económica.
- PELTIER M.-L. (2003), Problemas aritméticos. Articulación significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática*, XV (3), 29-56.
- PERRET-CLERMONT A.-N. (1984), *La construcción de la inteligencia en la interacción social*. Madrid: Aprendizaje Visor.
- SÁNCHEZ C. (2003), Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, 4, 12-17.
- SOTO I. (1992), *Mathématiques dans la vie quotidienne de paysans chiliens*. Tesis doctoral. Bélgica: Universidad Católica de Lovaina.
- UNESCO, Institute for Statistics, en www.uis.unesco.org. febrero de 2006.
- VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité* (1991). Berna: Peter Lang.
- VYGOTSKY L. (1994), *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.

ANEXO

PROBLEMAS CORRESPONDIENTES A LA SESIÓN DEDICADA A LA AMPLIACIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA RESTA

1. Tenía \$44 y gasté \$27 en unos tenis, ¿cuánto dinero me queda?
2. Tengo que hacer 12 restas, si ya hice 4, ¿cuántas me falta hacer?
3. Quiero comprar unos zapatos de \$70, tengo \$55, ¿Cuánto me falta para completar los \$70?
4. En el microbús recorro 19 kilómetros y en el metro 21, ¿Cuántos kilómetros recorro?
5. Lupe tiene 22 años y Rosa tiene 15 años, ¿Cuántos años le lleva Lupe a Rosa?