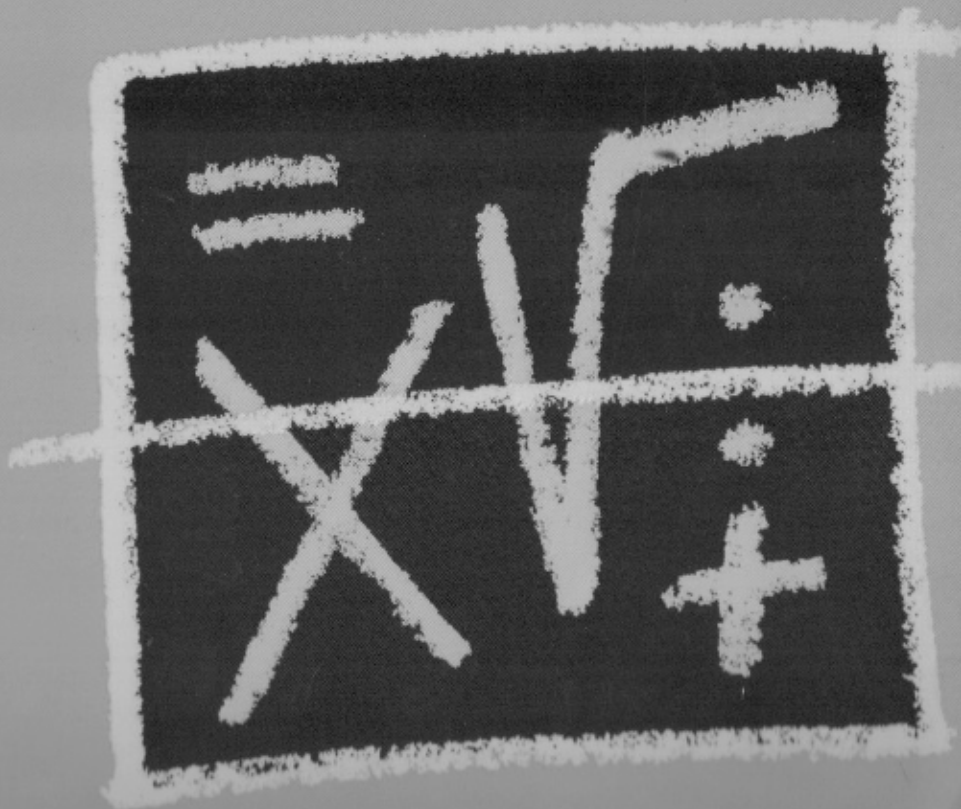


Alicia Avila

Transformaciones y costumbres en la matemática escolar

PAIDÓS EDUCADOR



Transformaciones y costumbres
en la matemática escolar

Para mi brillante y
queridísimo amigo José Luis,
con un abrazo.

Celia Cula S.



PAIDÓS EDUCADOR

Últimos títulos publicados:

133. J. Canaan y D. Epstein (comps.) - *Una cuestión de disciplina*
134. J. Beillerot y otros - *Saber y relación con el saber*
135. M. van Manen - *El tacto en la enseñanza*
136. M. Siguan - *La escuela y los inmigrantes*
137. B. Aisenberg y S. Alderoqui (comps.) - *Didáctica de las ciencias sociales II*
138. S. González y L. Ize de Marengo - *Escuchar, leer y escribir en la EGB*
139. H. R. Mancuso - *Metodología de la investigación en ciencias sociales*
140. M. Kaufman y L. Fumagalli (comps.) - *Enseñar ciencias naturales*
141. F. Brandoni (comp.) - *Mediación escolar*
142. J. Piaget - *De la pedagogía*
143. I. Gaskins y T. Elliot - *Estrategias cognitivas en la escuela*
144. D. Johnson y otros - *Aprendizaje cooperativo en el aula*
146. B. Porro - *La resolución de conflictos en el aula*
148. A. Candela - *Ciencia en el aula*
149. C. Lomas (comp.) - *¿Iguales o diferentes?*
150. J. Voneche y A. Triphon (comps.) - *La génesis social del pensamiento*
151. M. Souto - *Las formaciones grupales en la escuela*
152. E. Lucarelli y otros - *De la teoría pedagógica a la práctica en formación*
153. M. Rueda Beltrán y F. Díaz Barriga Arceo (comps.) - *Evaluación de la docencia*
154. A. Baudrit - *El tutor: procesos de tutela entre alumnos*
155. S. Hook - *John Dewey: semblanza intelectual*
156. M. T. Yurén Camarena - *Formación y puesta a distancia*
157. E. Willems - *El oído musical*
158. S. Schlemenson (comp.) - *Niños que no aprenden*
159. R. Glazman Nowalski - *Evaluación y exclusión en la enseñanza universitaria*
160. X. Lobato Quesada - *Diversidad y educación*
161. J. P. Das y otros - *Dislexia y dificultades de lectura*
162. C. Carrión Carranza - *Valores y principios para evaluar la educación*
163. Leonardo Viniegra Velázquez - *Educación y crítica*
164. X. Lobato Quesada - *Diversidad y educación: Taller de Fortalecimiento*
165. M. Benllock (comp.) - *La educación en ciencias: ideas para mejorar su práctica*
166. E. Willems - *El valor humano de la educación musical*
167. E. C. Wragg - *Evaluación y aprendizaje en la escuela primaria*
168. E. Aguilar Mejía y L. Viniegra Velázquez - *Atando teoría y práctica en la labor docente*
169. J. L. Álvarez-Gayou Jurgenson - *Cómo hacer investigación cualitativa*
170. E. C. Wragg - *Evaluación y aprendizaje en la escuela secundaria*
171. M. Siguan - *Inmigración y adolescencia*
172. M. Farrell - *Temas clave de la enseñanza secundaria*
173. M. van Manen - *El tono en la enseñanza*
174. J. Haynes - *Los niños como filósofos*
175. C. Lomas (comp.) - *Los chicos también lloran*
176. S. Schlemenson - *Subjetividad y lenguaje en la clínica psicopedagógica*
178. I. Gilbert - *Motivar para aprender en el aula*
179. M. Alvarado y B. M. Brizuela (comps.) - *Haciendo números*
180. P. Ahumada Acevedo - *Hacia una evaluación auténtica del aprendizaje*
181. R. Perales Ponce (coord.) - *La significación de la práctica educativa*
182. M. A. Peredo Merlo - *Lectura y vida cotidiana*
186. G. Santiago - *Filosofía, niños, escuela*
187. A. Avila, *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*

Alicia Avila

Transformaciones y costumbres en la matemática escolar



PAIDÓS

México
Buenos Aires
Barcelona

Cubierta: Julio Vivas

1ª edición, 2006

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del *copyright*, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

D.R. © de todas las ediciones en castellano,

Editorial Paidós Mexicana, S. A.

Rubén Darío 118, col. Moderna,

03510, México, D. F.

Tel.: 5579-5922, fax: 5590-4361

epaidos@paidos.com.mx

D.R. © Ediciones Paidós Ibérica, S. A.

Diagonal 662-664, p.b.,

08034, Barcelona

ISBN: 968-853-663-6

Página web: www.paidos.com

Impreso en México · Printed in Mexico

A la memoria de mis padres
A Pedro Gerardo

SUMARIO

INTRODUCCIÓN	15
--------------------	----

PRIMERA PARTE

UN MARCO PARA INTERPRETAR LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESCOLAR

1. LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA VÍA DE ACCESO A LO ESCOLAR	23
Introducción	23
El sistema didáctico como objeto de estudio	24
Acercamientos posibles a la matemática escolar	25
El contrato didáctico o la posibilidad de comprender el aprendizaje en la escuela	30
Efectos del contrato didáctico	33
Los contratos, el profesor y la enseñanza	36
La participación del profesor y las formas de regulación didáctica	38
Sucesión de contratos o costumbre: lo habitual en la clase	39
El saber: motivo y reto de la relación didáctica	41
Los niños que devienen alumnos en virtud del contrato didáctico	45
El profesor: lugar de privilegio en la relación didáctica	49

SEGUNDA PARTE

LA MATEMÁTICA MODERNA COMO SABER A ENSEÑAR

2. EL ENTORNO INTERNACIONAL	55
El surgimiento de la nueva matemática	55
Las nuevas matemáticas y la educación primaria	57
3. LA REFORMA MEXICANA	61
El contexto pedagógico en que la reforma vino a instalarse	61
El nuevo currículum	66
Resultados reportados en los países impulsores del movimiento	74
4. ENTRE LAS UNIDADES DE TRABAJO Y LOS SISTEMAS POSICIONALES DE NUMERACIÓN.	
UNA RELACIÓN FUNDADA EN LA OSTENSIÓN	79
Los sistemas posicionales de numeración, un tema nuevo en el currículum	79

La transposición del profesor Agustín	81
El contrato celebrado, basado en la ostensión	87
Los mecanismos de regulación, episodios generalmente diferidos	89
Equilibrio didáctico y pérdida de significación	91
¿A quién se dirige el profesor?	92
De los sistemas posicionales de numeración a los agrupamientos con colores y la división	93
Del contrato sugerido al contrato celebrado	93
Lo nuevo en lo viejo	94
 5. ENTRE EL DESCUBRIMIENTO Y LA COMUNICACIÓN. EN TORNO A LAS UNIDADES DE MEDIDA Y LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN	97
A manera de introducción	97
Las propiedades de la multiplicación: un nuevo contenido y un nuevo texto de saber	98
Una lección sobre las propiedades de la multiplicación	99
La relación inicial con el saber	103
El descubrimiento, noción fundamental en el contrato celebrado	103
Mecanismos de regulación que devienen mecanismos de prevención, o la activación permanente de la memoria didáctica	104
Un viejo tema y otras reglas	105
Un contrato de comunicación, o no sólo el maestro pregunta	107
La ejercitación, siempre después de la comprensión	108
Del <i>saber a enseñar</i> a los <i>saberes enseñados</i>	109
Todos los alumnos cuentan, o la preocupación por una alta tasa de éxito	110
Los resultados de la actividad	111
Los límites de los contratos celebrados	112
 6. EL HÁBITO DE LA EXPLICACIÓN Y EL INTERÉS POR VIEJOS OBJETOS DE SABER	115
La explicación como categoría didáctica	115
El contexto de la relación didáctica	116
Un viejo objeto y un orgullo profesional: la raíz cuadrada	117
Las explicaciones de la maestra Clara	118
La transposición de la maestra Clara	123
Reiteración del esquema explicativo ante otros objetos de saber	123
Participación de los alumnos en la versión didáctica del contenido	126
El contrato celebrado, de explicación «a la medida»	127
El ámbito de participación de los alumnos en la clase	127
Mecanismos de regulación que devienen mecanismos de prevención	128
Del descubrimiento a la explicación «a la medida»	129
Lo permanente en la clase: «la explicación a la medida»	129
Los resultados del contrato	130
Los límites del contrato	131

7. DEVOLVER LA RESPONSABILIDAD A LOS ALUMNOS. MÁS ALLÁ DE DESCUBRIR	
LA VARIACIÓN PROPORCIONAL	135
Introducción	135
El sentido de la devolución	136
Una profesora con orientación constructivista	136
El objeto de enseñanza: la variación proporcional directa	137
Acercamientos iniciales bajo un contrato de devolución	140
Modificación de la situación y exigencia explícita de validación (sexta fase de la actividad)	145
Nuevas restricciones en la tarea y emergencia de nuevas estrategias de resolución (séptima fase de la actividad)	147
Las situaciones diseñadas por la profesora Patricia	148
El aprendizaje pauta el tiempo de la enseñanza	150
¿Por qué es posible la devolución de la tarea?	151
La vinculación con lo institucional	152
Los resultados del contrato	154

TERCERA PARTE

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO TEXTO DEL SABER

8. JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTO DE LA NUEVA REFORMA	161
9. PRINCIPIOS Y SUPUESTOS DEL NUEVO CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS	165
Los orígenes	165
La resolución de problemas como vía del aprendizaje, noción básica de la reforma	168
Los principios curriculares en los libros de texto	170
Constructivismo y resolución de problemas	173
Implicaciones del nuevo texto de saber	174

AL MARGEN DE LA REFORMA

10. LA OSTENSIÓN COMO BASE DE LA ACTIVIDAD. FRENTE A UNA VIEJA CONCEPCIÓN DE LA FRACCIÓN	179
Nota preliminar	179
La ostensión como base de la actividad	180
El objeto de enseñanza: el concepto de fracción	181
Las fracciones en la clase	183
La transposición de la maestra Nidia: de la fracción con múltiples significados a la fracción como partición de la unidad	188
Un contrato basado en la ostensión	191
Para hacer aprender: repetir	192
Los límites del contrato	194

VIEJAS INTERPRETACIONES A NUEVAS PROPUESTAS

11. ENTRE LA COSTUMBRE Y LAS PRESIONES DE LA INNOVACIÓN. LA ENSEÑANZA	
DE LOS NÚMEROS EN PRIMER GRADO	199
Introducción	199
Un viejo tema, una nueva transposición: los primeros números	
mediante el conteo	201
Los protagonistas de la relación didáctica	204
Una clase dedicada a los primeros números	204
Los términos del contrato establecido	208
La relación con los primeros números	211
Sólo una respuesta, o la necesidad de asegurar el cumplimiento	
del contrato	214
La regulación del equilibrio didáctico	216
Las consecuencias del contrato en el aprendizaje posible	216
¿Se ha cerrado el paso a la innovación? O las posibilidades de ruptura	
del contrato	217
A manera de conclusión	220
A LA BÚSQUEDA DE NUEVOS CONTRATOS	
12. UN CONTRATO DE DEVOLUCIÓN DOSIFICADA. EN TORNO A LA DIVISIÓN	225
Introducción	225
Preparación (emocional) para la tarea	226
El marco de la actividad: la división en los programas de los noventa ..	227
La división en la clase del profesor Alfredo	228
La transposición del profesor Alfredo	237
Comparación y confrontación de estrategias: sólo en la red secundaria ..	237
La devolución dosificada, noción que articula el contrato celebrado ...	239
Tiempo de aprendizaje y relación oficial con la división: un aparente	
desajuste temporal	240
El texto como auxiliar en la devolución	240
¿Por qué el profesor devuelve la responsabilidad?, o la confianza	
en los alumnos y en el texto	241
13. HACIA UN CONTRATO BASADO EN LA ARGUMENTACIÓN	245
A manera de introducción	245
Evaluación y validación del saber	246
La fracción, objeto que motiva la actividad en clase	249
El contrato pretendido, de devolución	250
Un intento fallido por recobrar el equilibrio didáctico: puesta	
en común de respuestas y estrategias	251
Un camino seguro: recuperar la responsabilidad	252
Transformación de los términos contractuales mediante la validación ..	254
La argumentación se hace frecuente en la clase	260
La maestra y su interpretación de la acción de validar	262
Resultados del contrato	263

Condiciones que posibilitaron el cambio de reglas	265
---	-----

CUARTA PARTE

UN BREVE RETORNO A LA MATEMÁTICA MODERNA

14. LAS PRÁCTICAS INICIALES, O AL CONTRATO DIDÁCTICO UNA DOBLE SENSIBILIDAD ..	275
Introducción	275
La profesora y el grupo	276
Una lección sobre la recta numérica	276
¿Inexperiencia o rigidez en la relación con el saber?	290
Envejecimiento sólo aparente de los objetos de saber	292
A manera de conclusión: al contrato didáctico una doble sensibilidad	293
EPÍLOGO: LAS COSTUMBRES Y LAS TRANSFORMACIONES	297
La huella de las reformas	299
Más allá de las reformas: nuestros aprendizajes sobre la enseñanza	303
¿Se necesita otra reforma?	305
BIBLIOGRAFÍA	307

INTRODUCCIÓN

A principios de la década de 1970, la enseñanza de las matemáticas elementales se orientaba a ejercitar las funciones mentales y a satisfacer las necesidades de cálculo propias de la vida diaria. Tales pretensiones parecían ajustarse a las ideas y formas de acción de los docentes, y también a las expectativas de los padres de familia. Todo era calma en el sistema de enseñanza mexicano. Sin embargo, inmersos en una ola innovadora mundial, los encargados de la política educativa estatal impulsaron la que sería una reforma de grandes dimensiones: la incorporación de la «matemática moderna» en la educación elemental. Esa reforma pretendía poner a los niños en contacto con la *verdadera matemática* y ya no sólo con la aritmética y la geometría; el aprendizaje del cálculo utilitario sería sustituido por el conocimiento de las estructuras matemáticas. De este modo, durante dos décadas, los programas y textos oficiales incluyeron los conjuntos, los sistemas posicionales de numeración, las propiedades de las operaciones, la lógica y la probabilidad como medios para vincular a los niños con los aspectos más sobresalientes de la ciencia que por primera vez entraba a las escuelas.

Veinte años más tarde, con un conocimiento difuso acerca de lo que pasaba en las escuelas mexicanas, pero contando con los resultados y las críticas a la matemática moderna surgidas en los países que la habían impulsado originalmente, se decidió volver a modificar los programas y textos oficiales. En esta oportunidad, el objetivo era que los niños aprendieran matemáticas resolviendo problemas. La postura era nuevamente radical, aunque con un sentido distinto del que diera origen a la reforma de los años setenta. La novedad principal residía en las nuevas relaciones que se buscaba impulsar con los saberes matemáticos. Actualmente dicha propuesta sigue en vigor. En las páginas siguientes se analiza la actividad matemática escolar en los dos periodos referidos: la que se desarrolló en el contexto de la matemática moderna y la que se realiza en el marco del aprendizaje a través de la resolución de problemas.

En los últimos años, los didactas han reconocido el papel central del docente en el proceso educativo. Podría decirse incluso que se puso de

moda estudiar lo que se ha dado en llamar el pensamiento de los profesores. A partir de los datos que aquí analizo, postulo una relación importante entre las formas de pensar y de actuar de los docentes. No obstante, conocer el pensamiento de los profesores resultaba insuficiente en función del objetivo que me había propuesto, pues no permitiría mirar sino desde uno de sus ángulos la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar. Mi interés era analizar desde una perspectiva más sistémica lo que ocurre en la escuela con las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. La didáctica de las matemáticas en su versión francesa me proporcionó las herramientas para hacerlo. Con base en ella, pude identificar (y observar) las caras que convenía analizar en los eventos que sucedían durante las clases. Dos autores me resultaron especialmente esclarecedores: Guy Brousseau e Yves Chevallard. De hecho, sus trabajos constituyen el basamento teórico de este libro. Así, en el corazón del análisis están el profesor y los alumnos en su interacción con los saberes matemáticos, esto es, estableciendo una relación didáctica.

Ahora bien, es posible suponer que, aunque en escasa medida, las directrices oficiales tienen alguna repercusión en la vida en las escuelas, en los recortes y adecuaciones que los objetos de enseñanza sufren, en las relaciones didácticas que se establecen, en los contratos que se celebran. Pero las raíces de la acción no se encuentran sólo ahí, sino también en una cultura escolar que remite lo mismo al sentido común que a la historia de las ideas educativas y a la diversidad de explicaciones existentes sobre el aprendizaje. En el extremo, junto con los profesores que buscan asumirlas, otros se declaran al margen de las reformas. Los fundamentos de su acción se encuentran en la tradición escolar, en la historia de su formación profesional, en los saberes que construyen en cursos de actualización o en las lecturas que ocasionalmente realizan; también en los resultados que corroboran cotidianamente en su labor. Es probable que ésta sea la fuente más importante de su aprendizaje y sus creencias.

En el examen de los hechos cotidianos me resultó fundamental una cuestión vinculada a lo anterior: ¿cómo es que proyectos educativos que vistos desde fuera son ineficaces (en el sentido de que no generan los aprendizajes social o normativamente esperados) se mantienen funcionando en las escuelas? Algunos de ellos, incluso, parecen ser perennes. ¿Por qué lo que socialmente no goza de legitimidad (como el aprendizaje memorístico o, en el límite, la ausencia total de aprendizaje) funciona en muchas clases? ¿Por qué los maestros continúan utilizando esas propuestas de enseñanza? ¿Es que acaso se sienten satisfechos con los resultados que obtienen? Responder tales preguntas implica caracterizar los contratos que los profesores celebran para ver cumplidas sus intenciones didácticas, pero también, y sobre todo, descubrir los mecanismos que permiten que esos

contratos mantengan su viabilidad y evitar su fracaso.

Los contratos didácticos definen la relación de los alumnos con los objetos de enseñanza; también delinean las formas de mostrar que algo se sabe y de hacer que las muestras de saber aparezcan. Las relaciones establecidas con el fin de que ciertas marcas de saber emerjan están lejos de responder a la dicotomía *enseñanza tradicional-enseñanza moderna* con que comúnmente se piensa la cotidianidad de la clase de matemáticas. De la naturaleza de dichas relaciones es de lo que trata este libro. Para realizar la indagación que le da sustento me valí de dos estrategias de recolección de datos:

- la observación de los sucesos escolares en el espacio delimitado por lo que comúnmente se denomina *clase de matemáticas*.
- entrevistas a profundidad con los profesores de los grupos observados.

El trabajo de observación se llevó a cabo, por periodos cortos, en el transcurso de varios años. Una buena parte de esta labor fue realizada entre 1988 y 1991, teniendo como marco de las acciones docentes los programas y libros de texto derivados de la que se conociera como matemática moderna. Otra parte de la recolección de datos se llevó a cabo entre 1994 y 1997, periodo posterior a la reforma curricular que, como señalé, introducía la resolución de problemas como vía del aprendizaje.

En el primero de estos periodos se buscaba promover procesos fundamentales de la ciencia matemática: la abstracción, la formalización y el razonamiento en situaciones reales e hipotéticas. El *texto del saber*, si bien obedecía principalmente a criterios derivados de la disciplina misma, estuvo también construido (al menos metafóricamente) a partir de una noción fundamental: «Que los niños aprendan descubriendo». En tal sentido, la memoria colectiva no ha ponderado cabalmente tal reforma; esta idea ha sido omitida en el recuerdo del periodo. Acaso porque la novedad de los contenidos era deslumbrante, acaso porque no se hizo sino escasa difusión de las cuestiones pedagógicas. Como quiera que sea, no fue respondida con rigor la pregunta de qué tanto las ideas ahí previstas pasaron a constituir parte de la actividad matemática escolar. Por lo mismo, no contamos con conocimiento sistemático acerca de la interpretación y la inserción de tales ideas en las escuelas. Saber con qué objetos matemáticos se puso en relación a los alumnos y qué contratos didácticos derivaron de tal marco de saber, o si la distancia entre el saber propuesto y la cultura matemática escolar (como después se dijo) fue excesiva, son cuestiones que abordo en este libro.

La segunda propuesta curricular que se analiza tenía en la base un supuesto acerca de lo que ocurría en las escuelas: que la enseñanza domi-

torno a la matemática moderna, se presentan algunas reflexiones derivadas de una visión global del conjunto de los datos.

Termino esta introducción no sin antes destacar que lo más común, cuando se habla de la enseñanza de las matemáticas, es referirse sólo a una parcela de los hechos. Si de la enseñanza tradicional se trata, se destacan su pobreza, sus límites y sus fracasos. Si se habla del aprendizaje mediante problemas, se magnifican los logros. Hoy los magros resultados que las evaluaciones nacionales e internacionales ponen de manifiesto llaman a moderar el entusiasmo por esta forma de enseñar. En este libro, como dije antes, analizo con detenimiento esa realidad que en mucho desconocemos. Pretendo ir más allá de las oposiciones o las creencias; más allá también de los mitos y prejuicios con que se juzga la enseñanza.

PRIMERA PARTE

UN MARCO PARA INTERPRETAR LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA ESCOLAR

Capítulo 1

LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA VÍA DE ACCESO A LO ESCOLAR

INTRODUCCIÓN

Presentar los hechos observados en el salón de clases en un discurso coherente a la vez que sugerente y válido no es una labor sencilla. Definir lo relevante, lo que se puede omitir, la forma de establecer el discurso; dotar de sentido (nuestro sentido) sin traicionar el que dieron sus autores a los acontecimientos resulta un reto permanente en la interpretación. No sólo por la posibilidad —siempre cercana— de trivializar los hechos, de no mirarlos en su justa dimensión, de dejarlos ir o de magnificarlos. También por la tentación de ocultar los que no se ajustan al interés de quien los examina, o de sobreseleccionarlos con el fin de montar una historia interesante porque lo observado a menudo parece insípido. Y es que en un inicio muchas cosas resultan carentes de sentido o de valor; sólo la mirada de conjunto —posible únicamente ya avanzado el trabajo— permite que cada uno de los hechos tome su lugar.

Por otra parte, el análisis de la *actividad matemática escolar* es una labor escasamente realizada. De ahí que al iniciar este trabajo eran muy pocos los elementos que indicaran por dónde transitar. ¿Qué categorías utilizar?, ¿qué ejes de análisis tender?, ¿cuáles hechos recuperar? fueron preguntas por completo abiertas que dieron lugar a ensayos y rodeos. El cuaderno de campo siempre estuvo lleno; en cambio, aquel en que se ordenarían los argumentos, la trama, estuvo vacío durante largo tiempo; luego comenzó a llenarse de distintas maneras. Comprobé que era posible armar diversas historias a partir de los mismos acontecimientos. Había que escoger alguna.

La teorización francesa denominada *didáctica de las matemáticas* se constituyó a la postre en herramienta esencial para emprender el esfuerzo de entender la actividad matemática tal como tiene lugar en las escuelas comunes, a las que asisten niños y profesores también comunes. El lector en-

situación escolar. De dicha situación provienen múltiples determinantes que orientan las conductas de los participantes y signan el curso de los acontecimientos en clase. El sistema debe considerarse, pues, en la situación efectiva—institucional— en que se encuentra ubicado.

A la formulación de este triángulo precede una larga historia según la cual el enseñar matemáticas empezó por ser considerado un arte, para percibirse luego como una cuestión cuyas dificultades provenían de las deficiencias de los alumnos o las dificultades intrínsecas a los conceptos.³ De esto hablo enseguida.

ACERCAMIENTOS POSIBLES A LA MATEMÁTICA ESCOLAR

El acercamiento cognitivo: la atención en la relación alumno-saber

En reunión realizada en Palo Alto, California, por el International Study Group for Mathematics Learning en 1966 —en un momento en que el espíritu de cambio estaba en plena ebullición—, se señaló la carencia de estudios específicos sobre el aprendizaje y la construcción de conceptos matemáticos. Se reconocían como fundamentales las aportaciones de Piaget, o se referían las etapas del aprendizaje sugeridas por Bruner o por Dienes, a la vez que se ponía el acento en la necesidad de estudios más detallados en torno al repertorio de conceptos específicos que los niños adquieren en la escuela.⁴ La preocupación era contar con elementos para ponderar las bondades de la matemática moderna y los límites que el intelecto de los niños le impondría en las aulas. Estos estudios detallados comenzaban a desarrollarse pero no desde una perspectiva psicológica, sino desde una más práctica; consistían en experimentar la utilidad de enseñar nociones elementales sobre conjuntos, sobre lógica o sobre el uso de un enfoque algebraico en la aritmética utilizando regletas de distintos tipos. Se observaba en todo ello la distancia aún existente entre los enfoques que por una parte los psicólogos y por otra los profesores y matemáticos le imprimían al estudio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Años más tarde el panorama cambió. Desde la mitad de la década de los setenta, el estudio de los procesos cognitivos a que da lugar la apropiación de los saberes matemáticos constitutivos del currículum ocuparía un lugar esencial en la reflexión sobre la matemática escolar. Gérard

³ Véase J. Gascón, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica».

⁴ Véase ISGML, *Mathematics in primary education*.

Vergnaud, autor destacado de esta corriente, es considerado el primer psicólogo que abordó la cuestión de los contenidos escolares desde la perspectiva de la psicología del desarrollo cognitivo.⁵ En 1976 apareció su artículo «Structures additives et complexité psychogénétique», primer texto en francés que, según A. Rouchier,⁶ expresa el interés por tal aproximación.⁷ «La solución de problemas de aritmética elemental no ha sido muy estudiada por los psicólogos», dice la frase inicial de tal artículo. El interés de Vergnaud y sus colaboradores sería desde entonces el estudio de los procesos de construcción de conocimientos matemáticos escolares tales como las operaciones aritméticas, la noción y aritmetización del volumen o la función lineal, entre otros. Una culminación de tales trabajos es la *teoría de los campos conceptuales*, la cual en sus propios términos es «una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real, que permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual».⁸

La teoría de los campos conceptuales, en palabras de Vergnaud, «pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios básicos para el estudio del desarrollo y el aprendizaje de competencias complejas, principalmente las que derivan de las ciencias y las técnicas».⁹ A decir de su propio autor, no es en sí una teoría didáctica pero, ya que se centra en el aprendizaje, tiene interés para la didáctica.

Ahora bien, considerado el sistema didáctico en su conjunto (M-A-S), el interés de los cognoscitivistas se sitúa en el subsistema *alumno-saber*, marginándose del análisis la participación del profesor, la intencionalidad didáctica y los fenómenos que la acompañan.

Los aportes cognoscitivistas fueron esenciales en el avance de la reflexión sobre la enseñanza, especialmente por el hecho de haber posibilitado la ruptura con la didáctica «precientífica», la cual consideraba la enseñanza (de las matemáticas) como un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada y regulada. Se suponía, en tal concepción, que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por su mentor.¹⁰ El propio Brousseau, padre de una corriente que agrega a las razones de la cognición las razones de la institu-

⁵ Véase J. Brun, «Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques».

⁶ Véase A. Rouchier, «Naissance et développement de la didactique des mathématiques».

⁷ El artículo apareció en la *Revista Francesa de Pedagogía*, en coautoría con Catherine Durand.

⁸ G. Vergnaud, «La théorie des champs conceptuels», p. 133.

⁹ *Idem*.

¹⁰ J. Gascón, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica», p. 9.

ción —y que trataré adelante—, afirma que las adquisiciones espontáneas de los conocimientos no son resultado de una intervención didáctica, pero la reproducción de sus condiciones es potencialmente un medio de enseñarlas. Su estudio, entonces, está en el corazón de la didáctica.¹¹

Empero, los límites de esta aproximación han sido señalados. Josep Gascón ha afirmado que los estudios cognoscitivistas en matemáticas dieron lugar a una didáctica «clásica», centrada en el aprendizaje del alumno, sus concepciones, sus preconceptos, sus errores, y que «al centrar el análisis en el alumno (o en el profesor en referencia al alumno), el enfoque clásico aborda su objeto de estudio de una forma fuertemente condicionada por los fenómenos psicológicos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al tiempo que tiende a poner en segundo plano los fenómenos específicamente didáctico-matemáticos»,¹² en el sentido desarrollado por G. Brousseau o Y. Chevallard. Tal acercamiento ha limitado el análisis de la participación de los alumnos y del profesor en la relación didáctica.

Una mirada más comprehensiva: la teoría de las situaciones didácticas

Sería Guy Brousseau quien miraría el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva más comprehensiva vinculada a lo escolar. Fundador del campo de la didáctica de las matemáticas, su primer artículo relevante sobre el tema apareció en 1972 bajo el título «Procesos de matematización», en el que expresaba su deseo de precisar el proceso pedagógico que postulaba como necesario para obtener un buen conocimiento de la matemática. Desde entonces delinearía los elementos básicos de sus posteriores trabajos, cuyo objeto de reflexión serían las «situaciones didácticas», pues su interés radicaba en conocer las condiciones de producción del conocimiento matemático en situación escolar. De este modo, si bien para Brousseau «el alumno aprende al adaptarse a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. [Y] ese saber, fruto de la adaptación del alumno al medio, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje»,¹³ tal afirmación le resultaría incompleta porque desde su perspectiva, un medio sin intenciones didácticas es manifiestamente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos que se desea

¹¹ G. Brousseau, «Perspectives pour la didactique des mathématiques», p. 52.

¹² J. Gascón, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica», p. 13.

¹³ G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, pp. 296-297.

que adquiriera. Para él, la educación debería provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una selección cuidadosa de los problemas y situaciones que se le propusieran.¹⁴ Por ello, lo que pondría en el corazón del análisis sería no la situación en sentido amplio, sino la situación didáctica, entendida como «un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto *medio* (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución».¹⁵ La teoría de las situaciones didácticas implicó una nueva concepción de alumno. El alumno que escucha al profesor, o que se deja guiar, es sustituido por el alumno que interactúa directamente con la situación promotora de un cierto conocimiento. La vinculación del alumno con el *medio* corre por cuenta del profesor, quien al hacerlo «devuelve» a los niños la responsabilidad de su aprendizaje. Para que esto se logre, dice Brousseau, en principio la situación planteada deberá «obligar» a producir un cierto conocimiento a manera de estrategia de resolución. Es precisamente el estudio (experimental) de las situaciones promotoras de conocimientos específicos lo que dará sustancia a la teoría brousseauiana. Empero, advierte su autor, «considerar que el *medio* es la fuente de la aceptación de la responsabilidad es insuficiente; aceptar la interacción con la situación y las reglas de la interacción no es posible sino por la mediación de un *contrato didáctico*»¹⁶ portador de derechos y obligaciones para maestro y alumnos. Esta última noción es precisamente la que hace explícita la ubicación del sistema Maestro-Alumno-Saber (M-A-S) en el contexto escolar y la que tiende un puente con las situaciones de enseñanza ordinarias, más allá de las planeadas con ánimo experimental.

La aproximación antropológica

Yves Chevallard introdujo un enfoque de carácter francamente antropológico centrado en el saber, poniendo de manifiesto la imposibilidad de interpretar adecuadamente la actividad matemática propia de la escuela

¹⁴ Véase G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*.

¹⁵ G. Brousseau, «Ingénierie didactique», cit. por G. Gálvez, *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano*. Conviene señalar que el *medio* implica todo lo que actúa sobre el alumno o sobre aquello en que recae la acción del alumno; desempeñaría, de acuerdo con esta teoría, un papel fundamental en el aprendizaje en tanto promotor de adaptaciones a propósito de un objeto de enseñanza.

¹⁶ G. Brousseau, «Le contrat didactique: le milieu», p. 322.

sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas.¹⁷

Coherente con su orientación antropológica, Chevallard afirma estar interesado no tanto en el funcionamiento del sistema didáctico (M-A-S) sino en las condiciones de posibilidad de ese funcionamiento. Sostiene que, con un enfoque distinto del que «obsesiona» a Guy Brousseau —quien busca analizar las condiciones de buen funcionamiento del sistema didáctico—, él está fascinado por el estudio de las condiciones de posibilidad de su funcionamiento, a secas, sea éste bueno o menos bueno.¹⁸

La postura antropológica tiene una consecuencia fundamental en el examen de lo escolar, porque al analizar lo escolar se trata de considerar lo cognitivo pero sin limitarse a ello, porque éste es un ámbito donde el sujeto cognoscente funciona de una manera particular derivada de su participación en el sistema didáctico.¹⁹ En efecto, la situación escolar agrega a las razones de la cognición las propias de la institución, las derivadas de la intención de hacer que alguien aprenda algo. De las tensiones entre esta doble racionalidad dará cuenta la noción de contrato didáctico —clave en los desarrollos de Guy Brousseau—, que dota de un carácter antropológico a su teoría.

En lo que podría considerarse un tercer periodo de su teorización, Chevallard introduce la idea de que la enseñanza de las matemáticas debe entenderse como una actividad humana, en lugar de considerarla sólo como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo.²⁰ La actividad matemática, según esta perspectiva, incluye tres cuestiones principales:

- * Utilizar matemáticas conocidas (para lo cual no se necesita una enseñanza, ni aun estando en la escuela).
- * Aprender y enseñar matemáticas (cuestión que se hace necesaria cuando alguien enfrenta un problema y no tiene aún las herramientas útiles para hacerlo).
- * Crear matemáticas nuevas.²¹

¹⁷ Véase J. Gascón, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica».

¹⁸ Véase Y. Chevallard, «Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique».

¹⁹ Y. Chevallard, «Le concept de rapport au savoir».

²⁰ Véase Y. Chevallard, «Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique» y J. Gascón, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica».

²¹ Véase Y. Chevallard, M. Bosch y J. Gascón, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*.

En este marco, la actividad matemática escolar —aunque los incluye— no se reduce a los actos de enseñar y aprender. Esta actividad implica en términos más amplios un proceso de estudio que —aunque generalmente es orientado por el profesor— no se limita a las enseñanzas de éste. En ese proceso, los alumnos pueden utilizar matemáticas que ya conocen, pueden aprender matemáticas (mediante la enseñanza) y pueden crear matemáticas (si crear se entiende en el sentido escolar de producir algo que no es nuevo para otros pero sí para el alumno). Tanto el enseñar y el aprender como el aplicar y —aunque con menos frecuencia— el crear tienen lugar como parte de la actividad matemática que se desarrolla en las escuelas.

EL CONTRATO DIDÁCTICO O LA POSIBILIDAD DE COMPRENDER EL APRENDIZAJE EN LA ESCUELA

El contrato didáctico, noción que sitúa el aprendizaje en la institución escolar

Brousseau —siempre interesado en la intencionalidad de enseñar y sus efectos— explicita el sentido de la situación didáctica diferenciándola de una *situación-problema* común:

Una situación es una situación-problema que necesita una adaptación, una respuesta del alumno. En particular, si la necesidad de esta respuesta ha sido el objeto de una consigna precisa, si el alumno tiene un proyecto, un objetivo declarado, tendremos una «situación-problema estricta» (o formal), e incluso un «problema» si el medio es reducido a un enunciado y si ninguna restricción material, debida a ciertos aspectos físicos de la situación, ni ninguna condición psicológica o social modifican la interpretación. Una situación didáctica es una situación en la que se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar. En general *se puede distinguir, en una situación didáctica, al menos una situación-problema y un contrato didáctico*.²²

Es decir, la situación porta condiciones que implican una adaptación del sujeto. Pero es el contrato didáctico el que obliga a que el aprendizaje (la adaptación) se produzca. De este modo, la situación didáctica vincula al alumno con el saber en tanto que sujeto epistémico y con la intención de enseñanza en tanto que sujeto didáctico.

La noción de contrato didáctico introduce la posibilidad de ver, más

²² G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, p. 155; las cursivas son mías.

De acuerdo con Brousseau, el alumno se introduce en este juego porque las acciones repetidas del maestro le permiten «captar» el sentido de la actividad didáctica. El sentido que se atribuye a una situación específica «depende del resultado de las acciones repetidas del contrato didáctico [...]. Éste se presenta, pues, como la huella de exigencias habituales del maestro sobre una situación particular».²⁶

Brousseau introdujo el concepto de contrato como una causa posible del fracaso de los niños que tienen dificultades de aprendizaje o falta de gusto por las matemáticas pero que se desempeñan bien en otras disciplinas. El concepto permitió reexaminar las causas del fracaso: éstas no serían ya consideradas exteriores al proceso de enseñanza sino constitutivas de éste.²⁷ Al cuestionar la dinámica de los procesos y las relaciones didácticas, los postulados brousseauianos redimensionaron las explicaciones cognoscitivistas —asociadas a las dificultades en la comprensión propias de los sujetos que aprenden— como explicación del fracaso escolar.

Pero la noción de contrato sería luego refinada por el propio Brousseau: «[en todas las situaciones didácticas] se establece una relación que determina —*explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente— lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer* y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato [...] lo que nos interesa de ese contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico».²⁸

En esta reformulación, a la vez que se destaca el interés por el análisis de aquello asociado a la especificidad del conocimiento matemático, se señala el carácter parcialmente implícito del contrato didáctico y se agrega un elemento: una cierta distribución de responsabilidades entre el profesor y los alumnos. Chevallard, por su parte, pone énfasis en que el contrato establece derechos y obligaciones de maestro y alumnos en relación con cada contenido escolar. En tal sentido, dice, lo que sabemos sobre el sujeto cognoscente no siempre se aplica de forma directa a las acciones o respuestas del alumno, ya que en muchos casos éstas son sólo explicables recurriendo a las pautas del contrato didáctico.²⁹

Desde la perspectiva anterior, en una situación escolar la tarea del alumno consiste en proporcionar respuestas según la lógica del contrato didác-

²⁶ G. Brousseau, «Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire», cit. por Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

²⁷ *Ibidem*, p. 100.

²⁸ G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, p. 299.

²⁹ Véase Y. Chevallard, *Sur l'analyse didactique*, pp. 12 y ss. (Las cursivas son mías.)

tico (del juego institucional),³⁰ que no necesariamente es igual a la lógica profana, es decir, la del sujeto libre de las sujeciones didácticas.

En síntesis, el contrato didáctico es un concepto que —portador de la obligación de «aprender para la institución»— permite explicar la interpretación que el sujeto aprendiente (el niño que deviene alumno) hace de la situación escolar y la forma en que su participación y sus respuestas se ven afectadas por tal interpretación. De este modo, el concepto pone de relieve y explica la tensión entre las razones intelectuales y didácticas que subyacen a las conductas y respuestas que los niños ofrecen en la escuela, a las formas en que participan en la relación didáctica. Estudios recientes corroboran el predominio de la sensibilidad al contrato didáctico por sobre la lógica cognoscitiva en el contexto escolar. Particularmente entre los niños «menos aptos».³¹ En efecto, Sarrazy mostró, mediante un dispositivo experimental, el hecho de que respuestas numéricas a problemas del tipo «La edad del capitán»,³² que son absurdos, derivan no de la incompetencia intelectual de los alumnos sino de un efecto del contrato didáctico que los obliga a ofrecer respuestas, cualquiera que sea la situación-problema a la que se vean enfrentados.

EFFECTOS DEL CONTRATO DIDÁCTICO

Los contratos que se establecen para hacer posible la relación didáctica —según afirma Brousseau— producen diversos efectos, con frecuencia desfavorables al alumno, pues algunos hacen incluso desaparecer los aprendizajes.

Valiéndose de la metáfora, Brousseau destaca algunos de estos efectos. Por ejemplo, mediante la expresión *efecto Jourdain* hace referencia a la sobrevaloración intelectual de las acciones de los alumnos que a menudo realizan los profesores buscando justificar su propia acción. Tal efecto es llamado así en referencia a la escena de *El burgués gentilhomme* de Molière, donde —gracias al maestro de filosofía— Jourdain descubre que ha hablado en prosa durante cuarenta años!:

³⁰ Véase Y. Chevallard, *Sur l'analyse didactique*.

³¹ Véase B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

³² «En un barco hay 26 borregos y 10 cabras, ¿cuál es la edad del capitán?». Equipo del Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Grenoble, *Quel est l'âge du capitaine?*, cit. por E. Baruk, *L'âge du capitaine*, p. 23.

JOURDAIN.—No quiero prosa ni versos (para escribir una carta a mi enamorada).

PROFESOR DE FILOSOFÍA.—Ha de ser una de las dos cosas.

JOURDAIN.—¿Por qué?

PROFESOR DE FILOSOFÍA.—Por la razón, señor, de que para expresarse no hay más que prosa y verso.

JOURDAIN.—¿Nada más?

PROFESOR DE FILOSOFÍA.—No: cuando no es prosa es verso y cuando no es verso es prosa.

JOURDAIN.—Y cuando se habla, ¿cómo se habla?

PROFESOR DE FILOSOFÍA.—En prosa.

JOURDAIN.—Entonces, cuando digo: «Nicolasa, tráeme las zapatillas y el gorro de dormir», ¿hablo en prosa?

PROFESOR DE FILOSOFÍA.—Sí, señor.

JOURDAIN.—Pues a fe mía que hace más de cuarenta años que me expreso en prosa sin saberlo, y os estoy agradecido por habérmelo enseñado.³³

A la manera del profesor de filosofía, afirma Brousseau, los profesores dicen reconocer conocimiento en los comportamientos y respuestas de sus alumnos, aunque éstas estén sustentadas en causas banales, totalmente ajenas al conocimiento. A decir de Brousseau, las estructuras matemáticas introducidas en la escuela en los años setenta fueron «una potente incitación a este juego», y el efecto tocó a investigadores, profesores y planeadores.³⁴ Las palabras de N. Picard —activa promotora de la matemática moderna en la educación primaria francesa— reflejan claramente el efecto identificado por Brousseau:

Si le damos a un niño de dos años un juego de huevos que pueden ensamblarse uno dentro de otro, se dará cuenta poco a poco de que existe un orden que debe respetar, sin el cual el juego es imposible, que los elementos van en pares que se pueden ensamblar, que cada elemento de un par está diferenciado (hay uno puntiagudo y uno achatado). Es extremadamente ilustrativo observar cómo se da ese aprendizaje natural. Este aprendizaje natural es constructivo, el niño descubre inconscientemente en él las primeras nociones intuitivas de orden y de clase, él lo utiliza para adquirir por sí mismo una técnica y nosotros nos impactamos por la lógica de esa técnica. El niño, jugando, descubre las estructuras y al mismo tiempo estructura su espíritu, lo que le permitirá abordar, construir, aprender y, más tarde, abstraer estructuras más complejas.³⁵

³³ Molière, *El burgués gentilhombre*, p. 53.

³⁴ Véase G. Brousseau, «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», p. 42.

³⁵ N. Picard, *Des ensembles à la découverte du nombre*, p. 8.

El *deslizamiento metacognitivo* —otro de los efectos identificados por Brousseau— se refiere al hecho de que el profesor toma las explicaciones y los recursos para la enseñanza como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático. Para Brousseau, la constatación más llamativa de este efecto deriva también de la reforma de las matemáticas modernas: es el uso de gráficos para enseñar las estructuras matemáticas. La teoría de conjuntos, dice Brousseau, se introdujo como medio de enseñanza, pero se convirtió en objeto de ésta y se sobrecargó de convenciones y lenguajes que también fueron enseñados. Los niños, coincidiría Jossé Adda, aprendieron a dibujar diagramas de Venn; en algunos países se exageró más que en otros, pero todos fueron víctimas de la *vennogramía*, que en vez de significados trajo nuevos automatismos.³⁶

Pero quizá el efecto más llamativo producido en el proceso de comunicación del saber es el que, a partir de una analogía con la comedia de Marcel Pagnol, Brousseau denomina *Topaze*. Lo ilustra con un pasaje que se desarrolla más o menos así:

Topaze, profesor de francés, hace un dictado a un mal alumno. No pudiendo aceptar errores demasiado burdos y no pudiendo tampoco indicar directamente la ortografía solicitada (pues ésta es la muestra del aprendizaje), «sugiere» la respuesta disimulándola bajo códigos didácticos cada vez más transparentes: «...des moutons étaient réunis dans un parc...» era la frase objeto del dictado. En principio se trata, para el alumno, de un problema de ortografía y de gramática, pero el alumno es incapaz de escribir correctamente la frase; entonces Topaze dicta: «des moutonsses étai-hun...».³⁷ El problema fue por completo cambiado. Frente a los fracasos repetidos, Topaze mendiga una señal de adhesión y negocia a la baja las condiciones en las cuales el alumno terminará por poner la «s». Se adivina [dice Brousseau] que Topaze podrá continuar exigiendo la recitación de la regla, y después haciéndola copiar un cierto número de veces. El derrumbe completo del acto de enseñar estaría representado por una simple orden dada por Topaze: poner una «s» a «moutons».³⁸

Pero en vez de eso la tarea se simplifica a un grado tal que la actuación de Topaze se convierte en un «decir sin decir», y la respuesta que deberá dar el alumno está determinada de antemano. Mediante preguntas seleccionadas con este fin, aquélla se induce a tal grado que es imposible no proporcionarla. Pero al utilizar preguntas cada vez más simples, los

³⁶ Véase J. Adda, «La réforme des mathématiques modernes».

³⁷ En francés, las palabras *moutons* y *mouton* se pronuncian igual. No es pues la pronunciación, sino el conocimiento del sentido de la frase y de las reglas de la gramática, lo que permitiría escribir la *s* correspondiente al plural.

³⁸ G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, p. 289.

conocimientos necesarios para producir las respuestas también se simplifican. Cuando los conocimientos previstos desaparecen tiene lugar el efecto Topaze. Este efecto, dice Brousseau, es una muestra de impotencia del profesor, quien, aun estableciendo las reglas de la interacción y mostrando en ello la condición asimétrica en su relación con los alumnos, no puede hacer nada si el alumno no aprende, pues el aprendizaje es un acto personal³⁹ que deriva de acomodaciones y nuevos equilibrios frente a un objeto de saber.

Como se ve, los «efectos» a que da lugar la transmisión del saber, que pueden imaginarse asociados a los contratos que habitualmente se celebran en las escuelas, desplazan la acción del alumno y del maestro a un registro distinto del intelectual. Es evidente, cuando tienen lugar el efecto Topaze o el efecto edad del capitán, que no es el sujeto epistémico —que busca obtener una solución mediante la interacción con un objeto de saber o con una situación que le presenta un problema— sino el «sujeto didáctico» orientado por las reglas del contrato, quien busca responder al profesor aun sin ninguna base de significación. Se advierte también —en casos como estos— que no es el aprendizaje efectivo sino las respuestas, las que preocupan y bastan; se sustituye la lógica del aprendizaje por la lógica de las respuestas.

En síntesis, el término *efecto*, según se lee en el diccionario, puede entenderse como resultado producido por una causa, o como consecuencia de la aplicación de una decisión. Pero también es posible relacionarlo (particularmente en el arte) con la búsqueda de una impresión, con la creación de una ilusión. Es este último sentido el que denotan los *efectos* identificados por Brousseau, pues, en conjunto, tienen un elemento común: la ilusión, la ficción del aprendizaje. De manera paradójica, como veremos después, es precisamente la ficción que las acompaña la que autoriza la permanencia e incluso la perennidad de ciertas formas de enseñanza en las escuelas.

LOS CONTRATOS, EL PROFESOR Y LA ENSEÑANZA

La incorporación del profesor en la teoría brousseauiana

El contexto en el que emergió la didáctica de las matemáticas marcaría su centración en el análisis de las conductas del alumno frente a las situaciones didácticas. Edificada sobre la base de la teoría constructivista del conocimiento, tuvo una influencia profunda de la psicología genética, ma-

³⁹ G. Brousseau en entrevista realizada por Alicia Avila.

nifestada en el lugar central dado al alumno, y el profesor pagó el precio de que el estudiante resultara fundamental en el nivel del modelaje y de la teoría.⁴⁰

En efecto, hasta los años noventa Brousseau llevó al primer plano de su teorización el examen de la participación del profesor en la relación didáctica, que hasta el momento se había hecho presente sólo de manera metafórica a través de la noción de contrato didáctico. En 1991, en colaboración con J. Centeno, propuso considerar la participación del profesor mediante la noción de «memoria didáctica», que «se manifiesta en el proceso de enseñanza por la utilización de informaciones y datos personalizados, contextualizados, temporalizados y no universales».⁴¹ La memoria didáctica conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos, sin cambiar su sistema de decisión (el contrato en curso). Su uso trae como consecuencia una modificación de la relación entre los alumnos y el saber en juego.

Si bien la memoria didáctica —siguiendo a Brousseau y Centeno— puede ser utilizada en sentido negativo (el profesor puede actualizar los hechos del pasado para hostigar a los alumnos o para trivializar los problemas y situaciones planteados), empleada en sentido positivo permite imaginar una enseñanza adaptada a cada momento a las necesidades y posibilidades de cada alumno en función de proyectos educativos diversificados y variables. Esto significaría crear mejores condiciones que permitan que las evoluciones (de los conocimientos) se den de forma más segura y rápida. Es por ello que, en general, los profesores «con más memoria» colaboran positivamente en la comprensión alcanzada por sus alumnos.

En 1995, Brousseau inició desde otra perspectiva el análisis del ejercicio de la responsabilidad del profesor en la relación didáctica. Lo hizo introduciendo la noción de regulación, no sin antes plantear algunas consideraciones teóricas al respecto:

La teoría de las situaciones didácticas intenta recuperar observables derivándolas —a veces bastante metafóricamente— de modelos matemáticos, más precisamente de los autómatas [...] el autómata no modela a uno de los actantes (el profesor o el alumno, por ejemplo) sino sus interacciones. Esa decisión facilita un enfoque sistémico del objeto estrictamente didáctico, pero tiene el inconveniente de hacer desaparecer los hiposistemas (los actantes, *el medio*) como modelos independientes. De tal suerte que no hay que hablar propiamente de modelo de enseñanza en la teoría de situaciones. Debemos entonces buscar identificar las «realidades» que le conciernen por las perturbacio-

⁴⁰ Véase M. Artigue, «Ingeniería didáctica», pp. 46-47.

⁴¹ G. Brousseau y J. Centeno, «Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant», p. 203.

nes y las regulaciones que produce y asegura en el funcionamiento del sistema didáctico.⁴²

Coherente, pues, con el acercamiento sistémico que sostendrá en toda su argumentación conceptual, el creador de la teoría de situaciones considera que la enseñanza se caracteriza por las restricciones que acepta y por las que impone, y modela la participación del profesor en términos de los contratos didácticos que, hipotéticamente, regulan su acción. Lo que caracteriza a cada contrato es una cierta distribución de la responsabilidad entre el profesor y el alumno. El cumplimiento de tales responsabilidades se sustenta en la posibilidad de reconocer ciertos índices de que la acción ha producido un cierto efecto. Esos índices pueden ser la aparición de determinados comportamientos o la producción de ciertas respuestas.⁴³

Las distintas responsabilidades que conforme a esta teorización puede asumir el profesor dan lugar a diversos contratos: *no didácticos*, *ligeramente didácticos* y *fuertemente didácticos*. La menor responsabilidad sería asumida en los contratos *no didácticos*. Adelante se amplía este punto.

LA PARTICIPACIÓN DEL PROFESOR Y LAS FORMAS DE REGULACIÓN DIDÁCTICA

Conforme a la teoría brousseauiana, la acción del profesor no consiste sólo en poner en marcha un contrato y sostenerlo «cueste lo que cueste». Por una parte, el contrato didáctico es específico del conocimiento en juego (a cada situación corresponde un contrato) y resulta, por lo tanto, «necesariamente perecedero».⁴⁴ Por otra parte, en la relación didáctica, el profesor se manifiesta también por la elección, la ruptura y la sustitución de contratos siguiendo índices de regulación que condicionan la evolución de la relación didáctica y permiten mantenerla en un ámbito de eficacia aceptable.⁴⁵

La regulación conduce al uso de diversos métodos y, eventualmente, al abandono del contrato en curso. Porque más allá de ciertos límites las correcciones no son posibles con base en las reglas vigentes; esto obligará a otro funcionamiento.⁴⁶

En síntesis, idealmente, la relación didáctica mantiene una armonía que le permite avanzar en su objetivo: obtener un conocimiento. Pero en cier-

⁴² G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques», p. 4.

⁴³ Véase G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques».

⁴⁴ G. Brousseau, «Le contrat didactique: le milieu», p. 322.

⁴⁵ Véase G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques».

⁴⁶ *Ibidem*.

tas condiciones el equilibrio se pierde. Algunos desequilibrios podrán ser resueltos conforme a las condiciones prevalecientes; otros, en cambio, conducirán a nuevas reglas. «El rol del profesor es entonces gestionar regulaciones no sólo intracontratos sino también intercontratos».⁴⁷

SUCESIÓN DE CONTRATOS O COSTUMBRE: LO HABITUAL EN LA CLASE

Desde perspectivas más genéricas, no vinculadas a la especificidad de los saberes motivo de la interacción didáctica, se han elaborado conceptos como el de contrato pedagógico que, según su creadora, «regula los intercambios entre dos partes participantes definiendo para una duración limitada un sistema de derechos y obligaciones recíprocas».⁴⁸

El contrato didáctico es distinto del pedagógico; éste es duradero y estable. Brousseau, en cambio, postula que a cada situación didáctica corresponde un problema y un contrato; éste es constitutivo de la situación específica y depende estrechamente del contenido del saber en juego. Tanto por la evolución natural de la progresión didáctica como por las necesidades de regulación del sistema, entre un profesor y sus alumnos tiene lugar una sucesión de contratos.

Como la noción de contrato didáctico, por su propia naturaleza, no da respuesta a las interrogaciones sobre la relación existente entre lo local (perecedero) y lo habitual en la clase, para analizar la actividad matemática en el tiempo se han elaborado otras categorías.

La costumbre

Una aproximación a lo habitual en la clase de matemáticas se encuentra en los trabajos de N. Balacheff. Siguiendo a este investigador, lo permanente en las clases, las reglas de interacción social que se dan alrededor del saber matemático y la distribución de responsabilidades que perduran en un cierto grupo escolar a pesar de los cambios contractuales locales, puede conceptualizarse mediante la noción de *costumbre*. La necesidad de diferenciar entre contrato y costumbre, en la perspectiva de Balacheff, deriva de que

⁴⁷ *Ibidem*, p. 11.

⁴⁸ Filoux, *Du contrat pédagogique ou comment faire aimer les mathématiques à une jeune fille qui aime l'ail*, p. 110.

el concepto de contrato didáctico, tal como ha sido descrito hasta aquí, es insuficiente para dar cuenta del conjunto de fenómenos sociales que regulan el funcionamiento de la clase. Por ejemplo, la sucesión de devoluciones a los alumnos y la recuperación por el profesor de «la responsabilidad de la validez» sugiere una sucesión de contratos que implicarían una inestabilidad que la observación de clases no revela en los hechos. [...] El concepto de costumbre es mucho más adecuado para dar cuenta del modo de regulación del funcionamiento social de la clase, al mismo tiempo que puede permitir delimitar el dominio de validez del concepto de contrato didáctico, al cual nosotros le vemos un carácter local.⁴⁹

Con base en tal postura, Balacheff afirma que hay reglas de funcionamiento social en la clase de matemáticas que, por su carácter «legislativo» general, no son de un orden contractual sino de un orden más profundo y permanente; la clase, dice, «es una sociedad costumbrista»,⁵⁰ y define la *costumbre* como un conjunto de prácticas obligatorias, de formas de actuar establecidas por el uso, por lo general implícitamente.

A decir de Balacheff, «la costumbre pesa sobre la negociación del contrato didáctico, principalmente delimitando lo que es negociable de lo que no lo es».⁵¹

La postura de Balacheff puede considerarse cercana a la de Filloux en el sentido de que no se refiere a una única situación sino a patrones generales de regulación y delimitación de la actividad matemática en el tiempo. Por otra parte, si bien ciertamente esta perspectiva, al centrarse en lo social-permanente, desdibuja la especificidad del objeto de saber, no contradice las afirmaciones brousseauianas acerca del origen de «la aceptación del juego», ya que según Brousseau el contrato didáctico se elabora sobre la base de la repetición de conductas específicas del maestro que permiten al alumno «decodificar la actividad didáctica». Es por ello que el sentido atribuido a una situación «depende mucho del resultado de las acciones repetidas del contrato didáctico».

Puede decirse, pues, que la *costumbre* delimita y autoriza los contratos posibles. También contribuye a delimitar el ámbito y la temporalidad de los fenómenos que son explicable mediante la noción de contrato. Conuerdo con Balacheff cuando asigna un carácter complementario a ambos conceptos: «El modelo de contrato y el de costumbre [juntos] proporcionan un cuadro para describir y explicar a la vez el carácter dinámico de las interacciones sociales en la clase en su relación con el saber y su esta-

⁴⁹ N. Balacheff, «Le contrat et la coutume», pp. 21-22.

⁵⁰ *Ibidem*, p. 20.

⁵¹ *Ibidem*, p. 22.

bilidad, su permanencia, indispensable en el funcionamiento del sistema didáctico».⁵²

EL SABER: MOTIVO Y RETO DE LA RELACIÓN DIDÁCTICA⁵³

Los objetos de saber y la necesidad de la transposición didáctica

La relación didáctica se establece teniendo como reto la transmisión de un saber. Éste puede presentarse bajo formas diversas, por ejemplo como ejercicio, como definición o como problema. Pero cualquiera que sea la forma que tome, el objeto de saber deberá aislarse de otras nociones, recortarse, adaptarse, incluso deformarse. Yves Chevallard llama *transposición didáctica* al «trabajo» que transforma a un objeto de saber en un objeto de enseñanza, en una versión didáctica de ese objeto.

En matemáticas los objetos de saber son las nociones matemáticas (por ejemplo la adición, el círculo, la variación proporcional). Dichas nociones motivan la relación didáctica y constituyen el objeto de evaluación. Otras habilidades —como por ejemplo el razonamiento— no constituyen en sí objetos de enseñanza y sólo pueden ser consideradas objetivos de ésta.⁵⁴

Los aspectos del saber seleccionados para ser transmitidos en la escuela constituyen los *contenidos del saber*, los cuales se presentan en una cierta forma de organización denominada *texto del saber*. A partir de dicho texto, el profesor hace otro trabajo para poner en contacto a sus alumnos con los objetos de saber y convertir así el *saber a enseñar* en un *saber enseñado*.

La necesidad de compatibilidad externa del sistema didáctico

En opinión de Chevallard, no es posible que el saber escolar permanezca «encerrado en sí mismo, protegido por las “razones” del sistema didáctico»,⁵⁵ y es que lo que ocurra en la escuela no obedece sólo a motivos internos de la relación didáctica (facilitar u optimizar el trabajo a alumnos

⁵² *Ibidem*, p. 25.

⁵³ En este libro, en congruencia con las conceptualizaciones y la terminología de la teorización en que se inscribe, se utilizan los términos *saber* y *conocimiento* de la manera en que se asumen en la didáctica francesa. El primero es personal, implícito, local; el segundo es explícito, comunicable, reconocido por una comunidad.

⁵⁴ Véase Y. Chevallard, *La transposition didactique*, p. 54.

⁵⁵ Y. Chevallard, *La transposition didactique*, p. 26.

y docentes, mantener el equilibrio didáctico...), sino que responde a exigencias de la sociedad. Así, por ejemplo, el saber enseñado debe ser visto por los académicos (los matemáticos) como suficientemente cercano al saber producido en el ámbito académico; el cuestionamiento por parte de este sector de los saberes que circulan en la escuela socavaría la legitimidad del proyecto escolar. Los padres también deben aceptar el saber que se transmite identificando una distancia razonable entre sus propios saberes y los de la escuela: «lo que se enseña en la escuela yo no podría enseñarlo, pero sí debo entenderlo».

Esta doble distancia se desgasta con el tiempo y se traduce finalmente en incompatibilidad (por envejecimiento) entre el sistema de enseñanza y el entorno, y da lugar, de cuando en cuando, a las reformas curriculares.

El texto del saber y el tiempo didáctico

Los objetos de saber que se integran como contenidos de enseñanza deben aparecer en un primer momento como algo nuevo; es su novedad la que permitirá establecer el contrato didáctico. En un segundo momento deben convertirse en objetos viejos, identificables entre los conocimientos previos de los alumnos. Esto será posible gracias al aprendizaje.⁵⁶

Ahora bien, los objetos de saber —para poder ser enseñados— se condicionan de forma que en conjunto constituyen un *texto del saber* que se presenta en programas, libros de texto y otros documentos similares. El *saber* así organizado se convierte luego en una norma para programar y organizar la *adquisición del saber*. Esta didáctica, legitimada en las escuelas, se basa en una creencia —que Chevallard eleva al rango de ficción— según la cual los procesos de enseñanza y aprendizaje son isomorfos. Al respecto dice: «[Falta mucho para que] el proceso de aprendizaje sea secuencial: el orden del aprendizaje no es isomorfo al orden de la exposición del saber. El aprendizaje del saber no es una copia del texto del saber».⁵⁷

En efecto, según las explicaciones contemporáneas, la producción del conocimiento es un acto personal que procede por asimilaciones y acomodaciones y que no puede generarse como respuesta automática a los deseos y decisiones del profesor. No obstante, la puesta en texto del saber posibilita la organización de una supuesta adquisición del saber útil en la escuela.

⁵⁶ *Ibidem*, p. 67.

⁵⁷ *Ibidem*, p. 63.

Localismo y relativismo epistemológicos

Es frecuente, en el lenguaje común, referirse a los alumnos (o a las personas) como sujetos *que saben* o *que no saben*, pero, en un cierto sentido, estas frases son ambiguas, porque el saber aludido puede estar constituido por distintos componentes (declaraciones, acciones, destrezas...). Es decir que un juicio acerca del saber o no saber es necesariamente local, correspondiente a la institución donde se emite.

Efectivamente, no hay en principio ninguna razón para que enunciados como *X conoce bien Y* sean equivalentes en las diferentes instituciones en que se pronuncian.⁵⁸ Porque con un mismo objeto de saber es posible definir diferentes relaciones institucionales. En el caso en que el objeto de saber toma forma de regla, podrá decirse que un alumno conoce ese objeto de saber si *recita la regla*, mientras que el enunciado tendrá un sentido diferente si se pronuncia en una escuela donde *el mismo objeto de saber* es considerado un problema.

En la clase de matemáticas, dependiendo del profesor de que se trate, de la transposición operada y del contrato didáctico en curso, se demandarán del alumno conductas y respuestas distintas como muestras de aprendizaje en relación con un cierto objeto de saber. De este modo, nada nos permitirá decir *a priori* que el éxito o el fracaso en el marco de un contrato en una cierta institución signifiquen éxito o fracaso en otro. Una y otra condición son relativas.

Conocimiento, saber e intención de enseñar

La didáctica francesa, en una postura que se contrapone a la transmisión cultural del saber, postula que saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para luego reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, sino que en la escuela han de ofrecerse las condiciones que permitan llevar a los alumnos de las respuestas personales (en las que las nociones matemáticas aparecen como instrumentos de resolución) al saber que toma forma de objeto cultural y que tiene un lugar en el edificio del saber reconocido socialmente.⁵⁹

Brousseau, iniciador de esta corriente, distingue entre conocimiento y saber; sostiene que el conocimiento nace como respuesta a una pregunta, que es resultante de la adaptación a una situación específica y que el

⁵⁸ Véase Y. Chevallard, «Le concept de rapport au savoir», p. 217.

⁵⁹ Véase R. Douady, «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», pp. 8-9.

sentido de un conocimiento proviene en buena medida del hecho de que el alumno lo adquiere adaptándose —en tanto que sujeto cognoscente— a las situaciones didácticas que enfrenta.⁶⁰ La hipótesis que sustenta tal postura es que la situación es inductora de conocimiento y, en una suerte de dialéctica, el conocimiento inducido permite actuar sobre la situación.

Según sus postulados, la didáctica de las matemáticas se distancia de la transmisión autoritaria y unidireccional del saber por tanto tiempo instalada en las escuelas; sin embargo, la apropiación del saber que es socialmente reconocido sigue siendo la cuestión y el reto de la institución escolar. Tal apropiación (que parte del conocimiento personal y diverso de los alumnos) descansa en un proceso interactivo con el objeto de conocimiento que toma la forma de problema a resolver y que comprende diversas situaciones o fases: de *acción* (que exigen desplegar estrategias que deben aparecer como la solución óptima al problema planteado); de *formulación* (que obligan a explicitar los conocimientos producidos mediante la utilización del lenguaje), y de *validación* o prueba (que dan lugar a la producción de justificaciones y demostraciones y permiten reconocer la validez de los resultados).

Estos tres tipos de situación constituyen en conjunto el proceso «de adaptación» mediante el cual los alumnos, logrando equilibrios conceptuales inéditos, construirán nuevos conocimientos a propósito de los objetos de saber en juego. En las situaciones de institucionalización, posteriormente incorporadas a la teoría, el maestro participa explícitamente y le da un estatuto de saber a los conocimientos generados como respuesta a una situación. En tal proceso, el maestro gestiona las relaciones entre las respuestas «personales» del alumno y el saber constitutivo de la cultura escolar. En esta etapa se «canoniza» un procedimiento, un saber, una teoría, se selecciona una definición o una convención lingüística.⁶¹

Esta postura didáctica ha tenido fuertes repercusiones en muchos países a partir de los años noventa. México se cuenta entre éstos, pues, al menos metafóricamente, la reforma introducida en 1993 se fundamenta en esta teorización; *grosso modo*, la propuesta consiste en partir del conocimiento para culminar con el saber, vía la interacción con situaciones-problema. La que le precediera, la correspondiente a la matemática moderna, se supone que impulsaba una presentación más formal del saber. Son dos transposiciones que expresan epistemologías distintas y que en principio provocarían contratos y resultados distintos.

El surgimiento de estas corrientes educativas que han fortalecido la relación alumno-saber ha confinado a la enseñanza tradicional al descré-

⁶⁰ Véase G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*.

⁶¹ *Ibidem*, pp. 156-157.

dito. Con ello, ésta ha devenido noción transparente, es decir, una noción que supuestamente permite ver con claridad lo que hay atrás de ella y, por lo mismo, ya no se examina. No obstante el desprestigio al que está sujeta, tal forma de enseñar sigue instalada en las escuelas.

LOS NIÑOS QUE DEVIENEN ALUMNOS EN VIRTUD DEL CONTRATO DIDÁCTICO

En la escuela los alumnos son considerados capaces de aprender lo que se les enseña; a la vez, para hacerlos «aprendientes» se les pone en situación de «ignorantes», esto es, aptos para ser instruidos. Cada día, hecho inicialmente ignorante, el alumno puede dejar de serlo al recibir la enseñanza. Esta acción crea recurrentemente al alumno, cuya relación con la escuela lo hace «conocente en devenir»: cada día la introducción de nuevos objetos; cada día el conocimiento de esos objetos; cada día «conocedor»; cada día «de nuevo ignorante».⁶²

Los estudios más abundantes en didáctica de las matemáticas han abordado al niño en tanto sujeto cognoscente. Gracias a tal aproximación se conocen los procesos de apropiación de saberes escolares específicos; las dificultades y los obstáculos encontrados en los procesos constructivos; los estados sucesivos de conocimiento en relación con los conceptos y saberes matemáticos. En conjunto, estos estudios han permitido entender que los niños cuentan con conocimientos contruidos espontáneamente sin la intervención sistemática de institución alguna. Han puesto también en evidencia que en los procesos de construcción existen obstáculos, filiaciones y rupturas que conviene considerar en la elaboración de versiones didácticas de los objetos de saber.

Sin embargo, si se considera el aprendizaje como un fenómeno «situado» en la escuela, no es solamente (ni necesariamente) la lógica intelectual la que explica la actuación de los niños en ese ámbito. La teorización didáctica ha dejado claro que al asistir a la escuela, lo que ahí hacen los niños y la forma como actúan toman orientaciones y connotaciones particulares derivadas del sentido generado por el contrato didáctico. En la clase no se trata únicamente de apropiarse de los saberes, se trata también, y sobre todo, de descubrir las exigencias, las prohibiciones, de saber cómo arreglárselas para satisfacer al profesor, de mostrarle que se ha aprendido.

⁶² Véase A. Mercier, *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement*.

Relación personal y relación institucional de los alumnos con el saber

Según los postulados de la didáctica francesa, cuando un objeto de saber se pone en juego sobre la base de un contrato didáctico se crea una relación institucional con el objeto llamada *relación oficial con el objeto de saber*. Esta relación —como conjunto de condiciones que impone límites y exigencias— delimita en buena medida la relación personal que los alumnos establecen con aquél. Las palabras de Sylvie Coppé aclaran la identidad posible entre estas dos relaciones: «No se puede decir que las relaciones personales son subconjuntos de las relaciones institucionales, eso sería ignorar todas las teorías del aprendizaje. En cambio, puede decirse que en el caso más frecuente, esos dos conjuntos tienen una intersección no vacía que permite que la relación didáctica prosiga».⁶³

Dicho de otra manera, si las dos relaciones (institucional y personal) constituyen conjuntos ajenos, sobrevendría un desequilibrio en la relación didáctica, puesto que en las acciones que realizan los alumnos en clase y los procedimientos que despliegan interviene no sólo la relación con los objetos de saber sino también la establecida con el contrato didáctico.⁶⁴ La percepción de las exigencias o los derechos definidos en sus cláusulas es, para el alumno, esencial en la determinación de sus acciones y en la decisión de lo que hace público o mantiene como componente privado de su trabajo en clase. En ciertos contratos será conveniente, e incluso necesario, hacer público el componente personal de una cierta realización, aunque éste no corresponda al saber institucional. Se trata de contratos en los que está aceptada la diversidad de estrategias, de soluciones y de relaciones con el saber. En cambio, en otros contratos (los centrados en las formas institucionales del saber) sólo se podrá expresar públicamente la parte de la relación personal con el objeto de saber que se intersecta con la institucional, porque sólo ésta es considerada correcta y materia útil para el avance del proyecto didáctico.

Esta doble relación —*institucional-personal*— significa que no siempre lo que se expresa en el ámbito público corresponde a lo que se hace o se piensa en el privado.

⁶³ S. Coppé, «Types de connaissances mises en oeuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail», p. 134.

⁶⁴ Véase S. Coppé, «Types de connaissances mises en oeuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail».

Respuestas de los alumnos y equilibrio de la relación didáctica

En la escuela, las respuestas adecuadas son postuladas como evidencia del aprendizaje. Es la forma por excelencia que tienen los alumnos de mostrar que saben.⁶⁵ Cualquiera que sea el contrato celebrado, una responsabilidad esencial de quienes están sujetos a la enseñanza es ofrecer las respuestas (producciones o conductas) esperadas por el profesor. Sobre la base de tal reconocimiento, los alumnos no ofrecen necesariamente las que consideran correctas, sino las que suponen son correctas para su profesor. Conviene, pues, precisar lo siguiente:

- a) Las respuestas de los alumnos son consideradas prueba del aprendizaje (producto de la relación didáctica).
- b) Las respuestas de los alumnos tienen un componente cognitivo, pero están mediadas por el reconocimiento de las expectativas del profesor.
- c) Los aprendizajes que tales respuestas evidencian no son necesariamente iguales a —ni se identifican con— los aprendizajes reales logrados por los alumnos; lo que se muestra a través de las respuestas es sólo la parte de la relación personal con el objeto de saber que tiene cabida en la clase según los términos del contrato establecido.
- d) Para que la relación didáctica pueda proseguir, es indispensable una intersección no vacía entre la relación personal con el saber y la relación institucional prevista; tal intersección se evidencia por la producción de respuestas consideradas aceptables por el profesor.
- e) Cuando las respuestas no se producen se rompe el equilibrio didáctico.
- f) Ante tal ruptura, el profesor debe restablecer el equilibrio, si es necesario cambiando de contrato.

En otras palabras, las respuestas correctas, producidas mediante un esfuerzo y tiempo «razonables» a los ojos del profesor, son índice del equilibrio didáctico. En sentido inverso, la ausencia de respuestas correctas indica la conveniencia de revisar la interacción didáctica. De este modo, los alumnos estarán constantemente presionados a responder como, suponen, espera el profesor.

⁶⁵ Véanse B. Mopondí, *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme*, y B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

La sensibilidad al contrato didáctico

Los niños participan en la relación didáctica desde distintos contratos. Estos permiten y promueven diferentes relaciones con los objetos de saber, con el profesor y con los compañeros. Pero aun ante un mismo contrato, la vinculación de los alumnos con él es desigual, es también una relación personal a la que Sarratzy denomina «sensibilidad». Este investigador mostró que los profesores «institucionalizantes», es decir, los que privilegiaban formas institucionales del saber, promueven una mayor sensibilidad al contrato que los profesores «devolventes». ⁶⁶ Mostró también que —independientemente del contrato de que se trate— son los niños menos aptos (en matemáticas) los más sensibles a las reglas que de él derivan, los que más se autocensuran anticipadamente. Los «buenos» alumnos parecen permitirse más libertades, más participaciones que rompen lo habitualmente correspondiente al papel de un alumno. Esto es posible porque, en general, ellos son los que cumplen de mejor manera con las obligaciones derivadas de las reglas establecidas, y en ocasiones estas rupturas ayudan al profesor a que su proyecto didáctico progrese. En la interpretación de Sarratzy, estos niños no siempre están seguros de sus respuestas pero sí de la forma en que serán recibidas por el profesor, quien les paga con benevolencia en relación con los errores que cometen, porque si no fuera por sus respuestas la clase no podría avanzar. ⁶⁷ Con todo, aun para los buenos alumnos la situación escolar es más determinante que la propia tarea o el desempeño y nivel escolar.

Es decir que, si de actuar en la escuela se trata, pesan más las reglas del contrato didáctico que las derivadas de la lógica intelectual. El llamado efecto La edad del capitán es un sorprendente testimonio de ello.

EL PROFESOR: LUGAR DE PRIVILEGIO EN LA RELACIÓN DIDÁCTICA

La escuela tiene sentido porque existen los alumnos, pero en el aula el maestro es la figura dominante en el curso que puedan tomar los acontecimientos. «La institución escolar invierte al profesor del poder y del compromiso de instituir el tiempo didáctico; el profesor es el relojero, el «amo del tiempo». Esta es una cláusula esencial del contrato didáctico». ⁶⁸ La

⁶⁶ Con esta expresión B. Sarratzy se refiere a los profesores que ponen el acento en el descubrimiento, suscitan el gusto por el enigma y utilizan el trabajo en grupos.

⁶⁷ *Ibidem*, pp. 312 y ss.

⁶⁸ Y. Chevallard, «Le concept de rapport au savoir», p. 70.

diferenciación profesor-alumno, entonces, no deriva sólo de que «el uno posea el saber y el otro no». La posición del profesor en la relación didáctica se caracteriza también por su relación con el tiempo didáctico: «El profesor no es sólo el que sabe; es el que sabe, antes, lo que vendrá después». ⁶⁹

Los profesores y sus acciones docentes

H. Aebli, en una obra ya clásica, ⁷⁰ planteó el sensual-empirismo como el basamento de los llamados métodos tradicionales. Estos métodos ubican el origen de todo aprendizaje en la experiencia sensible y su origen se remonta a pedagogos tan ilustres como Comenio y Herbart. Aebli considera que esta forma tradicional de la enseñanza (que también denomina intuitiva) se despliega en varias fases: una lección introductoria en la que la atención se concentra en los objetos, los cuales son observados, descritos, coloreados... ya que el objetivo es crear una impresión lo más duradera posible del objeto en la mente de los niños. Después de haberse creado una intuición sobre el concepto en cuestión se transita a la etapa simbólica; si resulta pertinente, se elabora un resumen verbal y luego se memoriza. Los principios de estos métodos fueron profusamente preconizados ya en el siglo XIX. Por ejemplo, Diesterweg escribía: «Partirás de la intuición y de ella pasarás al concepto, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, no inversamente». ⁷¹

En opinión de Aebli, el profesor que transmite el conocimiento pone en juego también esta noción de enseñanza, ya que concibe su exposición como una especie de impreso —aunque no sensible, sino intelectual— que deposita en la mente del alumno. «Aprender, en este caso, significaría “tomar una copia” de la explicación del maestro». ⁷²

Según opinión generalizada, la epistemología descrita por Aebli predomina como fundamento de la acción de los docentes. Se ha dicho también que son muchos los profesores que, aun reconociendo la endeble fundamentación de estos métodos, continúan practicándolos; es frecuente que éstos se justifiquen por considerarse más rápidos que los activos, y también por la certeza que brindan tanto a alumnos como a maestros. ⁷³

⁶⁹ *Ibidem*, p. 71.

⁷⁰ H. Aebli, *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*.

⁷¹ W. Diesterweg, *Das Allgemeine aus dem Wegweiser für Deutsche Lehrer*, 1835, cit. por H. Aebli, *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, p. 10.

⁷² H. Aebli, *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, p. 17.

⁷³ Véanse, por ejemplo, Avila y Cortina, «Opiniones, perspectivas y postura de los pro-

La observación de clases realizada en los años recientes, después de la incorporación de enfoques llamados genéricamente *constructistas*, ha llevado a plantear otras afirmaciones sobre la acción docente. Por ejemplo Sarrazy —según reporta en su obra multicitada— identificó dos tipos de profesores: «devolescentes» e «institucionalizantes». Como se dijo antes, los primeros ponen el acento en el descubrimiento de reglas, suscitan el gusto por el enigma y utilizan el trabajo en grupo, mientras que los segundos muestran atracción por los saberes formalizados, por las formas frías de enseñanza, así como por seguir las reglas y su aplicación.

De acuerdo con su acción, los maestros también han sido definidos como «centrados en el contenido» y «centrados en el alumno»,⁷⁴ o como «profesores que buscan hacer progresar el saber» en contraposición a «profesores que nada la producción de ideas y la comunicación entre los alumnos».⁷⁵

De una u otra manera, todas las opiniones son coincidentes: se trata o bien de profesores que acentúan la relación maestro-saber y fomentan una única relación con los contenidos de saber en juego (institucionalizantes, centrados en el contenido o que buscan hacer progresar el saber), o bien de profesores que buscan la promoción de relaciones personales con los contenidos matemáticos, y cuya acción recupera los procesos que se suceden en el grupo (profesores «devolescentes», centrados en el alumno...).

Encontramos características similares en un grupo de profesores mexicanos interrogados en el momento de la introducción de la reforma constructivista en matemáticas.⁷⁶ Ante los entonces nuevos libros de texto oficiales de matemáticas, algunos docentes mostraban una postura bastante abierta. Expresaban aprecio por las actividades propuestas debido a que «les gustan a los niños», «los hacen razonar» o les permiten mostrar capacidades que ellos «no habían imaginado». Estos profesores, en su mayoría, tenían pocos años de experiencia docente y preparación relativamente prolongada (en general voluntaria) afín a los principios de la entonces nueva propuesta curricular.

Un buen número de docentes, en cambio, mostraba concepciones bastante estables acerca del aprendizaje de las matemáticas. Prevalecía la intención de enseñanza lineal, la idea de que el papel del profesor consiste en transmitir, ostentar, hacer entender (o, en algunos casos, hacer razo-

tesores antes los textos de matemáticas», y B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

⁷⁴ Véase R. Noïrfaïse, «Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques», *l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles"*.

⁷⁶ Véase Avila y Cortina, «Opinions, perspectives y posturas de los profesores ante los textos de matemáticas».

nar y descubrir) para luego hacer ejercitar. Por lo general, un tiempo más prolongado de experiencia docente orientada por las concepciones antes mencionadas provocaba mayor cuestionamiento y rechazo de las nuevas propuestas educativas.

No obstante el valor de los estudios recién mencionados, encontramos en ellos una limitación: lo que se describe no son sino los dos polos opuestos, los extremos correspondientes a una gama de formas de enseñar. Ya N. Bennett encontró hace más de dos décadas que los dos estilos de enseñanza que en teoría se presentan como antitéticos —llámense tradicional y progresista, autoritario y permisivo o magistrocéntrico y paidocéntrico— son reconocibles en la práctica en otros mixtos más reales y acomodaticios. Este autor identificó doce estilos de enseñanza, entendiendo por estilo «la forma peculiar que tiene cada profesor de elaborar el programa, aplicar el método, organizar la clase y relacionarse con los alumnos».⁷⁷ Si volvemos a Brousseau y su noción de contrato veremos que los contratos posibles no son únicamente dos, sino una gama de ellos que se traduce en la adopción de un mayor o menor número de compromisos del docente frente a los alumnos. Estos contratos se clasifican en *no didácticos*, *ligeramente didácticos* y *fuertemente didácticos*, donde el profesor asume efectivamente el compromiso de hacer que los alumnos aprendan.

Los primeros son aquellos en los que el emisor (que, aunque parezca un contrasentido, puede ser el maestro)⁷⁸ no tiene responsabilidad didáctica en relación con el receptor: no se responsabiliza en los hechos de enseñarle nada, y si modifica sus conocimientos o sus conductas, esto es de alguna manera independiente de su proyecto real. Lo que diferencia entre sí a los contratos que pueden ubicarse en este rubro es el nivel de responsabilidad que el emisor (el maestro) asume frente al receptor: en una situación límite podría no tomar en cuenta ninguna restricción y emitir un mensaje incluso ininteligible, podría en cambio asegurarse de la buena recepción o podría hasta ofrecer pruebas de la validez del conocimiento que comunica.

Los contratos del segundo tipo son aquellos en los que la responsabilidad del maestro ha aumentado, pero el alumno conserva la responsabilidad principal: que la comunicación realmente tenga lugar; para cumplirla puede presionar al profesor para que transforme sus mensajes en otros más explicativos, o más comprensibles e informativos.

⁷⁷ N. Bennett, *Estilos de enseñanza y progreso de los alumnos*, prólogo.

⁷⁸ Brousseau escribió al respecto en fecha posterior a su definición de didáctica como un proceso de difusión, más allá de las instituciones escolares. De ahí que ya no se refiera exclusivamente al profesor y al alumno sino, en términos más generales, al emisor y al receptor.

Los contratos fuertemente didácticos, en la perspectiva brousseauiana, pueden tener supuestos epistemológicos y pedagógicos diversos, pues en este rubro se incluyen por igual los contratos de ostensión, de reproducción formal o los constructivistas. El atributo que los aglutina es que el profesor toma efectivamente la responsabilidad del resultado de su acción sobre los alumnos, es decir, se responsabiliza de que éstos aprendan.

Este breve recorrido autoriza a considerar la existencia de más de una forma de ser tradicional, si tradicional significa basar la enseñanza en la ostensión y la transmisión del saber, y también más de una forma de ser constructivista si el término connota que se ofrezcan tiempos adidácticos (tiempos donde los alumnos construyen conocimientos por exigencias de una situación-problema que les es transferida, devuelta, y no por exigencias del profesor). Como dice Bennett, las formas de enseñanza son diversas y *acomodáticas*. Responden a concepciones profundas de los profesores, pero también a índices provenientes de los alumnos y a presiones de la institución. Porque el profesor forma parte de un sistema abierto, condicionado no sólo por razones internas del sistema didáctico (vinculadas al *saber a enseñar* o a los alumnos) sino también por las expectativas y presiones de los padres de familia, por una parte, y de la cultura escolar vigente, por otra. Esta última consideración permite sostener la hipótesis de que las innovaciones incorporadas con las reformas educativas ejercerían alguna presión sobre la acción de los profesores, y al delimitar lo descabale establecerían un «efecto-horizonte»,⁷⁹ jalonando no sólo su acción sino también su forma de entender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En qué medida ocurre esto es parte de lo que se analiza adelante.

⁷⁹ Véase A. Kuzniak, *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*.

SEGUNDA PARTE

LA MATEMÁTICA MODERNA COMO SABER A ENSEÑAR

Capítulo 2

EL ENTORNO INTERNACIONAL

EL SURGIMIENTO DE LA NUEVA MATEMÁTICA

A partir de 1972 y hasta julio de 1993, la enseñanza de las matemáticas elementales en México tuvo como marco oficial los programas y textos redactados a la luz de la llamada *matemática moderna*.¹ Esta corriente, que llegara a nuestro país como oleada de un pensamiento internacional —y ciertamente cuando era ya cuestionada en los países que la impulsaron— constituye el marco pedagógico *legal* de los contratos didácticos y las relaciones con el saber que se analizan en este apartado.

Repetidas fuentes señalan el nacimiento de dicha corriente como respuesta al lanzamiento del *Sputnik*, satélite que llevara en 1957 a los soviéticos al espacio.² Bruner diría años más tarde que los detonantes del espíritu reformista fueron tanto el satélite artificial como otros vacíos de distinto orden: el de los misiles, el tecnológico y por último el educativo.³ Relativamente coincidente con la de Bruner es la postura de Josette Adda, quien consideró el hecho más bien como la gota que derramó el vaso en la acumulación de reproches a la enseñanza de las ciencias.⁴ Y en efecto, en Estados Unidos, por ejemplo, había grupos que discutían ya la reorientación de la enseñanza de las matemáticas cuando tuvo lugar tal acontecimiento, pero fue éste el que convenció al gobierno de que estaban por detrás de los rusos en matemáticas y ciencia, a la vez que decidió a los or-

¹ Es importante aclarar que en este libro la expresión *matemática moderna* se refiere a un movimiento pedagógico y cultural que con tal nombre llegó a las escuelas de muchos países occidentales —incluido México— y se extendió en los sistemas educativos; con esta expresión no se alude a contenidos matemáticos específicos.

² Véase, por ejemplo, M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*, y Z. Dienes, *La matemática moderna en la enseñanza primaria*.

³ Véase J. Bruner, «Consideraciones sobre la reforma escolar».

⁴ Véase J. Adda, «La réforme des mathématiques modernes».

ganismos financiadores públicos y privados a otorgar recursos para la experimentación de nuevas propuestas de enseñanza.

«Gota» o causa, la conquista del espacio lograda por los rusos provocó un desafío en la sociedad occidental que, a decir de los enterados, enseñaba las matemáticas anteriores al siglo XIX. Resultaba por lo tanto necesario revisar lo que a todas luces no estaba funcionando: la educación científica de los niños y los jóvenes. Parecía obligado enseñar desde los cursos elementales las matemáticas que permitiesen proporcionar a los alumnos los conocimientos adecuados para actuar en un mundo moderno pleno de avances científicos y tecnológicos. Z. P. Dienes, personaje destacado en la conformación de este movimiento, creía que la orientación de la enseñanza de las matemáticas vigente en esos años estaba totalmente equivocada: «Todos los países del mundo resienten una escasez de científicos, de técnicos y de otros especialistas cuyo papel es hacer progresar la civilización técnica. El cuello de botella se encuentra, incuestionablemente, en el nivel de la educación de los jóvenes. *Todas las aptitudes científicas y técnicas descansan sobre la aptitud para manejar estructuras matemáticas; y, entre los jóvenes, son demasiados los que ignoran hasta la existencia de esas estructuras*».⁵ (Las cursivas son mías.)

Buscando los remedios para lo que se consideraba un terrible mal, en centros experimentales creados para tal fin se trabajó en distintas direcciones, pero siempre con una idea básica: «sustituir la adquisición tradicional de reglas aprendidas de memoria por la exploración de estructuras matemáticas fundamentales».⁶ Un elemento más a favor de la postura —según opinión de Dienes y algunos más de sus colegas— era la comprobación de que tal exploración, a pesar de sus dificultades, entusiasmaba a los niños en lugar de desanimarlos. Y en diversos países se desarrollaban investigaciones con esa tendencia. En Estados Unidos, la American Mathematical Society creó en 1958 un nuevo grupo (el School Mathematics Study Group) que —según afirma M. Kline— concentró todos sus esfuerzos en la redacción de un plan para la enseñanza secundaria. En Francia, otro de los países precursores del movimiento, matemáticos prominentes daban cursos y conferencias a los profesores de bachillerato miembros de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (APMEP). En estos cursos se trataban las estructuras algebraicas y topológicas. Mientras tanto, G. Papy probaba las nuevas orientaciones sobre la base de la teoría de conjuntos en las escuelas belgas, y Dienes y otros co-

⁵ Z. Dienes, *Comprendre la mathématique. Un étude de la transition de la phase constructive à la phase analytique de la pensée mathématique des enfants*, p. 7.

⁶ *Ibidem*.

legas experimentaban en Australia y Estados Unidos el uso de los bloques lógicos.⁷

A los estudios experimentales, que aumentaban en número en diversos países, se adicionó la revisión de las directrices y los contenidos de los programas de estudio entonces vigentes. Con ese objetivo se celebró el Coloquio de Royaumont (Francia), convocado por la Organización Europea de Cooperación Económica (OECE) en 1959, al cual asistieron, entre otras, varias personalidades de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas, que se reunía anualmente desde 1950 y en la cual participaban connotados matemáticos. Al término del coloquio, un grupo de matemáticos y de pedagogos dirigirían a los veinte Estados miembros una serie de recomendaciones para la revisión de contenidos y métodos de enseñanza.⁸

Los resultados del coloquio potenciaron la generación y difusión de las ideas. En 1963, Papy publicó un curso titulado *Matemática moderna*. Las obras de Dienes introducirían en Francia los «bloques lógicos» y los ejercicios sobre «bases» de numeración, los cuales serían experimentados con ímpetu por Nicole Picard. En Estados Unidos se fortalecían y multiplicaban, en diversas universidades y centros de investigación, los proyectos orientados a experimentar las nuevas ideas. La ola que alcanzaría al mundo occidental comenzaba a hacerse sentir.

LAS NUEVAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN PRIMARIA

La ola modernizadora se inició en los niveles de bachillerato y secundaria de ahí derivaría a la educación primaria cuando tomaron relevancia dos ideas: a) que el nuevo currículum de la educación media obligaba a la adquisición de ciertos prerrequisitos para cursar con éxito dicho nivel; y b) que desde edades tempranas los niños podrían aprender los conceptos propios de la matemática moderna.⁹ En este nivel educativo, las ideas de Z. P. Dienes constituyeron un referente fundamental. Sus obras fueron traducidas a diferentes idiomas e introducirían en distintos países los «bloques lógicos» y los ejercicios de numeración en «distintas bases», así como una concepción novedosa de la enseñanza de las fracciones y la geometría.

La propuesta básica de Dienes consistía en buscar que los niños se

⁷ Véanse J. Adda, «La réforme des mathématiques modernes», e International Study Group for Mathematics Learning, *Mathematics in primary education*.

⁸ Véase Z. Dienes, *Comprendre la mathématique*.

⁹ Véase, por ejemplo, International Study Group for Mathematics Learning, *Mathematics in primary education*.

apropiaran de las estructuras matemáticas abstrayendo lo común a diversas situaciones isomorfas, mediante un proceso inspirado parcialmente en ideas piagetanas. Este científico concebía la matemática como una ciencia de representaciones, esquemas y abstracciones que se nutre de contenidos conceptuales cuyo manejo e interrelaciones se vuelven más cómodos y rápidos mediante la utilización de símbolos y representaciones. Combinando con corrección los símbolos y las representaciones formales, decía Dienes, acaba el matemático por olvidarse de los contenidos conceptuales.¹⁰

En virtud de los rasgos de la matemática que él mismo resaltaba, Dienes consideraba necesario desarrollar una didáctica que permitiera llevar a los niños a las abstracciones necesarias. Así, elaboró una propuesta de explicación y promoción del aprendizaje de las matemáticas mediante un proceso «psicodinámico» constituido por seis etapas:¹¹

1. *Adaptación a un medio (entorno) mediante el juego libre.* En opinión de Dienes, todo aprendizaje equivale a un proceso de adaptación al medio. Pero como el entorno natural por lo general no tiene atributos necesarios para producir aprendizajes matemáticos, entonces se hace necesario inventar entornos artificiales. Esta invención es la primera tarea de quien pretende hacer aprender las matemáticas a los niños.

2. *Juego con base en reglas.* Después de un acercamiento libre propio de la primera etapa, el juego que vincula al medio deberá hacerse alrededor de ciertas regularidades y con base en ciertas reglas. Obviamente, para que el niño aprenda estructuras matemáticas, los conjuntos de reglas que se les propongan conducirán a las estructuras matemáticas pretendidas.

3. *Juego de isomorfismo.* Consiste en la realización de juegos con la misma estructura pero con una apariencia diferente. De este modo se descubrirán conexiones de naturaleza abstracta que existen entre los elementos de un juego y los de otro de estructura idéntica. Es decir, en esta etapa el niño realiza una abstracción dándose cuenta de lo que hay de semejante en todos los juegos; descubre las estructuras comunes en ellos.

4. *Representación de la estructura matemática,* para que el niño sea plenamente consciente de ella. La representación —que puede ser visual o auditiva— permite tomar conciencia de la estructura matemática descubierta.

5. *Examen de la representación,* con el fin de percatarse de las propieda-

¹⁰ Véase Z. Dienes, *La matemática moderna en la enseñanza primaria*, p. VII.

¹¹ La descripción de las etapas de aprendizaje de las matemáticas que Dienes propone y que aquí se presenta ha sido tomada de Dienes, *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*.

des de la abstracción realizada. En esta etapa se describe lo que se ha representado, haciéndose así indispensable la creación de un lenguaje.

6. Construcción de un sistema formal para describir el juego. *Este sistema consta de axiomas, reglas del juego y teoremas (fragmentos de la descripción a los cuales se llega a partir de la descripción inicial utilizando las reglas del juego).*

El aprendizaje de las matemáticas fundado en el tránsito por estas etapas, tal como era propuesto por su autor, incorporaba elementos entonces novedosos en la educación matemática de los niños: el juego, la discusión y el trabajo en pequeños grupos, pero, principalmente, la noción de *descubrimiento* (de las estructuras subyacentes en los juegos isomorfos). Con este término, Dienes se refería a la identificación de rasgos idénticos en situaciones aparentemente distintas. Esos rasgos correspondían a ciertas propiedades matemáticas que interesaba resaltar.

Pero no sería Dienes el único promotor de modelos de enseñanza novedosos para la educación primaria. Otros matemáticos experimentaron con base en la noción de conjunto, y algunos más, con el sustento de las nociones piagetanas, trabajaron la conservación de las cantidades, la seriación y la clasificación. Todos estos programas buscaban encontrar nuevas vías para la enseñanza y el aprendizaje de los números y el concepto de número. También ocupó a muchos investigadores la preocupación por resaltar las estructuras lógicas que sustentan el sistema decimal de numeración y los algoritmos de las operaciones.¹² Todos ellos, en mayor o menor medida, constituyeron inspiración para los reformadores mexicanos.

¹² Véase International Study Group for Mathematics Learning, *Mathematics in primary education*.

Capítulo 3

LA REFORMA MEXICANA

EL CONTEXTO PEDAGÓGICO EN QUE LA REFORMA VINO A INSTALARSE

El entorno mundial marcó la orientación de la reforma a las matemáticas que tendría lugar en la escuela mexicana en los años setenta. Esta reforma —acorde con los nuevos vientos— vino a oponer un *saber a enseñar* próximo al saber de los académicos con otro tendiente a la formación de hábitos y la disciplina mental, a la vez que orientado por una noción utilitaria de las matemáticas entonces instalada en las escuelas. En efecto, el plan de estudios de Aritmética y Geometría vigente señalaba como metas de la educación primaria:

- Desarrollar el pensamiento cuantitativo y la actitud de relacionar.
- Precisar el lenguaje.
- Fomentar el espíritu de análisis e investigación.
- Afirmar la disciplina mental.¹

El carácter de estas metas, eminentemente formativo, se complementaba con un interés por la utilidad cotidiana de la disciplina, expresada en los objetivos correspondientes a los distintos grados. En el programa de sexto grado, por ejemplo, se leía:

- [El alumno debe] ser capaz de *satisfacer las necesidades de cálculo propias de la vida diaria*, con certeza, precisión y exactitud;
- los temas aritméticos y geométricos deberán coordinarse apropiadamente, y las actividades y los conocimientos que se utilicen para su desarrollo

¹ Secretaría de Educación Pública, *Programas de educación primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*, p. 39.

*serán siempre objetivos, de utilización práctica, encaminados a ampliar eficazmente la cultura del alumno (cursivas mías).*²

Cabe decir que el vínculo con la vida cotidiana y la utilidad práctica no tenía un fin simplemente utilitario. En ese entonces existía también la creencia de que el vínculo con la experiencia y las vivencias del alumno permitiría dar sentido (en términos cognoscitivos) a los aprendizajes matemáticos y motivar para aprender. La clave estaba en que la escuela, al ser de alguna manera artificial, es inhibidora del interés, mientras que las faenas y actividades de la vida cotidiana, al tener una «significación vital», resuelven el probable desinterés de los niños hacia las enseñanzas.³

A la lista de contenidos escuetamente presentados a los maestros se agregaban algunas «recomendaciones para la enseñanza» que revelan la perspectiva pedagógica propia de la época. Cito las generales de la educación primaria:

1. La enseñanza de las matemáticas elementales debe ir de lo concreto a lo abstracto.
2. La práctica matemática se llevará por medio de situaciones concretas y objetos conocidos.
3. La enseñanza se basará en manipulaciones experimentales y el manejo de objetos.
4. Toda tarea práctica precederá a la realización de operaciones con símbolos.
5. El conocimiento del símbolo se presentará en el momento oportuno para que el niño descubra los principios y reglas que rigen las operaciones.
6. La comprensión precederá a la adquisición del cálculo y la memorización de las reglas.
7. Los temas, ejercicios y problemas serán ordenados, a fin de lograr su más fácil aplicación práctica.
8. La experiencia debe permitir la captación del símbolo correspondiente.
9. El aprendizaje debe interesar al alumno para lograr la comprensión del conocimiento teórico.⁴

Estos principios fueron plasmados con mayor o menor fidelidad en los programas oficiales de los seis grados de primaria y en los libros de texto

² *Ibidem*, p. 194.

³ Véase R. Ramírez, *Técnica de la enseñanza*, pp. 45 y ss.

⁴ Secretaría de Educación Pública, *Programas de educación primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*, pp. 45-46.

que por primera vez eran obligatorios y gratuitos. Entre ellos hay diferencias —que se deben en parte a que distintos autores elaboraron los de cada grado— pero también coincidencias importantes que pueden entenderse como el horizonte de la enseñanza de las matemáticas propio de la época:

1. La matemática escolar (entonces aritmética y geometría) debe ser una matemática útil.
2. Los conocimientos deben presentarse ordenada y gradualmente.
3. Las nociones matemáticas se aprenden mediante tres vías principales: su presentación objetiva (que corre por cuenta del profesor), la manipulación de objetos y la ejercitación.
4. Los problemas prácticos constituyen el espacio donde las nociones adquiridas se aplican y se ponen a prueba.⁵

Esta pedagogía tiene rasgos comunes con la que H. Aebli denomina *sensual-empirista* o H. Ratsimba-Rajohn identifica como *enseñanza ostensiva*. Mediante esta última expresión se alude a una cierta presentación de los objetos de enseñanza en la que todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista son proporcionados de un solo golpe por el profesor o el libro de texto.⁶ Acordes con tales principios, los libros de texto mexicanos presentaban contenidos «cuidadosamente dosificados», ilustraciones que ofrecían todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista, problemas «prácticos» al final de la secuencia correspondiente, así como una dosificación de los apoyos «objetivos», que paulatinamente se desvanecían:

Del tercero al sexto grado, los aprendizajes son apoyados por imágenes, esquemas y explicaciones en los textos. Estos elementos toman diferentes pesos conforme se avanza en la primaria. Es decir, los apoyos objetivos (basados en objetos físicos) característicos de los dos primeros grados se van desplazando para dejar lugar, poco a poco, a la ostensión exclusivamente gráfica de las nociones y, posteriormente, a las exposiciones, formalizaciones y ejercicios en el nivel simbólico. Particularmente en el sexto grado, la ostensión no se sustenta ya en imágenes sino en exposiciones verbales que luego se ejemplifican. Es una forma de ostensión que se ofrece a alumnos con cierta experiencia matemática. Se trata de poner ante su intelecto (que ya no ante sus ojos) los conceptos, los procedimientos, las fórmulas, las soluciones.⁷

⁵ Véase A. Avila y S. García, *Paradigmas de enseñanza de las matemáticas elementales. El siglo xx en México*.

⁶ Véase H. Ratsimba-Rajohn, *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*.

⁷ A. Avila y S. García, *Paradigmas de enseñanza de las matemáticas elementales. El siglo xx*

La raigambre de este principio pedagógico —de lo objetivo a lo simbólico, de lo concreto a lo abstracto, coincidente con la filosofía empirista del siglo XIX— se observa en interpretaciones docentes que aún se sostienen en nuestros días. Sólo a guisa de ejemplo: un director de escuela, en el transcurso del año escolar 1999-2000, en una reunión de consejo escolar dijo a los profesores que laboraban en el plantel a su cargo que para lograr buenos aprendizajes en matemáticas convenía considerar su enseñanza bajo el siguiente esquema:⁸

SIMBÓLICO	
Sexto Grado	O B J E T I V O
Quinto Grado	
Cuarto Grado	
Tercer Grado	
Segundo Grado	
Primer Grado	

Se ve en tal recomendación la permanencia de la noción básica que sustentaba los programas y textos que circulaban en los años sesenta: la enseñanza (exitosa) de las matemáticas debe ir de lo concreto a lo abstracto. En nuestras visitas a las escuelas públicas realizadas en el transcurso de la investigación en que se basa este libro nos dimos cuenta, además, de que muchos profesores —entre los que se incluían algunos jóvenes— mencionaban los libros de esa época como fuente de consulta y la referencia se

en México, p. 58. Conviene, sin embargo, dejar anotado que la subyacente en este texto de saber no era una pedagogía exclusivamente ostensiva o sensual-empirista. Hay algunos rasgos que, me parece, la distinguen de ésta, principalmente la sugerencia de «aprendizaje inductivo» dada a los profesores de sexto grado.

⁸ Este dato me fue proporcionado por Gabriel Cruz Rocha, profesor de educación primaria.

hacía luego incluso con añoranza: «Los "libros de la Patria"⁹ —decían algunos— léos sí eran buenos libros!».

El aprecio, sin embargo, no fue siempre tal. Cuando estos programas y textos llegaron por primera vez a las escuelas, también provocaron desconcierto. Hubo quien señaló que con su implantación, los profesores cayeron en un atolladero.¹⁰ Por fortuna, decía el profesor Castillo, se produjeron obras «sencillas», «concisas» y «seguras» que señalaban, «como con un índice», el camino por donde el maestro hallaría lo que con apremio demandaba: claridad.¹¹

Fuese debido al apoyo de tales obras, o a que una vez conocidos con más profundidad los materiales se descubrieron notablemente afines al pensamiento docente, o por otras razones, es posible suponer que finalmente los profesores encontraron una gran compatibilidad entre los principios pedagógicos subyacentes en los materiales y su forma habitual de proceder. Es decir que identificaron en ellos un elemento equilibrante de la relación didáctica y, con base en tales materiales, se trabajó en las escuelas aproximadamente doce años.

Todo era equilibrio en el sistema didáctico y en el contexto escolar. Pero el contexto externo había cambiado, y desde fuera se observaba un envejecimiento en los objetos matemáticos que se comunicaban en la escuela, así como en la forma de relacionar a los niños con ellos. Ya no era posible seguir enseñando los cálculos utilitarios ni los problemas rutinarios y altamente estructurados que se referían al entorno inmediato de las personas comunes. La utilidad práctica y la disciplina mental, hasta ahora «herramientas para la vida» y valores importantes de la educación primaria, serían de aquí en adelante consideradas mecanicismo sin sentido y un camino equivocado para acceder a las *verdaderas matemáticas*. De hecho, se afirmaba que con los recursos técnicos disponibles (por ejemplo las calculadoras, que ya empezaban a emplearse en círculos selectos) no tenía sentido enseñar de memoria las reglas de cálculo a los niños, tal como se venía haciendo hasta entonces.¹²

⁹ Forma común de referirse a los libros de texto gratuitos de los años sesenta, ya que en su portada aparecía la imagen de una mujer que representaba a la Patria.

¹⁰ Véase I. Castillo, prólogo al texto de Manuel M. Cerna, *Análisis y aplicación de los programas de educación primaria*.

¹¹ *Ibidem*, pp. 7-8.

¹² Véase A. Pérez Lindo, «Las matemáticas modernas: pedagogía, antropología y política. Entrevista a Georges Papy», p. 43.

EL NUEVO CURRÍCULUM

Una nueva justificación para las matemáticas

Decía G. Papy que la matemática moderna utiliza más la lógica que la matemática tradicional; ésta enseña a calcular, mientras que aquella enseña a pensar y a crear.¹³ Infundido por este ánimo, el nuevo saber que se buscaba introducir en la escuela mexicana justificaba su presencia por razones inéditas: la capacidad de abstracción, generalización y formalización del pensamiento que promovía; la capacidad de hacer pensar y reflexionar a los niños, y la posibilidad de constituirlos como sujetos de un mundo tecnológico y científico en plena expansión. En las nuevas directrices oficiales se leía: «Las matemáticas son uno de los instrumentos más poderosos que ha creado el hombre para formalizar su pensamiento. Desde este punto de vista desempeñan funciones de registro, comunicación, explicación y descubrimiento. Su tendencia hacia la abstracción y la generalización las convierte en un instrumento de globalización y universalización del pensamiento, por lo tanto le sirven al hombre para explicar situaciones de una gran diversidad».¹⁴

De tal concepción se desprendió el siguiente objetivo educativo: «La enseñanza de las matemáticas debe fomentar en el educando la capacidad de formalizar con precisión; es decir, la capacidad de razonar, y asimismo la capacidad de aplicar su razonamiento a situaciones reales o hipotéticas de las cuales puedan derivarse a su vez conclusiones prácticas u otras formalizaciones».¹⁵

Como es posible apreciar, la revisión de las aspiraciones educativas era radical. Podía imaginarse, por lo mismo, la implicación de un desequilibrio importante en el sistema educativo y didáctico.

¹³ *Ibidem*, p. 45.

¹⁴ Secretaría de Educación Pública, *Plan de estudios y programas de educación primaria*, p. XV.

¹⁵ *Idem*. Conviene señalar que en los inicios de los años ochenta los documentos oficiales fueron revisados y «adecuados»; en tal «adecuación» el objetivo general de las matemáticas para la educación primaria se expresó así: *Propiciar en el alumno el desarrollo del pensamiento cuantitativo y relacional como un instrumento de comprensión, interpretación y expresión de los fenómenos sociales, científicos y artísticos*. Se conserva para el análisis la versión original.

Contenidos para un mundo donde la ciencia es fundamental

La novedad principal de la reforma estuvo constituida por la incorporación de nuevos contenidos de enseñanza. La incorporación de la variación funcional —que sustituía a las modestas razones y proporciones— era una de las que ponían de manifiesto la nueva orientación. A partir de tablas y gráficas se elaboraban los conceptos de variación proporcional e inversamente proporcional. Este acercamiento era muy distinto del propio de los años sesenta, donde la puesta en relación con la proporcionalidad se centraba en el procedimiento de la «regla de tres», asociado a la resolución de problemas «cotidianos». Los conceptos matemáticos fundamentales eran el nuevo gran objetivo de la matemática escolar.

En algunos países, por ejemplo en Francia —en lo que algunos consideraron una verdadera ruptura en la definición de las finalidades educativas—, las directrices oficiales señalaron de manera franca el alejamiento de los asuntos cotidianos: «La ambición de tal enseñanza no es pues ya esencialmente preparar a los alumnos para la vida activa y profesional haciéndolos adquirir técnicas de resolución de problemas catalogados y sugeridos por la vida "corriente", sino más bien de asegurarles un acercamiento correcto y una comprensión real de las nociones matemáticas ligadas a esas técnicas».¹⁶

En México el abandono de «lo cotidiano» no se declaró de manera franca, sino que se daba en los hechos a través del nuevo *saber a enseñar*. En relación con los contenidos el cambio era radical: en primer término, se introducían tres ramas de la matemática —lógica, probabilidad y estadística— que nunca antes habían sido pensadas como propias de la educación primaria. Pero en las ramas conocidas también había novedades. En geometría, por ejemplo, la simetría (axial y de rotación), que aparecía por primera vez, ocupaba gran parte de los nuevos textos y programas y constituía la base para abordar otros conocimientos geométricos, como por ejemplo el análisis, el trazo y la clasificación de figuras. Los triángulos, hasta entonces clasificados por las medidas de sus ángulos y sus lados, ahora se clasificaban también por el número de ejes de simetría; otros polígonos regulares se catalogaban por el número de simetrías de rotación. Incluso la perpendicularidad se sustentaba en la nueva noción: «Dos rectas, cada una simétrica respecto de la otra, se llaman rectas perpendiculares».¹⁷

El plano cartesiano se contaba también entre los nuevos contenidos.

¹⁶ Ministerio de Educación Nacional de Francia, Dirección de Escuelas, Circular del 2 de enero de 1970; cit. por Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

¹⁷ E. Filloy (coord.), *Matemáticas tercer grado. Libro del maestro*, p. 104.

Su inclusión se justificaba por la importancia matemática del tema. Después de precisarse que la geometría analítica o cartesiana permite transformar problemas geométricos en algebraicos y utilizar los métodos de la geometría y el álgebra para resolver problemas en distintas áreas de la actividad humana, se afirmaba:

No tiene objeto en esta guía del maestro entrar en detalle sobre los elementos de esta teoría. Baste decir, como ejemplo, que curvas planas, como las rectas, los círculos, las elipses, etc., tienen asociadas ecuaciones algebraicas y viceversa. Mencionaremos solamente que la citada correspondencia entre curvas planas y ecuaciones algebraicas se basa en la representación de puntos en el plano por medio de parejas ordenadas de números. Esta última idea es la única que se introduce en el libro del niño. Esta idea, en realidad, la mayoría de los niños y la gente en general la conoce por su empleo en juegos como «los submarinos» [...], aunque no se hayan percatado que es el punto de partida de toda una teoría matemática.¹⁸

Los alcances y la metodología de enseñanza se delimitaban con claridad, pues no se pretendía «que el niño adquiriera las ideas del plano coordenado y coordenadas en la forma tan abstracta que se describió antes, sino más bien que, ligadas a situaciones concretas en las que su uso constituye una ayuda, las empiece a utilizar y así, en años posteriores, pueda obtener información geométrica de lo que ahora parece nada más un juego».¹⁹ Ante tales razones, los juegos de submarinos se repetirían en los textos escolares mexicanos, para convertirse en el inicio del acercamiento al tema.

Las modificaciones también eran importantes en aritmética. Los cálculos supuestamente enseñados hasta entonces de manera mecánica y para responder a problemas «de la vida real» dejarían el lugar a la distributividad, la conmutatividad y la asociatividad. La idea que justificaba la inclusión de estas propiedades era la importancia de que el alumno conociera y razonara de una manera consciente el mecanismo en que se apoya el algoritmo de una operación para que comprenda realmente las matemáticas.²⁰

Se agregaban también los números enteros y sus operaciones, ambos con el apoyo de la recta numérica. La búsqueda de accesibilidad al tema generó recursos como «los saltos de la rana», los cuales se ejecutaban sobre la recta para modelar transformaciones positivas y negativas, según la

¹⁸ *Ibidem*, p. 33.

¹⁹ *Ibidem*, p. 34.

²⁰ Señalamientos como éste aparecen más de una vez en las guías didácticas para el maestro, publicadas como parte de los materiales con que se instrumentó la reforma.

dirección del salto.²¹ Este modelo, utilizado en los primeros grados de la primaria, alcanzó bastante popularidad en las escuelas. En los últimos grados, los niños resolverían expresiones aditivas utilizando números con signo; los signos fueron «adaptados» para facilitar la lectura de las expresiones numéricas. Por ejemplo, en el libro del niño de quinto grado se incluían expresiones como las siguientes:

$10 + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$10 + \bar{2} = \underline{\hspace{2cm}}$	$\bar{10} + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$\bar{10} + \bar{2} = \underline{\hspace{2cm}}$
-------------------------------------	---	---	---

Se introdujeron, además, algunas nociones intuitivas sobre conjuntos como herramientas para elaborar otros conocimientos; por ejemplo, los números naturales en los primeros grados o las nociones de probabilidad a partir del quinto.

La aritmética de 1972 resulta muy distinta de la que le precediera como saber a enseñar. Ahora cobran presencia como objetos de enseñanza no los cálculos con números naturales o con fracciones, sino el sistema de los números naturales, el de los racionales y el de los enteros. Adicionalmente, los algoritmos de cálculo se hacen comprender explicitando las propiedades de las operaciones que los fundamentan, porque se trataba de enseñar «lógicamente», evidenciando el razonamiento en que se apoya cada paso.

Los hasta aquí anotados son algunos de los cambios relevantes en la matemática escolar. Los nuevos objetos de conocimiento se postulaban como potenciadores de las capacidades de abstraer, formalizar y generalizar, que sustituirían a las hasta entonces enunciadas en los programas: captar, entender o aplicar. De acuerdo con la nueva filosofía, los alumnos desarrollarían las aptitudes científicas y técnicas que el mundo moderno demandaba. Y todo esto se justificaba porque —conforme al espíritu con el cual se construyó la reforma— las matemáticas que hasta la fecha se habían enseñado presentaban una limitación fundamental: la mecanización y la falta de comprensión.

²¹ Según el ISGML, la idea de ilustrar la adición y la sustracción mediante saltos en la recta fue desarrollada previamente en el Proyecto Madison y otros proyectos experimentales llevados a cabo en Estados Unidos e Inglaterra.

Que sean los niños quienes vayan descubriendo las ideas

Desde la perspectiva reformadora, el acercamiento a las estructuras matemáticas constituía el camino para mejorar la calidad del aprendizaje de la disciplina. Tal mejoramiento, empero, implicaba no sólo la definición de nuevos objetos de saber sino la creación de formas pedagógicas compatibles con tal intención. Como se puede inferir de las discusiones promovidas por el ISGML (1966) en el nivel internacional, el descubrimiento, la comprensión y la capacidad de abstracción delimitaban el pensamiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En México había una clara pretensión de abandonar la introducción ostensiva de las nociones hasta entonces vigente y promover un vínculo más activo entre los alumnos y los contenidos matemáticos. Con base en ella, los nuevos textos incluían muchas secuencias que, mediante preguntas, guiaban el «descubrimiento» de la noción en juego.²²

Aunque la idea del descubrimiento no tocó todos los temas, tendría una presencia importante en el conjunto de los materiales. Al respecto se decía:

La tónica fundamental es que sean los mismos niños quienes vayan descubriendo las ideas. Las lecciones pueden servirle al maestro para orientar las discusiones y para presentar los materiales. Conviene que no caigamos en prácticas de memorización, pero sí insistir, por otro lado, en que los niños obtengan una comprensión mínima adecuada de las ideas implicadas en los temas que se estudian [...].²³

Además se habrá de aprovechar el caudal de nociones intuitivas que el niño ya maneja, por sus vivencias cotidianas, construir sobre ellas tratando de refinar tales nociones por medio de situaciones concretas en las que éstas se presentan de maneras sencillas, hasta alcanzar, a través de la práctica reiterada, el concepto que interesa captar.²⁴

Conforme a estas aseveraciones, el descubrimiento preconizado no guarda identidad con el que Dienes promovía. Mientras la preocupación de éste se centraba en el descubrimiento de la estructura matemática

²² Los programas no ocupan en este periodo un lugar importante, ya que fueron redactados una vez elaborados los libros de texto y las guías didácticas para el maestro por equipos distintos de los que concibieron la reforma educativa. La tarea de dichos equipos, en buena medida, consistió en interpretar los textos para redactarlos como programas. En ellos se observa la ideología educativa de la época que preconizaba, con base en la taxonomía de Benjamín Bloom, el cumplimiento de objetivos conductuales de distinto nivel.

²³ C. Ímaz (coord.), *Matemáticas primer grado. Libro para el maestro*, p. 6. (Las cursivas son mías.)

²⁴ L. Gorostiza y J. Rivaud (coords.), *Matemáticas, cuarto grado. Libro del maestro*, p. 8.

mediante el recurso de las situaciones isomorfas, los reformadores mexicanos parecían orientarse por una noción más cercana a la mayéutica socrática, según la cual, proporcionando las preguntas adecuadas, los alumnos alcanzarían sobre la base de sus propios recursos intelectuales los conceptos que interesaba comunicar.

Como quiera que fuese, la novedad impulsada tenía una doble vía: los contenidos de saber y la forma de vincular con ellos a los alumnos. Sin embargo, los espacios estelares en la difusión, la discusión e incluso la formación y actualización de los profesores los ocuparían los primeros.²⁵

En otros países las ideas de Dienes sobre el aprendizaje tuvieron influencia importante en la educación primaria. En México tales ideas no fueron plasmadas sistemáticamente ni se hizo mención a ese autor en los documentos oficiales. Carlos Ímaz, coordinador de la reforma a las matemáticas en el periodo, comentó a Mónica Schulmaister²⁶ que la única noción e intención pedagógica que guió la realización de la reforma fue la explícitamente planteada: que sean los propios niños quienes vayan descubriendo las nociones.

Efectivamente, sólo pueden observarse en los materiales las ideas relacionadas con el aprendizaje por descubrimiento en sentido amplio y el interés por que los niños realicen abstracciones y formalizaciones a partir del trabajo sobre situaciones concretas. Estas ideas eran compartidas por muchos en la época. Las seis etapas en el aprendizaje de las matemáticas de Dienes (como por ejemplo el juego libre seguido del juego con reglas, o la construcción de un lenguaje para describir el juego) no se incorporaron sistemáticamente en los materiales mexicanos.

El enfoque adoptado se implementó con relativa frecuencia en los materiales, pero se veía con más claridad en el tratamiento de algunos temas. El caso de la geometría y en particular el dedicado a la simetría es uno de ellos. La siguiente secuencia de indicaciones y preguntas, correspondiente al libro de tercer grado, lo muestra:

Recorta las figuras que están en la página 287 al final del libro [se trata de la letra F, la E y un cántaro simétrico en relación con un eje].

Haz lo mismo que hiciste con las figuras de la página anterior [es de-

²⁵ Llama la atención que en los informes de labores de la Secretaría de Educación Pública del periodo, la preparación de los maestros en servicio se redujo a Centros de Cooperación Pedagógica y sesiones sabatinas en las que se consideró fundamental el asesoramiento sobre los nuevos programas escolares y el análisis de los libros de texto gratuitos. No hay referencias específicas a postulados psicopedagógicos en ninguno de los informes.

²⁶ Véase M. Schulmaister, *La enseñanza de las fórmulas en la escuela primaria: un análisis didáctico*.

cir, superponerlas en sus respectivas siluetas por el anverso y el reverso].

¿Da lo mismo dibujar el cantarito por la parte roja que por la parte blanca?

Sí, porque el cantarito es una figura simétrica.

¿Da lo mismo dibujar la E por la parte roja que por la parte blanca?

Sí, porque la E es una figura _____.

¿Da lo mismo dibujar la F por la parte blanca que por la parte roja?

No, porque la F no es una figura _____.

La mariposa se puede doblar a la mitad de la siguiente manera: [aparece una mariposa cuyas alas son simétricas entre sí, con un doblez sobre el eje de simetría].

¿Cuáles de las figuras de ésta y la lección anterior se pueden doblar a la mitad de esta manera?

De acuerdo con esto pon *sí* o *no* en las rayas.

¿Se puede doblar así [de manera que sus bordes coincidan] la T? ____

¿Es simétrica? ____.

¿Se puede doblar así la locomotora? ____ ¿Es simétrica? ____.²⁷

El papel del texto en ese entonces era central y al profesor se le hacían aclaraciones en tal sentido:

Con las preguntas formuladas en cada lección se pretende poner al niño ante situaciones que pueda resolver (quizá con ayuda del maestro) para que esto le vaya afinando las ideas intuitivas de las cuales se parte. En ninguna lección del libro se encontrará una definición de longitud, área, azar, frecuencia, probabilidad, simetría, etc. Pero lo primero que siempre se hace es delimitar la idea a la que nos estamos refiriendo cuando se presenta un término; se parte de lo que el niño sabe acerca de ello y después, a base de actividades, preguntas y sugerencias, se trata de afirmar y reafirmar tales ideas, además de encontrar algunos resultados que se deducen inmediatamente de lo que ya se sabe.²⁸

Es cierto, como ya se mencionó, que el enfoque en el tratamiento de los distintos temas no fue del todo uniforme. Incluso en ocasiones era al profesor a quien se sugería realizar frente al grupo cierta actividad con el fin de ilustrar las relaciones y nociones matemáticas. Del mismo modo, en muchas páginas de los textos se conservaron las explicaciones apoyadas en imágenes, características de los libros precedentes.²⁹ Se mantenía en ellas la idea de que el aprendizaje puede sustentarse en la ostensión de las no-

²⁷ E. Filloy (coord.) *Matemáticas. Tercer grado*, p. 41.

²⁸ *Ibidem*, p. 58.

²⁹ Véase, por ejemplo, C. Ímaz (coord.), *Matemáticas primer grado. Libro del maestro*, pp. 16 y ss.

ciones. No sería entonces un modelo puro sino uno en el que predominaba la noción de aprendizaje por descubrimiento, a la vez que conservaba elementos de otro basado en la ostensión como estrategia de enseñanza. La apariencia lograda de conjunto, sin embargo, era profundamente novedosa y logró que maestros y padres de familia recuperaran la distancia con el saber a enseñar que probablemente había perdido la «matemática para la vida».

Éste es, en síntesis, el *saber a enseñar* y el *texto del saber* que constituyc-
ra el marco de las acciones didácticas en México durante más de veinte años.³⁰ Por una parte se buscaba poner en contacto a los alumnos con las *verdaderas matemáticas*; por otra se trataba de establecer una nueva relación didáctica: el profesor que explica y ostenta era sustituido por el profesor que interroga; el niño que escucha, capta y atiende era remplazado por el que responde a preguntas cuyas respuestas aún no se le han enseñado. El supuesto que permitía plantear semejante propuesta era que los niños contaban con conocimientos intuitivos que los pondrían en condición de hacerlo.

La corriente mundial que diera origen a esta reforma, sin embargo, tenía en la base una sobrevaloración de los efectos que acarrearía en los niños el contacto con la disciplina, y también una sobrevaloración de las posibilidades intelectuales de éstos.³¹ Además, había surgido de una situación hasta cierto punto paradójica. Como J. Adda lo hiciera notar en su artículo «La reforma de las matemáticas modernas», se quiso dar respuesta al lanzamiento del *Sputnik* incorporando las matemáticas modernas en las escuelas. ¡Pero los soviéticos, en la época, no las enseñaban! Se había creado una nueva apuesta y, con ella, una nueva ficción educativa. Eso entonces estaba por saberse. Pero la nueva matemática llegó a las escuelas y ahí comenzó una nueva etapa de transposición, la que los profesores hicieron conjugando el nuevo texto de saber y los viejos principios que hasta entonces habían orientado su acción de enseñanza.

³⁰ En 1978 se inició una reforma a los planes de estudio y materiales didácticos oficiales correspondientes a los tres primeros grados de la educación primaria. En el resto de los grados los materiales a que hacemos mención se mantuvieron en las escuelas.

³¹ La sobrevaloración de las capacidades intelectuales de los niños era un fenómeno general, no anclado exclusivamente en las matemáticas. En la época, Bruner afirmaba en algunas de sus obras —por ejemplo en *El proceso de la educación o Hacia una teoría de la instrucción*— que era posible enseñar cualquier cosa, a cualquier edad, si se hacía de una forma adecuada.

RESULTADOS REPORTADOS EN LOS PAÍSES IMPULSORES DEL MOVIMIENTO

El ambicioso *saber a enseñar* que se había constituido no necesariamente coincidiría con el *saber enseñado* en las escuelas, ni aun en los países que lo habían impulsado. G. Papy —en una entrevista concedida a Pérez Lindo— reconoció que los resultados logrados en la década de los sesenta fueron mejores que en la de los setenta, ya que había pocos profesores bien preparados en la doble vía necesaria: la de los contenidos y la de los métodos. Bernard Sarrazy, por su parte, concluye que el sistema de enseñanza no parece aceptar —o lo hace muy poco— las ideas innovadoras. En su opinión hay dos efectos: el *Barrême* y el *certificado de estudios* que contribuyen a perpetuar usos por una parte instalados y por otra condenados.

Con la expresión efecto *Barrême*, Sarrazy define el efecto consistente en hacer que ciertos contenidos de enseñanza que han devenido obsoletos se mantengan. Tal mantenimiento tiene dos sustentos: la suposición de que los contenidos siguen siendo útiles socialmente y de que provocan una formación intelectual importante. El efecto certificado de estudios se manifiesta cada vez que un profesor opta por ciertas modalidades didácticas que no juzga necesariamente eficaces para el aprendizaje sino necesarias para adaptar a los alumnos a las exigencias del sistema escolar.³²

Sin embargo, oficialmente las matemáticas modernas estaban instaladas en las escuelas y no tardaría en llegar la reacción contraria a la reforma que las había introducido. En efecto, según el recuento de Josette Adda, en Francia se cuestionó vehementemente la reducción de la geometría en secundaria y desde 1968 comenzó una polémica entre «antiguos» y «modernos»; se publicaron textos amarillistas: «Cantor no tenía razón», por ejemplo; también la prensa lanzó titulares tendenciosos tales como «Matemáticas modernas: una generación sacrificada». Por supuesto, los promotores de la reforma se defendían; afirmaban —por ejemplo— que con base en ciertos sondeos se sabía que los niños disfrutaban las clases de matemáticas y que participaban activamente en la resolución de los problemas que se les planteaban. Sin embargo, las críticas fueron extendiéndose: el lenguaje rebuscado, el uso distorsionado de las nociones conjuntistas, el exceso de abstracción en que se cayó constituyeron el centro de la crítica.³³

Finalmente, en 1979 comenzó a construirse en Francia una nueva generación de programas para la enseñanza de las matemáticas; en esta nueva propuesta, la matemática moderna y todo lo que de ella derivara sería in-

³² Véase B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

³³ J. Adda, «La réforme des mathématiques modernes».

tencionalmente marginado. El movimiento cuestionador también llegó a Estados Unidos. Fue célebre el libro titulado *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*, mismo que ironizaba, entre otras cosas, el uso rebuscado del lenguaje en que derivó la reforma, así como el hecho de que la nueva orientación impedía a los alumnos aprender incluso las operaciones aritméticas básicas. El siguiente diálogo (hipotético), en el que participan una profesora y su grupo, ilustra perfectamente la crítica:

«¿Siete es un número?»

A los estudiantes, desconcertados por la sencillez de la pregunta, les cuesta trabajo creer que es necesario responder, pero el hábito de la pura obediencia los lleva a responder afirmativamente. La maestra se horroriza.

«Si os pregunto quiénes sois, ¿qué responderíais?»

Los estudiantes ahora responden con cautela, pero uno más valiente contesta:

«Yo soy Roberto Fernández»

La maestra lo mira con incredulidad y le dice con tono de reprensión: «¿Quieres decir que tú eres el nombre Roberto Fernández? Desde luego que no, tú eres una persona y tu nombre es Roberto Fernández. Volvamos ahora a mi pregunta inicial: ¿Siete es un número? ¡Claro que no! Es el nombre de un número. $5 + 2$, $6 + 1$ y $8 - 1$ son nombres del mismo número. El símbolo 7 es un numeral del número».³⁴

En ese país, bajo el impulso de opiniones como la de M. Kline, se generaría finalmente una nueva ola conocida como *back to the basic*, que pretendía restituir a la educación primaria todo lo perdido con la entrada de la matemática moderna. Esta nueva perspectiva daría sustento a otros currículos con supuestos e intenciones otra vez notablemente distintos.

Más allá de las duras críticas, que parecían provenir de posturas ideológicamente encontradas más que de datos específicos sobre el tema, en algunos países se realizaron, a fines de los años setenta, estudios para evaluar los aprendizajes escolares obtenidos por los alumnos en este periodo. En los llevados a cabo en Estados Unidos, Suiza, Francia o Gran Bretaña (todos citados por J. F. Perret en su libro *Comprendre l'écriture des nombres*) se llegó a conclusiones del siguiente tipo:

- * Los alumnos saben hacer operaciones tan bien como los alumnos que cursaron su educación antes de la reforma, pero tienen dificultades

³⁴ M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*, p. 5.

importantes para resolver problemas.

- Enfrentado a la resolución de problemas, un gran número de alumnos no ha adquirido las capacidades de comprensión y de invención que la nueva enseñanza, según sus promotores, debía haber desarrollado en ellos.
- Los objetivos de más alto nivel previstos por los reformadores no son alcanzados sino muy parcialmente.

Los resultados parecían contundentes, la capacidad de razonamiento tan anhelada no se había desarrollado; no había manera de salvar la reforma. Así pues, la matemática moderna se abandonaría a pocos años de incorporada en los países que la promovieron. El abandono tenía un fuerte sabor a equivocación y fracaso. De cualquier manera, y no obstante las críticas que después se dejaron sentir al calor del deseo de lograr una enseñanza científica a la altura del reto planteado por los soviéticos que ya habían alcanzado la Luna, en su momento ese camino fue el que se consideró más adecuado y las ideas se extendieron por todo el mundo.

En el caso de México, el debate que seguiría a la reforma de las matemáticas no está documentado; tampoco los resultados reales en términos de aprendizaje.³⁶ La pregunta que guía la siguiente parte de este libro —a casi treinta años de su incorporación y quince de su abandono— es si tal marco educativo generó nuevos contratos en las aulas y puso a los niños en relación con una matemática cercana a la erudita y promotora del razonamiento y la capacidad de formalizar, o si su contacto continuó siendo con la matemática utilitaria y mecanicista, distante de los matemáticos pero cercana a sus profesores. Se dice que esta reforma tuvo un impacto menor en las escuelas, que el *saber a enseñar* introducido estaba en efecto demasiado alejado del saber de los profesores. Se afirma también que los temas más complejos o desconocidos para los maestros (como la probabilidad o la lógica) fueron escasamente trabajados. Es probable que todo ello haya ocurrido, pero la realidad es que en nuestro país no se realizaron trabajos que dieran cuenta de eso. Lo que se sabe es local, anecdótico, producto de experiencias y perspectivas personales no fundamentadas en la indagación sistemática.

A continuación referiré lo que ocurrió en algunos salones de clases en los últimos años en que tal marco pedagógico estuvo vigente. Las observaciones con base en las cuales se da cuerpo al escrito se realizaron alrededor de quince años después de que los programas y textos porta-

³⁶ Quizá su documentación remitiría a un trabajo hemerográfico que no constituyó el objetivo de este libro.

dores de la *nueva matemática* habían entrado en vigor. Es posible afirmar, por lo tanto, que la penetración de tal *texto de saber* había llegado a su límite. Incluso podría suponerse que había comenzado su envejecimiento externo (en el sentido de Chevallard). Tal vez este escenario permita conocer los elementos que la matemática moderna aportó a la cultura escolar mexicana y a la vida en las escuelas. Procedo entonces a relatar cómo las viejas ideas se entrelazaron con las nuevas, dando lugar a una transposición cuyas características específicas acaso ni siquiera fueron imaginadas por los impulsores del movimiento.

Capítulo 4

ENTRE LAS UNIDADES DE TRABAJO Y LOS SISTEMAS POSICIONALES DE NUMERACIÓN. UNA RELACIÓN FUNDADA EN LA OSTENSIÓN

LOS SISTEMAS POSICIONALES DE NUMERACIÓN, UN TEMA NUEVO EN EL CURRÍCULUM

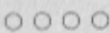
La numeración en distintas bases fue uno de los contenidos incorporados a la educación primaria con el movimiento de las matemáticas modernas. La noción que pretendía comunicarse era la de sistema posicional y no sólo la de sistema decimal, tal como la tradición educativa lo había establecido. El estudio de los sistemas posicionales —se reitera en las guías para el maestro— no se inicia con la notación decimal, sino con la representación objetiva y simbólica en otros sistemas para que el niño se percate de que el sistema decimal es sólo uno entre los posicionales. De esta manera —se dice— obtendrá bases más firmes para comprender mejor los principios del sistema cuando lo maneje.

Como puede apreciarse, el sistema de numeración que utilizamos todos los días —hasta entonces universo de las escrituras numéricas escolares— se convirtió en sólo una entre muchas formas posibles de representar los números, así como un ámbito de aplicación de los principios comunes a los sistemas posicionales de numeración. Los autores de la reforma se dirigían incluso a los niños de los grados superiores para hacerles saber su intención:

Para esta lección procura tener a mano un buen número de pequeñas fichas o frijolitos o piedritas, tales que quepan en los cuadros numerados que ves abajo [véase figura].

La idea es escribir números expresados en distintas formas para que te sea más clara la idea de sistema posicional.¹

¹ C. Ímaz (coord.), *Matemáticas. Quinto grado*, p. 14.

 12	7	 1
---	---	--

El ejercicio hacía notar que: a) cada ficha toma el valor señalado por el número que aparece en el cuadro en que está colocada; b) el número representado mediante fichas es igual a la suma de los valores relativos del total de fichas colocadas.

Con todo, la idea de sistema posicional se trató con bastante moderación en México. De hecho, aunque en otros países sí se hizo,² los programas y textos mexicanos no sugerían la representación formal de los números en las distintas bases. Quizá las escrituras más cercanas a ella fueron como las siguientes:

$$\boxed{3} \times 16 + \quad \boxed{2} \times 4 + \quad \boxed{2} \times 1 = \quad \boxed{58}$$

Este tipo de escrituras expresaban los resultados de la agrupación de objetos —previamente realizada— conforme a una cierta base. Tales ejercicios se hacían en quinto grado y con ellos se culminaba el tratamiento del tema. Pero éste se iniciaba en el primer grado, donde se promovió el agrupamiento de los elementos de colecciones en grupos de dos, tres, cuatro... diez elementos porque, se decía, «se estudiará el concepto de base, de una manera muy simplificada, para diversas bases, aun cuando el objetivo final sea el llegar al sistema de base 10 o decimal».³

Las actividades se sugerían generalmente con la siguiente secuencia:

- en un nivel manipulativo (por ejemplo agrupar objetos pequeños);
- en un nivel gráfico (*encerrar* en curvas los elementos de conjuntos ilustrados en el libro o representar mediante dibujos las agrupaciones realizadas);
- en un nivel verbal (los resultados de los agrupamientos debían anotarse mediante expresiones del tipo: *[se formaron] 4 parejas* y *[sobraron] 0 personas*).⁴

En el segundo grado los ejercicios eran más complejos ya que, con una

² Véase ISGML, *Mathematics in primary education*

³ C. Imaz (coord.), *Matemáticas, primer grado. Libro del maestro*, p. 64.

⁴ *Ibidem*, p. 69.

secuencia similar a la anterior, los elementos del conjunto de referencia se agrupaban recursivamente conforme a alguna base (que podía ser 2, 3, 5, 10 o incluso 12). En este caso se recomendaba el uso de tarjetas para conformar las escrituras numéricas correspondientes a los grupos constituidos. Por este medio se generaban expresiones del tipo:

1 grupo de 144, 5 grupos de 12 y 6 objetos sueltos.⁵

En el conjunto de los ejercicios propuestos había un claro interés por alcanzar la comprensión de las nociones de base y posición, que no aparecen ya como contenido explícito en el sexto grado. En este último, la atención se enfoca tanto en los decimales como en la suma y la resta con números enteros. Sin embargo, los profesores reelaboraron estas ideas y les imprimieron su propia identidad, tal como veremos en seguida, tomando como caso un grupo de sexto grado de cuarenta niños cuyo profesor tenía aproximadamente veinte años de ser docente y a quien llamaré Agustín.

LA TRANSPOSICIÓN DEL PROFESOR AGUSTÍN

Mostración repetida de agrupamientos en distintas bases

Después de una larga exposición cuyo tema es la Revolución Mexicana, el profesor aborda el tema de matemáticas manteniendo su papel protagónico en esta fase. Su participación consiste en ostentar el objeto matemático que quiere hacer aprender y que toma forma de agrupamientos recursivos de colecciones de objetos dibujados. La intención —a decir del profesor— es vincular tal actividad con los sistemas posicionales de numeración.

MAESTRO.— Bien, alumnos, ahora vamos a manejar algo un poquito referente o relacionado con lo que ustedes mencionaron al principio; es la cuestión de los nombres (*al hablar, adhiere al pizarrón una lámina cuya primera columna enlistra personajes de la Revolución*):

Porfirio Díaz	Valiente
Francisco I. Madero	Dictador
Emiliano Zapata	Pobreza

⁵ Véase C. Ímaz (coord.), *Matemáticas. Quinto grado*, pp. 16 y ss.

Venustiano Carranza	Hermosas	
Carmen Serdán	Pequeña	$\Omega \Omega \Omega \Omega \Omega \Omega \Omega \Omega \Omega \Omega$
La Jesusita	Grande	
La Valentina	Brillante	$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow$
La Rielera	Lujosa	
Juana Gallo	Floja	b3
b2	Feliz	
	Amable	
	Riqueza	
	Trágica	
	b5	

MAESTRO.— Bien, alumnos, aquí tenemos algunos nombres [...] que nos van a servir bastante para hacer agrupaciones, para formar grupos con el manejo de las bases que ya en algunas ocasiones hemos hecho.

MAESTRO.— Les voy a pedir amablemente, tanto a niños como a niñas, que pasen al pizarrón a hacer el encerrado, ¿verdad?; hay que encerrar, hay que agrupar de alguna manera estos sustantivos propios. Para que manejen las tres bases que tenemos indicadas, vamos a necesitar la participación de cada uno [...] Le vamos a pedir a su compañera (que pasó al pizarrón) que con un gisecito de color nos maneje la agrupación de base dos.

Observación de la investigadora: *La niña anota lo siguiente en el pizarrón:*

Porfirio Díaz
Francisco I. Madero

Emiliano Zapata
Venustiano Carranza

Carmen Serdán
La Jesusita

La Valentina
La Rielera

Juana Gallo

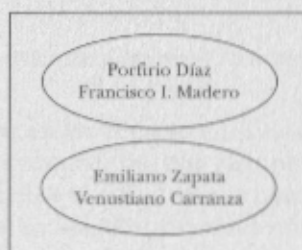
b2

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \overline{) 9} \\ 1 \end{array}$$

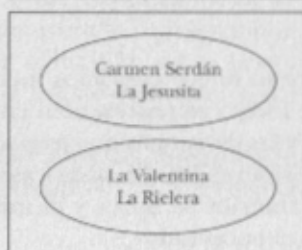
$$2 \times 4 + 1 = 9$$

La niña, después de una intervención del maestro, agrupa de dos en dos los grupos de dos elementos ya constituidos, cada uno con color diferente; luego borra la división anterior y hace la correspondiente al nuevo agrupamiento.

Observación de la investigadora: *Ahora la lámina y el pizarrón quedan así:*



$$\begin{array}{r} 2 \\ 4 \overline{) 9} \\ 1 \end{array}$$



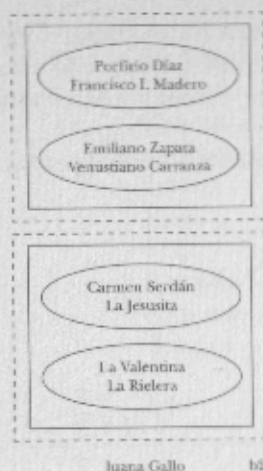
$$4 \times 2 + 1 = 9$$

Juana Gallo

b2

MAESTRO.- Bueno, no sé, niña, si puedas hacer otra agrupación; toma otro gis de diferente color. Acostúmbrense a eso, niños: para que no haya confusiones al revisar un trabajo, utilicen diferentes colores; para cada agrupación un color diferente, eso permite una mayor visibilidad y a quienes calificamos pues nos da oportunidad de hacerlo más rápido.

Observación de la investigadora: *Mientras el maestro habla, la niña en el pizarrón ha hecho lo siguiente:*



$$\begin{array}{r} 1 \\ 8 \overline{) 9} \\ 1 \end{array}$$

$$8 \times 1 + 1 = 9$$

De la misma manera se resuelve el resto de los ejercicios incluidos en la lámina. Las agrupaciones que la base indica se representan con curvas cerradas o rectángulos de distinto color, y las divisiones que *formalizan* esas agrupaciones son similares a las antes presentadas. En cada caso, la división correspondiente al agrupamiento anterior se borra y el maestro señala la importancia de que «se vea bien el encerrado».

En la actividad realizada durante el episodio anterior vale la pena destacar algunas cuestiones:

- La actividad está anclada en la representación gráfica de los conjuntos de objetos, que se agrupan recursivamente en base dos (luego en 5 y 3). El énfasis en el nivel gráfico se pone de manifiesto en las recomendaciones de hacer cada agrupamiento con distinto color.
- La *formalización* de los agrupamientos recursivos se traduce en una sucesión de divisiones. Éstas —que tal como se introducen sirven para validar los agrupamientos realizados— alejan la actividad del valor de posición, que la dotaría del sentido originalmente previsto; en lugar de vincularse con esto, las divisiones se usan para registrar y comprobar el conteo de los elementos agrupados. El siguiente episodio es representativo de tal alejamiento:

MAESTRO.- ¿Qué está haciendo ahora [su compañera]? Yo quiero que otro niño me diga qué está haciendo. A ver, tú (*señala a un niño*).

NIÑO.- Agrupando conjuntos de dos en dos.

MAESTRO (repite).- Agrupando conjuntos de dos en dos; ahora un con-

junto ya no va a tener dos elementos, sino ¿cuántos elementos?<⁶

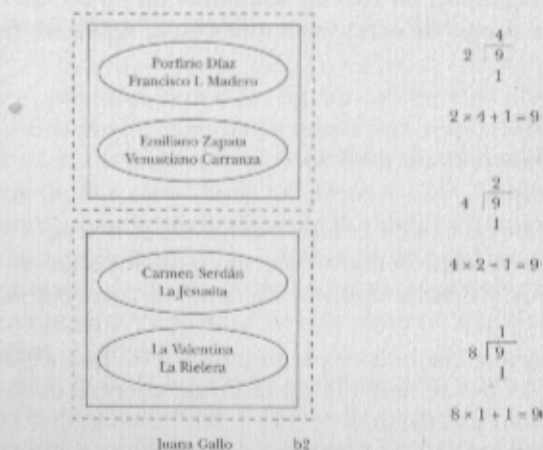
NIÑO.- Cuatro.

MAESTRO.- Cuatro, exacto, y dice (su compañera) que son cuatro por dos más uno, cuatro por dos ocho más uno nueve; ahora nos lo comprueba con la división: nueve entre cuatro igual a dos y sobra uno, ¿estamos de acuerdo?< [...]

Una ausencia fundamental: la escritura posicional

El anclaje en las representaciones gráficas escogido por el profesor tiene varias consecuencias, por ejemplo que sólo es posible trabajar con números pequeños (37 es el mayor que vimos incorporar). Ésta sin duda es una limitante en los alcances intelectuales de la actividad. Pero hay otra consecuencia que en términos de la transposición elegida es más relevante: la relación entre los agrupamientos recursivos y las divisiones sucesivas, tal como fue trabajada, no se orientó al análisis de las reglas y al funcionamiento de los sistemas posicionales de numeración. Me explico en seguida.

Como vimos, los agrupamientos recursivos se vincularon con divisiones y expresiones como las siguientes:



⁶ El símbolo < en nuestros registros significa que el maestro dirige una pregunta a todo el grupo; de manera inversa, el símbolo > significa que la dirige a un alumno en particular, aunque no lo explicita verbalmente; asimismo, el símbolo // significa que el profesor indica, con el tono de voz, que los alumnos deben completar la frase incompleta que él pronuncia.

Cada una de las divisiones —realizadas y borradas conforme se hacían los agrupamientos de distinto orden— eliminaba la referencia a los grupos previamente realizados. El hecho de que, en el caso arriba anotado, el 2, el 4 y el 8 no se hicieran equivaler a grupos de 2, 2×2 (2^2) y $2 \times 2 \times 2$ (2^3) —cuestión que sí se sugería en los programas y textos— eliminó tanto de la representación como de la reflexión la idea de *grupos de grupos*, sustento de los sistemas posicionales de numeración. *Aun más allá, los agrupamientos recursivos nunca se vinculan a la escritura posicional, cuestión que se sugería ya en los primeros grados con todas las adecuaciones del caso.*

Es decir que los diagramas utilizados por el profesor para expresar las relaciones entre los distintos conjuntos y subconjuntos formados, podían (y debían, según las recomendaciones oficiales) haberse utilizado para explicitar las relaciones entre los distintos órdenes de la numeración, y esto podía haberse hecho tanto en el nivel de los agrupamientos realizados como en el de la escritura. En la tarea de agrupar los nombres asociados a la Revolución, la escritura resultante habría sido del tipo:

$$1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 9$$

O, más adelante, simplemente el 1 0 0 1₂, pues según las propias recomendaciones de los libros del maestro, una vez comprendido el valor relativo de las cifras, convendría eliminar las referencias a dicho valor. Pero, como se ve, los diagramas no fueron utilizados en tal sentido. En vez de ello, el maestro se ocupó de otras cuestiones en la siguiente fase de la secuencia.

Desplazamiento franco hacia la división

Finalmente (una vez concluida la fase ostensiva), el maestro correlaciona la actividad que llama «representar números en distintas bases» con los términos de la división y dedica algunos momentos a recordar sus nombres:

MAESTRO.- Ahora se me ocurre preguntarles a los que están aquí charlando, niños, ¿cómo se llama la cantidad de adentro de la división, o sea, lo que vamos a repartir?<

NIÑA.- Dividendo.

MAESTRO.- ¿Cómo?<

NIÑA (*pronunciando más fuerte*).- Dividendo.

MAESTRO (*señalando a un lugar del aula*).- Y el niño que está allá, ¿cómo se llama el número, o sea la cantidad que está afuera?

NIÑO.- Divisor.

MAESTRO.- Alguien de aquí de esta fila, ¿cómo se llama el resultado de toda la división?

NIÑO.- Cociente.

Observación de la investigadora: *El maestro reitera el interrogatorio.*

En este episodio la atención se desplaza abiertamente hacia un aspecto que tradicionalmente constituía aprendizaje obligado sobre las operaciones aritméticas: la denominación de sus términos. Al hacerlo, el profesor se ha distanciado por completo del objetivo oficialmente previsto para la actividad de agrupar recursivamente los elementos de los conjuntos.

En la transposición del profesor Agustín hay una reinterpretación importante a la propuesta de enseñanza de los sistemas posicionales de numeración: la idea de posición como principio que sustenta las escrituras numéricas, incluyendo la escritura en base 10, se tradujo en la realización de agrupamientos mediante gráficos asociados a divisiones sucesivas. En esta reelaboración, las nociones de posición y de valor relativo quedaron por completo olvidadas.

Hasta aquí la forma que el objeto matemático tomó en la clase del profesor Agustín. Para que su comunicación fuese posible era indispensable la celebración de un contrato didáctico,⁷ cuyos elementos esenciales se analizan a continuación.

EL CONTRATO CELEBRADO, BASADO EN LA OSTENSIÓN

En la relación promovida con los agrupamientos recursivos y la numeración en distintas bases, el profesor toma una responsabilidad fundamental: mostrar a los alumnos una técnica. Se trata de que éstos sepan «encerrar» a partir de una cierta base los nombres, los dibujos, los símbolos, y luego comprobar mediante la división la validez de sus conteos. La ostensión, es decir, la presentación de los objetos de enseñanza de tal forma que «se proporcionan de un solo golpe todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción prevista»,⁸ lleva a recurrir a gráficos, a «encerrar», a usar distintos colores.

La prevalencia de la ostensión se comprueba aun sin haber presenciado el primer contacto con los sistemas de numeración. Los alumnos que frente al pizarrón realizan agrupaciones recursivas constituyen ayudas ostensivas para el profesor. Pero las acciones de él en tal sentido reaparecen una y otra vez a lo largo de la sesión:

⁷ G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.*

⁸ H. Ratsimba-Rajohn, *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques.*

MAESTRO.- Porque estamos trabajando en base //

NIÑOS.- Dos.

MAESTRO.- Y eso permite que las agrupaciones se vayan haciendo de dos en dos [...] eso que apenas ha hecho ella (la niña que pasó al pizarrón) es la primera agrupación base dos, estamos encerrando en un círculo, en un recuadro, elementos de dos en dos [...] a ver si la niña que los está agrupando nos puede explicar eso que está haciendo. A ver, ese dos, ¿de dónde lo sacaste? (se refiere al 2 de la expresión $2 \times 4 + 1$).

...

MAESTRO.- Le sobró un elemento. Le quedó uno suelto, entonces: dos por cuatro igual a ocho, más uno igual a nueve. Nos lo quiso comprobar con la división, nueve entre dos, y dice que nueve, que es el número de elementos entre dos, corresponde a cuatro, ese cuatro es el número de conjuntos que formó de dos elementos cada conjunto, cada grupo, sobrándole uno, hasta ahí. Adelante. Toma otro gis de diferente color, vas a seguir trabajando con ese grupo de sustantivos propios [...].

Sin embargo, las acciones desprendidas de la intención de hacer aprender no terminan con la ostensión; después, se hace repetir. Como última etapa de la clase, el profesor solicita realizar un ejercicio «solos, en su cuaderno, para evaluar, para calificar». El ejercicio es similar al anterior: consiste en escribir veintiún sustantivos y agruparlos en base 3; hacer treinta y siete dibujos y agruparlos en base 5, y organizar dieciséis adjetivos en base 4; también se deben hacer las divisiones correspondientes, «para comprobar» que los agrupamientos sean correctos.

Conforme a la relación establecida, la participación del profesor domina la escena de la clase, mientras los niños tienen una responsabilidad principal: poner atención para captar la demostración reiterada por el profesor, tal como se ve en los siguientes fragmentos:

MAESTRO.- Hay que estar atentos, ¿eh?, no hay que distraernos porque perdemos la secuencia, perdemos el conocimiento, que es lo fundamental.

...

MAESTRO.- Los demás vamos a observar. Después trabajaremos de manera conjunta, o sea individual, para calificarles su trabajo a cada uno.

Vamos a observar; niños de esta fila, por favor, observen a su compañero (que escribe en el pizarrón).

Esta última participación permite corroborar la intención del profesor: quienes pasan al pizarrón deben saber hacer, porque tal hacer es útil como una nueva ostensión que ayudará a aprender el procedimiento en cuestión. En estas ocasiones, el profesor transfiere al alumno frente al pizarrón la responsabilidad de ostentar.

LOS MECANISMOS DE REGULACIÓN, EPISODIOS GENERALMENTE DIFERIDOS

Las locuciones del profesor —principalmente al inicio de las clases— duran varios minutos. La participación de los niños en la *red primaria*⁹ es muy eventual y se reduce a completar frases formuladas por aquél. Por lo que se ve, no es responsabilidad asumida modificar el discurso para asegurarse de que los alumnos realmente lo comprendan. Al no comprometerse el profesor con las condiciones de recepción de su mensaje, no necesita modificarlo; al no hacer preguntas (a los alumnos), no se requieren respuestas. De tal manera, las condiciones efectivas de la recepción quedan ocultas, tanto durante los episodios en que se introduce un nuevo contenido matemático como en aquellos en que la ostensión se reitera.¹⁰ Se trata entonces —apelando a la terminología de Guy Brousseau— de un contrato *escasamente didáctico*,¹¹ en el que el profesor toma a su cargo la mostración de todas las relaciones del concepto en juego, y la forma de la ostensión se determina de una vez para siempre. Es decir, el profesor no pondera la eficacia y la pertinencia de la ostensión elegida para hacer adquirir el saber, y tampoco la adapta al nivel de comprensión que sus alumnos manifiestan, porque desconoce este nivel. En todo caso, la repite para hacerla aprender.

Sin embargo, hay ciertos momentos en que el docente busca constatar la permanencia de los aprendizajes. Se trata de los momentos dedicados a «repasar» conocimientos supuestamente ya aprendidos. Entonces el

⁹ Red primaria de comunicación, conforme a Régine Sirota, es aquella que se activa con la participación del profesor.

¹⁰ Esta forma de introducir los contenidos se corrobora en otras sesiones de clase, por ejemplo la dedicada a medidas de tiempo, que tiene lugar después de que se han hecho ejercicios gimnásticos para concentrar la atención. En este caso, la locución ininterrumpida del profesor quedó registrada en el protocolo en aproximadamente cuarenta renglones.

¹¹ G. Brousseau, en «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques», define como escasamente didácticos los contratos en que los profesores asumen pocas responsabilidades frente a sus alumnos.

profesor formula preguntas y con ellas se evidencia la ineficacia de su acción, el desequilibrio didáctico, porque pocas veces los niños ofrecen las respuestas que el profesor quiere escuchar. Ante tales circunstancias, el docente hace intentos por restablecer el equilibrio didáctico,¹² por ejemplo:

Aporta la respuesta no recibida:

MAESTRO.- Ahora dice [su compañera] que formó [un grupo] ¿de cuántos elementos?<

Observación de la investigadora: *Los niños guardan silencio.*

MAESTRO.- De ocho, ¿más cuánto?<

NIÑO.- Uno.

Simplifica al máximo las preguntas formuladas:

MAESTRO.- Ustedes van a *checar*, ¿cuántos elementos encerró?<

NIÑOS.- Dos.

MAESTRO.- ¿Por qué razón?<

Observación de la investigadora: *Los niños guardan silencio.*

MAESTRO.- Porque estamos trabajando en base //

NIÑOS.- Dos.

Llama la atención el hecho de que tales mecanismos se hagan necesarios a pesar de que las preguntas planteadas tienen un bajo nivel cognitivo; en ningún caso vimos formular alguna que implicase una anticipación o un saber no comunicado con antelación. Esto se comprueba en otras preguntas planteadas a lo largo de la sesión:

MAESTRO.- ¿Con qué base está trabajando su compañero? (el niño que agrupa de 7 en 7 en el pizarrón).

NIÑOS.- Siete.

MAESTRO.- Exactamente, y son dos por siete catorce más tres //

NIÑOS.- 17.

...

MAESTRO.- Ahora se me ocurre preguntarles a los que están ahí charlando, ¿cómo se llama la cantidad de adentro de la división? [...]

¹² Véase G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques».

EQUILIBRIO DIDÁCTICO Y PÉRDIDA DE SIGNIFICACIÓN

En este grupo, los mecanismos de regulación generalmente se difieren a momentos en que se repasa o se evalúa el aprendizaje, y sólo entonces se recogen índices para ponderar la eficacia de la acción docente. Puede verse, por otra parte, que aunque las preguntas planteadas se refieren a pequeños trozos de conocimiento previamente transmitido, es frecuente que los niños no los tengan disponibles ante las interrogantes del profesor. De ahí entonces la necesidad de introducir mecanismos para lograr que las respuestas se produzcan y restablecer el equilibrio didáctico. Una acción posible ante los momentos de estancamiento es que el profesor asuma más compromisos ante sus alumnos, que realice nuevos esfuerzos por lograr más comprensión. Otra posibilidad consiste, como ha señalado Brousseau, en llevar la relación didáctica a la baja, mediante una simplificación mayúscula de las preguntas planteadas. Cuando esto ocurre se pierde casi por completo la significación original de los conocimientos, pero la ganancia es que las respuestas llegan. Esta es la opción del profesor Agustín:

MAESTRO.- Ustedes van a checar, ¿cuántos elementos encerró?<

NIÑOS.- Dos.

MAESTRO.- ¿Por qué razón?<

Observación de la investigadora: *Los niños guardan silencio.*

MAESTRO.- Porque estamos trabajando en base //

NIÑOS.- Dos.

Puede verse cómo se produce el efecto Topaze.¹³ Al parecer, los alumnos no han aprendido mucho, tal vez nada de lo que el maestro espera, pero ante preguntas cada vez más transparentes y banales se puede responder al profesor. Porque para hacerlo no se necesita saber. Y en efecto, testimonio del escaso éxito logrado en los objetivos de aprendizaje previstos es lo anotado en nuestro registro: «El maestro califica a los niños conforme van terminando. Los comentarios repetidos del profesor son del siguiente tenor: "No te fijaste" o "¡A ver si a la próxima!"».

Tales comentarios —vertidos en la última fase de la clase— revelan que los niños no tienen disponibles los saberes trabajados en la primera parte de la sesión. Sin embargo, aun desprovistas de significación, las respuestas llegan y eso permite al profesor continuar la relación sobre los términos contractuales establecidos.

¹³ A este efecto, identificado por G. Brousseau, me referí en el primer capítulo.

¿A QUIÉN SE DIRIGE EL PROFESOR?

El profesor Agustín —como cualquier otro— tiene como algo necesario que la progresión didáctica avance. Necesita respuestas que muestren la efectividad de sus actos didácticos para continuar sin alterar los términos de la relación establecida. Lo logra incorporando las acciones regulatorias ya descritas. Sin embargo, los índices que le permiten continuar no provienen del total de sus alumnos:

- A lo largo de las clases sólo unos cuantos son interrogados y muy pocos participan en la red primaria de comunicación. En general, los niños no quieren participar ni pasar espontáneamente al pizarrón; en más de una ocasión el maestro dice: «¿Tengo que traer una grúa?», «Los demás parece que tuvieron pavor de pasar al pizarrón» o «¿Es que les pusieron *Kola Loka*?»¹⁴
- Durante la revisión de los trabajos al término de la clase, pocos niños obtienen calificación satisfactoria a los ojos del profesor.

Lo ocurrido en otras clases apoya la afirmación de que el maestro no se dirige a todos sus alumnos. Hay llamadas de atención y comentarios que revelan el desconocimiento de temas repetidamente trabajados, como en el siguiente pasaje: «Vamos a pasar un poquito a las operaciones fundamentales, las que nos sirven para resolver nuestros problemas; a cada momento estamos con eso: “No sé sumar, profesor, no sé restar”. Ayer o antier lo vimos, cómo estaba el escritorio, parecía que teníamos una venta de golosinas. A ver, les dije: “Los que no saben sumar”, y se me vinieron como ocho; “Y los que no saben restar...”, y se me vienen otros ocho [...]»

El contenido de este episodio, a la vez que revela la incapacidad de los alumnos de recordar los procedimientos de cálculo, permite suponer que el profesor se interesa en el aprendizaje de sus alumnos. Empero, la forma en que responde a la preocupación carece de memoria didáctica.¹⁵ Esto trae como consecuencia que los niños continúen necesitando las repeticiones del profesor.

¹⁴ *Kola Loka* es el nombre de un pegamento de alta resistencia que ya se comercializaba desde esa época.

¹⁵ Recordará el lector que —según G. Brousseau— la memoria didáctica conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos, sin cambiar su sistema de decisión (el contrato en curso). Su uso trae como consecuencia una modificación de la relación entre los alumnos y el saber en juego.

DE LOS SISTEMAS POSICIONALES DE NUMERACIÓN A LOS AGRUPAMIENTOS CON COLORES Y LA DIVISIÓN

Como vimos, la numeración en distintas bases fue un contenido incorporado a la educación primaria con la reforma de los años setenta. La noción que pretendía comunicarse era la de *sistema posicional*, y el sistema decimal no sería sino un caso de ello. El recurso principal ofrecido en los textos y programas sobre el tema era el agrupamiento recursivo y su asociación con las escrituras de posición.

La transposición operada por el profesor Agustín acarreó una ausencia esencial: la notación posicional y el valor relativo de las cifras que la constituyen. En lugar de trabajar estos aspectos, se dividió una y otra vez para —supuestamente— comprobar la validez de las agrupaciones realizadas.

Por otra parte, al restringirse el rango de los números trabajados, debido en parte al interés por la ostensión, se limitó la posibilidad de advertir otro aspecto fundamental de los sistemas de numeración: la factibilidad de representar cualquier número con unos cuantos símbolos asignados conforme a otras tantas reglas.

Fue finalmente una interpretación que, surgida de una tradición ostensiva, puso énfasis en el uso de diagramas y gráficos y dejó de lado los sistemas posicionales de numeración, motivo original de la actividad. Es una transposición que no escapó a la «vennogramía» y que puso a los niños en contacto con un contenido de enseñanza bastante alejado del original.

DEL CONTRATO SUGERIDO AL CONTRATO CELEBRADO

La reforma de los años setenta también buscaba generar nuevas formas de relación con la matemática escolar, y el descubrimiento era la principal; se buscaba partir de las nociones intuitivas de los niños para —mediante el apoyo de las situaciones y las preguntas pertinentes— arribar a las nociones y notaciones matemáticas convencionales. Tal intención llamaba a celebrar contratos en que el profesor se abstuviera de enunciar los conocimientos que buscaba ver aparecer; implicaba incorporar la interrogación y, a partir de las respuestas sucesivas, concluir formulando la noción motivo de la interacción. Era un nuevo papel para el docente: interrogar en vez de enunciar; era un nuevo papel para el alumno: razonar para colaborar con sus repuestas en la construcción de una formulación prevista por el profesor.

Ninguna de estas responsabilidades fue asumida en el grupo del profesor Agustín. El contrato que celebra con sus alumnos se sustenta en una noción central: la ostensión, seguida necesariamente de la repetición. Se trata de un contrato que en su clase es habitual.

LO NUEVO EN LO VIEJO

La concepción de enseñanza puesta en acto por el profesor Agustín —derivada de una vieja tradición educativa— no fue desplazada por la que traían las nuevas matemáticas. Si bien decidió trabajar algunos de los contenidos sugeridos, no consideró relevante el aprender descubriendo. Según nos dijo, los alumnos «deben poner atención, para que reciban el conocimiento que tenemos que darles». También afirma: «Las que nos dan (en programas y textos) son sugerencias» y ante tal argumento le resulta irrelevante cambiar el descubrimiento por la ostensión. De manera distinta, considera conveniente implementar la *enseñanza globalizada* que justifica la vinculación entre nombres de revolucionarios y bases numéricas. La *globalización* es una añeja noción de enseñanza promovida intensamente en los años sesenta¹⁶ con el argumento de que «la división en disciplinas didácticas no es vital».¹⁷ En cambio, según sus impulsores, en la enseñanza globalizada se toman en la armonía natural los hechos y se coordinan actividades mentales, físicas y sociales de manera que los fenómenos naturales y socioeconómicos se estudian como si integraran una unidad, por las relaciones existentes entre ellos.

En opinión de connotados pedagogos mexicanos, el valor de esta forma de enseñanza derivaba de que, si en la escuela pudiesen presentarse los conocimientos tal como ocurren en la vida, sin parcelar, sin volverlos artificiales, todo estaría ganado de antemano: mostración, interés, aprendizaje.¹⁸

Orientado por nociones como éstas, el maestro Agustín mezcla el español y la Revolución con las escrituras numéricas. Resulta cuestionable el valor de la correlación entre estos asuntos. Son igualmente dudosas la motivación y la vinculación vital que pudiesen derivar de tal presentación del saber. Estas ideas, agregadas a una aparente incompreensión del signi-

¹⁶ Véanse, por ejemplo, *Programas de educación primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*; T. Villarreal, *Didáctica general*, y R. Ramírez, *Técnica de la enseñanza*.

¹⁷ T. Villarreal, *Didáctica general*, p. 216.

¹⁸ Véase R. Ramírez, *Técnica de la enseñanza*.

ficado profundo de ciertas actividades vinculadas a los conjuntos y la numeración de posición, dificultaron aún más el manejo de éstos como contenidos de enseñanza.

...

Hasta aquí un primer testimonio de cómo las ideas incorporadas con la matemática moderna se entretejieron con las viejas. Es el caso de un profesor que, ejerciendo su derecho de libertad de enseñanza, tradujo los sistemas de numeración en agrupación de nombres de personajes asociados con la Revolución Mexicana mediante una técnica basada en el color. Lo primero —a su entender— permitía motivar a los alumnos; lo segundo —al parecer— posibilitaba que se *captara bien el concepto*.

Puede pensarse, sin embargo, que esta intención no se cumplía sino en escasa medida, porque las cláusulas del contrato devenido habitual, la comprobación generalmente diferida del equilibrio en la relación y los pocos niños que aportan los índices para valorarlo, no hacían posible otra cosa. La inclusión de los conjuntos y la numeración en distintas bases, contenidos emblemáticos de la matemática moderna, no significó, pues, que entraran en el aula ni la reflexión ni *las verdaderas matemáticas*.

No fue el profesor Agustín el propietario exclusivo de una transposición de este tipo. En otras aulas registramos acontecimientos similares a los aquí expuestos. Muy probablemente tuvieron lugar en muchas de ellas. Pero la matemática moderna instalada sobre la base del sensual-empirismo dio lugar a otras transposiciones (y a otros contratos didácticos) en ocasiones más cercanas (aunque nunca iguales) a las previstas por sus impulsores. En seguida veremos algunas de ellas.

Algunos rasgos de la actividad matemática desarrollada
en el grupo del profesor Agustín.

	<i>Primera clase¹⁹</i>	<i>Segunda clase</i>	<i>Tercera clase</i>	<i>Cuarta clase</i>
Contenido	Sistemas de numeración de base y posición	Medidas de tiempo y suma de números denominados	Números simétricos en la recta numérica	Suma de fracciones de distinto de nominador
Se introduce definición o procedimiento	✓	✓	✓	✓
Se ilustra definición o procedimiento	✓		✓	✓
Se plantean preguntas cerradas	✓	✓	✓	✓
Se plantean preguntas abiertas o anticipatorias				
Se resuelven problemas como vía del aprendizaje				
Se resuelven problemas como espacio de aplicación				
Justificaciones y argumentaciones	Ni de parte de los alumnos ni de parte del profesor	Ni de parte de los alumnos ni de parte del profesor	Ni de parte de los alumnos ni de parte del profesor	Ni de parte de los alumnos ni de parte del profesor
Se realizan ejercicios rutinarios	✓	✓	✓	✓
Se realiza trabajo en equipo				
Uso de material manipulable				
Confrontación de resultados y estrategias				
Mecanismos de regulación didáctica	Pasar la pregunta a otro alumno; Dar la información; Simplificar al máximo las preguntas	Pasar la pregunta a otro alumno; Dar la información; Simplificar al máximo las preguntas	Pasar la pregunta a otro alumno; Dar la información; Simplificar al máximo las preguntas	Pasar la pregunta a otro alumno; Dar la información; Simplificar al máximo las preguntas

¹⁹ Ni en esta ni en la tercera sesión se introdujo el contenido abordado. Por las referencias hechas en clase, queda claro que el primer tiempo de la interacción didáctica se dedicó a ello.

Capítulo 5

ENTRE EL DESCUBRIMIENTO Y LA COMUNICACIÓN. EN TORNO A LAS UNIDADES DE MEDIDA Y LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

A MANERA DE INTRODUCCIÓN

ENTREVISTADORA.- ¿Sigue usted los libros y los programas de la Secretaría en sus clases?

PROFESOR JOSÉ.- Mire usted, los libros tienen cosas muy buenas, como el razonamiento; siempre los utilizamos, pero no puede uno basarse nada más en ellos. La clase debe tener secuencia y ahí nos encontramos con que los temas están cortados; también faltan algunos temas, y no porque los quitaron no vamos a enseñarlos.

Las palabras del profesor reflejan bien su postura ante las propuestas oficiales: lo que se considera valioso en la formación de los alumnos hay que aprovecharlo; lo que parece faltar hay que complementarlo. Es una postura que coincide con la de quienes la literatura sobre el tema llama «profesores expertos». Y coincide en lo siguiente: estos profesores —entre otras cosas— tienen interiorizada una agenda de enseñanza bien provista, y también un repertorio de estrategias de enseñanza bien probadas en la práctica.¹

Los acontecimientos que se examinan en seguida sucedieron en el grupo del profesor José, cuya práctica efectivamente oscila entre los contenidos y propuestas de la matemática moderna y la agenda que, él supone, es benéfica para la formación de sus alumnos. Los episodios que se analizan remiten a dos sesiones de clase: una dedicada a las propiedades de las operaciones aritméticas (tema incluido con la reforma) y otra a los sistemas decimales de medida (que en su opinión «no debían haberse elimi-

¹ Véase F. Tochon, *L'enseignant expert*.

nado»). La doble inserción, a la vez que permite observar la gestión de distintos *textos del saber*, nos coloca frente a cambios relevantes en los contratos que regulan la actividad.

El profesor José estudió la especialidad de enseñanza de las matemáticas y tiene veintiocho años de ejercer el oficio de enseñar. Ha trabajado en primaria y secundaria, en escuelas públicas y privadas. Es un profesor muy reconocido por la directora de la escuela y los padres de familia. Como se revela al inicio de este capítulo, en su acción hay acercamientos y distancias con la matemática moderna. El grupo del profesor José está conformado por treinta y dos niños y niñas que permanentemente muestran su entusiasmo por aprender matemáticas.

LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN: UN NUEVO CONTENIDO Y UN NUEVO TEXTO DE SABER

Hasta los años sesenta, la multiplicación, y en general las cuatro operaciones aritméticas, eran el corazón del currículum y se enseñaban mediante un enfoque caracterizado por:

- Su vinculación con situaciones consideradas conocidas por los niños.
- La introducción ostensiva de los procedimientos convencionales para realizar los cálculos.
- La ejercitación de los procedimientos.
- El acento en la denominación de los términos: «sumando», «sustraendo», «multiplicando», «multiplicador», etcétera.
- La comprobación de los resultados mediante técnicas también mostradas por el profesor.
- La aplicación a la resolución de problemas «vinculados a la realidad del niño».³

Con la reforma de los años setenta se pretendía cambiar radicalmente esta perspectiva. Para el caso de la multiplicación, se ampliaría la noción propia de la cultura escolar —«la multiplicación es una suma abreviada»— mediante otra más sofisticada según la cual «la multiplicación puede tratarse mediante el producto cartesiano de dos conjuntos A y B».⁴ Al igual

³ Veáanse, por ejemplo, H. Virgen Sánchez, *Mi libro de cuarto año. Aritmética y geometría. Estudio de la Naturaleza*, y R. Novaro, *Mi libro de quinto año. Aritmética y geometría. Estudio de la naturaleza*.

⁴ El producto cartesiano se obtiene apareando cada elemento del conjunto A con cada elemento del conjunto B. National Council of Teachers of Mathematics, *Números enteros*, p. 21.

que en las otras operaciones, las propiedades de ésta serían tratadas no sólo como instrumento (herramienta para la resolución) sino como objeto de conocimiento (motivo de reflexión y análisis).⁵ De este modo, se dedicaban bastantes páginas a la distributividad, la conmutatividad y la asociatividad en los libros de los niños y de los profesores. El interés era que el alumno conociera y razonara de una manera consciente los mecanismos y propiedades en que se apoyan los algoritmos de cálculo y pudiera justificarlos con base en ello. El fin último era que comprendieran realmente las matemáticas.⁶

Según la clasificación del ISGML, el enfoque adoptado se podía ubicar entre los que ponen énfasis en la estructura matemática a la vez que en el significado, la comprensión y el descubrimiento.⁷ El libro del maestro de tercer grado de la época fue quizá el más explícito al respecto: «Los algoritmos que nosotros usamos tienen como fundamento las ideas en las que el sistema de numeración está basado y en propiedades aritméticas de los números: la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad. De ahí la gran importancia que tienen estas propiedades: a partir de ellas [...] se pueden elaborar reglas para efectuar las operaciones aritméticas entre números arbitrarios. Estas reglas son precisamente los algoritmos».⁸

No sabemos si los objetivos introducidos se cumplieron, lo que sí pudimos corroborar es que en los salones de clase se dedicó tiempo a enseñar las propiedades de las operaciones. Los profesores interesados en llevar a sus alumnos la nueva matemática —y con ella la comprensión «de lo que hasta entonces se había enseñado de manera memorística»— las enseñaron. Éste es el caso del profesor José.

UNA LECCIÓN SOBRE LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

La propiedad conmutativa —en este caso de la multiplicación— se refiere a una cuestión intuitiva y simple: el hecho de que si multiplicamos, por ejemplo, 2×5 , obtendremos el mismo resultado que si multiplicamos 5×2 . Lo mismo ocurre con 3×4 y 4×3 . En general, como sugieren estos

⁵ El doble papel de los conceptos matemáticos *instrumento* y *objeto* ha sido claramente analizado por R. Douady; el primero se refiere al uso o creación de herramientas para resolver problemas; el segundo designa al concepto en tanto objeto cultural que encuentra un lugar en el edificio del saber reconocido socialmente en un cierto momento (véase R. Douady, «Jeux de cadres et dialectique outil-objet»).

⁶ Al respecto pueden verse los *Libros de matemáticas del maestro*, ampliamente mencionados en el capítulo anterior.

⁷ Véase ISGML, *Mathematics in primary education*.

⁸ C. Ímaz (coord.), *Matemáticas tercer grado. Libro del maestro*, p. 26.

ejemplos, si a y b son números naturales, entonces $a \times b = b \times a$. Parte de la actividad en el grupo del profesor José se dedica a producir una formulación sobre este hecho.

Fase uno. Ostensión analógica de la conmutatividad

El profesor anota en el pizarrón:

Propiedades:

1. Conmutativa
2. Asociativa
3. Elemento neutro
4. Distributiva

Luego se dirige a los alumnos.

MAESTRO.- Quién me quiere decir qué es conmutar o propiedad conmutativa?<

Nadie levanta la mano para indicar que quiere contestar.

MAESTRO.- A ver si alguien sabe...

Nuevamente nadie levanta la mano.

MAESTRO.- A ver, ¿quién quiere venir y conmutar conmigo?<

Los niños continúan con las manos abajo.

MAESTRO.- Bueno, entonces voy a conmutar con la maestra (*la investigadora*); aquí voy a pintar un circulito y acá otro (*dibuja dos círculos en el piso, al frente del salón*) en uno voy a poner maestra y en otro maestro (*y anota esto en los círculos*), y aquí yo me voy a parar y la maestra acá, y fíjense lo que vamos a hacer (*intercambian de círculo; al hacerlo el maestro adopta una actitud teatral*).

Risas.

MAESTRO.- Bueno, pues ya conmutamos, aplicamos la propiedad conmutativa, ¿me pasó algo a mí?<

NIÑOS.- ¡No!

MAESTRO.- ¿Le pasó algo a la maestra?<

NIÑOS.- ¡No!

MAESTRO.- Estamos iguales, volvemos a conmutar (*el maestro y la investigadora regresan al lugar original*).

El profesor actúa con soltura al poner a sus alumnos en relación con la propiedad conmutativa. A la vez que parece no dudar de la pertinencia

de su analogía, no teme plantear preguntas cuyas respuestas no ha enseñado con antelación: «¿Qué es conmutar?» Luego continúa, pues el plan previsto va más allá.

Fase dos. Construcción y prueba de una primera formulación

MAESTRO.- Entonces, ¿qué será conmutar?<

Algunos niños levantan la mano indicando que quieren contestar.

MAESTRO.- A ver, manos, manos...

Más niños levantan la mano.

MAESTRO.- ¿Qué será conmutar?<

NIÑO.- ¿Cambiar de lugar?

MAESTRO.- Cambiar de lugar... ¿qué es conmutar, Leticia?

LETICIA.- Cambiar de lugar.

MAESTRO.- Cambiar de lugar... pero fíjense que no nos pasó nada, estamos igual. *(Los niños escuchan con gran atención.)* Entonces, ya saben lo que es conmutar [...].

Una vez que emerge la noción debe probarse su validez, de ahí que se haga necesaria —en la previsión del profesor— la actividad que se registra a continuación.

MAESTRO.- Ahora voy a poner una multiplicación *(anota en el pizarrón: $4 \times 3 \times 1 = 12$)*. ¿Qué dice ahí?>

El niño no responde.

MAESTRO.- ¿No sabes? A ver, Luis.

LUIS.- Cuatro por tres por uno.

MAESTRO.- ¿Qué dice ahí, Lilia?

LILIA.- Cuatro por tres por uno.

MAESTRO *(dirigiéndose a un niño)*.- ¡Conmuta!, quiero que conmutemos>

Todos los niños levantan la mano indicando que quieren contestar; se ven interesados.

NIÑO.- Tres por cuatro por uno.

El maestro anota en el pizarrón $3 \times 4 \times 1 = 12$; va leyendo en voz alta lo que escribe.

MAESTRO.- ¿Quién más? <

NIÑO.- $1 \times 3 \times 4$.

El profesor anota la respuesta; solicita otras y las va anotando, todos los niños quieren responder. Al final del episodio el pizarrón queda así:

$$4 \times 3 \times 1 = 12$$

$$3 \times 4 \times 1 =$$

$$1 \times 3 \times 4 =$$

$$1 \times 4 \times 3 =$$

$$4 \times 1 \times 3 =$$

MAESTRO.- Muy bien, ¿cuánto me dan [esos cálculos]?<

NIÑOS.- ¡Doce!

MAESTRO.- ¿Por qué? A ver, Francisco.

FRANCISCO.- Porque cuatro por tres por uno igual a doce.

MAESTRO.- Muy bien, ¿y esto a cuánto sale? *(va señalando cada una de las multiplicaciones; en cada caso, los niños responden a coro: ¡Doce!)*

MAESTRO.- Siempre sale doce, ¿ya se dieron cuenta de qué es conmutar?<

NIÑOS *(a coro)*.- ¡Sí!

Fase tres. Institucionalización de la formulación

MAESTRO.- De aquí [del ejercicio anterior] vamos a sacar un enunciado (anota la palabra *enunciado* en el pizarrón). ¿Cómo diría ese enunciado? <
Observación de la investigadora: *Una niña levanta la mano.*

MAESTRO.- Ya tengo una mano arriba, ¿algún otro niño que sepa qué diría ese enunciado?

Observación de la investigadora: *Nadie más levanta la mano.*

MAESTRO *(enfático)*.- Fíjense bien, vuelvo a repetir: yo aplico la propiedad conmutativa, o sea que estoy cambiando de lugar los factores, pero ¿qué pasa?<

NIÑO.- Que es el mismo producto.

MAESTRO.- Que siempre me va a dar el mismo producto. A ver, ¿cómo diría el enunciado?< (...)

Observación de la investigadora: *Algunos niños levantan la mano indicando que quieren contestar.*

NIÑA.- ¿El orden de los factores no altera el producto?

MAESTRO.- Está bonito ese enunciado: El orden de los factores no altera el producto *(repite enfáticamente)*. Aunque yo cambie de lugar los factores, no va a alterar el producto, nos va a dar siempre lo mismo. Lo escribimos *(los niños escriben en el cuaderno y el maestro en el pizarrón, a la vez que pronuncia en voz alta:)* Enunciado: El orden de los factores no altera el producto.

NIÑO.- ¿Lo ponemos en propiedad conmutativa, maestro?

MAESTRO.- Sí, así podríamos expresar la propiedad conmutativa [de la mul-

tiplicación]. Lo copian por favor, copian primero esto (*señala todo lo que está escrito en el pizarrón*) y luego el enunciado: El orden de los factores no altera el producto, o sea que aunque cambiemos de lugar los factores, no se va a alterar el producto, no va a salir otra cosa.

Observación de la investigadora: *Los niños escriben en su cuaderno; cuando terminan, el maestro continúa.*

MAESTRO.- Ya tenemos la primera propiedad: conmutativa. Ahorita vamos a ver la otra: la propiedad asociativa. Propiedad asociativa... ¿Quién quiere ser mi socio? [...]

Y la actividad continúa, mediante una dinámica bastante similar a la anterior.

LA RELACIÓN INICIAL CON EL SABER

Como puede verse, al profesor le interesa que los alumnos produzcan un conocimiento, pero también que éste se explicita. Así, propicia que se elabore una formulación y acepta como válida una añeja forma de expresar la propiedad conmutativa: *El orden de los factores no altera el producto*. Pero la expresión no aparece de buenas a primeras, es la culminación de un proceso promovido por las interrogaciones docentes. Para llegar a ella fue necesario un recorrido didáctico que se inició con la percepción —por parte del profesor— de que los niños no tenían intuiciones sobre el término *conmutar*: «¿Qué es conmutar?», pregunta, y nadie le responde. Esta percepción, seguida de la analogía y la interrogación, desemboca finalmente en la frase arriba mencionada.

EL DESCUBRIMIENTO, NOCIÓN FUNDAMENTAL EN EL CONTRATO CELEBRADO

La relación inicial con la propiedad conmutativa (de la multiplicación) fue regulada por un contrato orientado a construir una formulación. Para un profesor formado en la tradición sensual-empirista probablemente no es trivial poner en marcha tal contrato. Hacerlo implica fiarse de varios elementos:

- Los conocimientos previos (intuitivos) de los niños.
- Su capacidad de razonar sobre la base de tales conocimientos.
- La pertinencia de las preguntas planteadas y la información ofrecida para desencadenar las respuestas no comunicadas por el profesor.

Conforme al contrato celebrado, el profesor asume diversos compromisos. El primero, repasar conocimientos que supone necesarios para comprender el contenido en juego. Por ello, como *fase cero*, se hace un recordatorio de saberes previos sustentado en la interrogación. Los conocimientos considerados garantía de un descubrimiento exitoso del concepto van de la noción de multiplicación a los signos que la indican y las técnicas para probar los cálculos que la involucran.

En general, los niños muestran a su profesor que dominan los aspectos del contenido matemático en cuestión. Pero el contrato no marcha siempre sobre ruedas; entonces, el profesor debe gestionar *regulaciones para re-cobrar el equilibrio didáctico*.⁹

MECANISMOS DE REGULACIÓN QUE DEVIENEN MECANISMOS DE PREVENCIÓN, O LA ACTIVACIÓN PERMANENTE DE LA MEMORIA DIDÁCTICA

Habiendo establecido el profesor José una relación didáctica que toma en cuenta los saberes provisionales y los niveles de comprensión alcanzados por sus alumnos, pocas veces se pierde el equilibrio didáctico. Los niños se involucran en la actividad, hay muchas manos arriba indicando que se desea responder y por lo general las respuestas que se ofrecen son correctas. Empero, ocasionalmente se requiere incorporar mecanismos que hagan progresar el tiempo didáctico, que logren que fluyan las respuestas:

- *Usar la analogía*: por ejemplo cuando no llegaban las respuestas sobre la conmutatividad.¹⁰
- *Aportar información adicional*, por ejemplo cuando se señala que en la conmutatividad, al cambiar de lugar, «no pasa nada».
- *Evocar acciones específicas ocurridas durante la clase*. «¿No te acuerdas cómo lo expliqué?», dice por ejemplo el profesor a un alumno que no sabe realizar un cálculo en el pizarrón durante la fase de ejercitación (luego el niño obtiene la respuesta esperada).
- *El trabajo individual en horas extraclase* con los niños rezagados.

Las acciones regulatorias implementadas permiten obtener las respuestas previstas conservando y aun acrecentando la significación. Es decir, el

⁹ Esta idea la desarrolla G. Brousseau en «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques»; en el primer capítulo de este libro se aborda el concepto de manera sucinta.

¹⁰ En el episodio en que se trabaja la propiedad asociativa se utiliza esta misma forma de razonamiento (sólo que con «socios»); en una clase dedicada a fracciones ocurre algo similar.

profesor hace uso de su *memoria didáctica*¹¹ para modificar sus decisiones en función del momento específico de conceptualización de sus alumnos.

Gracias a su condición de experto, la efectividad de la acción del profesor va más allá. No siempre espera a que el tiempo didáctico se detenga para luego instrumentar maneras de hacerlo avanzar. Ciertas estrategias —probadas como mecanismos de regulación en momentos de desequilibrio— devienen luego preventivas de algún estancamiento. Es el caso de la analogía que, habiendo mostrado su efectividad para hacer comprender la propiedad conmutativa, se convierte en *estrategia* de enseñanza al introducir la propiedad asociativa.

UN VIEJO TEMA Y OTRAS REGLAS

No siempre en la clase del profesor José se trabajan los temas introducidos con las matemáticas modernas; tampoco se interroga siempre para ayudar a descubrir. Este doble abandono tiene lugar en una clase dedicada a las unidades de medida, en la cual sólo la vinculación inicial con el objeto de saber es similar a la hasta aquí comentada.

Al inicio: el hábito de la interrogación

Conforme a una forma de actuar establecida por el uso, el profesor ofrece ciertas informaciones y, alternadamente, plantea ciertas preguntas para obtener una formulación en colaboración con los alumnos. En efecto, en la primera fase de la clase, de la manera que observamos antes, el profesor José interroga a sus alumnos y les solicita consultar el diccionario para que, sobre la base de tres términos —*sistema*, *métrico* y *decimal*—, obtengan como conclusión el significado de la frase *sistema métrico decimal*. La formulación resultante es la siguiente:

Sistema métrico decimal: conjunto relativo a la medida
que tiene como base el 10.

¹¹ Como mencioné en el primer capítulo, según G. Brousseau y J. Centeno, la «memoria didáctica» se manifiesta por la utilización de informaciones y datos personalizados, contextualizados, temporalizados y no universales. Esta memoria conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos. Su uso trae como consecuencia una modificación de la relación entre los alumnos y el saber en juego.

No obstante lo que parece anunciar la renovación del contrato habitual, el profesor cambia las reglas y comunica el saber a sus alumnos.

El cambio de reglas: comunicación oral de un saber¹²

MAESTRO.- Ahora vamos a hacer un poquito de historia. Nos vamos a remontar hasta la época prehistórica. Los hombres que empezaron a habitar la tierra, ¿ustedes creen que ya sabían esto?<

NIÑOS.- ¡No!

MAESTRO.- No; sin embargo ellos, sin darse cuenta, ya medían, ya contaban, sin darse cuenta de lo que estaban haciendo.

Observación de la investigadora: *Los niños están muy atentos al relato del profesor.*

MAESTRO.- ¿Cómo lo hacían? Tenían que caminar, por ejemplo, para ir a buscar agua, o para andar en la cacería [...] ellos se daban cuenta de la trayectoria que tenían que hacer, de la distancia que tenían que recorrer, no lo hacían ni en metros ni en yardas, ni en nada de eso, ellos se daban cuenta de que tardaban cierto tiempo en llegar a donde estaban los animales, medían por el tiempo. [...] Pasa el tiempo y el hombre se establece ya en lugares y empiezan a aparecer las grandes civilizaciones; ustedes ya las estudiaron, ¿cuáles son esas?<

NIÑOS.- ¡Egipto! ¡Los fenicios! ¡Mesoamérica! (*Diversas respuestas al mismo tiempo*)

MAESTRO.- Bueno, entonces estas personas ya sabían contar y medir, recuerdan que [...]

Mediante un interrogatorio, que los niños responden ágilmente, se recuerda algo de la numeración maya, romana y egipcia; también se hacen al profesor preguntas sobre tales culturas, por ejemplo:

NIÑO.- Maestro, ¿y esos pueblos medían con el tiempo? (*se refiere al relato del maestro acerca de la manera de medir las distancias*)

MAESTRO.- Sí, era la forma en que medían las distancias [...] Bueno, pasa el tiempo y llegamos al siglo pasado. En Francia se juntan muchos sa-

¹² En lo que sigue sólo se presentan algunos fragmentos del relato para mostrar la relación que se establece entre el maestro, los alumnos y el saber. A lo largo del relato del profesor entran varias personas al salón y lo interrumpen, casi todas las interrupciones están asociadas a una visita al planetario prevista para unos días después. De acuerdo con nuestra forma de exposición, tales interrupciones y los desvíos que de ellas se desprenden se señalarán con puntos suspensivos.

bios [...]. Entonces, esas personas empiezan a discutir y piensan hacer un sistema de medidas para todo el mundo, para que no hubiera problemas con las cosas comerciales.

NIÑO.- ¿Cómo *problemas*, maestro?

MAESTRO.- ¿Cómo? Antes de eso se usaban partes del cuerpo para hacer medidas; por ejemplo, había una medida que se llamaba codo, que era de aquí a acá (*señala sobre su cuerpo*); otra que se llamaba cuarta (*abre su mano*); otra que se llamaba pie, ¿eh? Usaban las partes del cuerpo para medir. Si yo iba a comprar una tela... Pasa acá, Benjamín (*Benjamín es el niño de menor estatura del salón, pasa al frente, luego el maestro continúa*). Benjamín es el dependiente, y yo le decía: «Deme cinco cuartas, señor».

Observación de la investigadora: *Benjamín marca cinco cuartas sobre el escritorio del profesor, éste las va contando, los niños se ríen; luego el maestro marca cinco cuartas con su mano, en el mismo lugar que Benjamín había marcado las suyas y va contándolas en voz alta.*

MAESTRO.- Uno, dos, tres, cuatro... oiga, señor, me está usted robando, me está dando tres cuartas» (*esto último adoptando una actitud teatral*).

Observación de la investigadora: *Todos los niños ríen, también Benjamín; se ven muy divertidos.*

MAESTRO.- Entonces había problemas, ¿ya viste cuáles problemas? (*dirigiéndose al niño que antes había preguntado*) [...] entonces, estos señores trataban de buscar una medida universal para todo el mundo.

Observación de la investigadora: *Se generan comentarios entre los niños, algunos comparan su cuarta con la de los compañeros cercanos.*

MAESTRO.- Bueno, ellos, estos señores que se reunieron en Francia, se guiaron por nuestra Tierra (*hace un dibujo de la Tierra en el pizarrón*), trataron de medir un cuadrante (*seguramente los niños ya saben lo que es un cuadrante terrestre, pues no solicitan información adicional al respecto*).

NIÑO.- ¿Y cómo le hicieron?

MAESTRO.- No sé cómo le hayan hecho, porque en los libros no especifican...

NIÑO.- ¿Y cuánto se tardaron?

MAESTRO.- Tardaron siete años en hacer esta medición (*comentarios entre los compañeros cercanos, parece que causa sorpresa el tiempo utilizado en hacer la medición*) [...].

UN CONTRATO DE COMUNICACIÓN, O NO SÓLO EL MAESTRO PREGUNTA

Como lo muestra el registro, a pesar de lo que parece una convicción mostrada en acto, el objetivo de la actividad no siempre es producir una

formulación sobre la base de la interrogación; en ocasiones, y en función de la naturaleza del objeto de saber en juego, el profesor considera conveniente comunicar. Vimos así que en la segunda fase de la clase las reglas de la interacción se modifican y los niños escuchan la comunicación del saber. Se trata de la historia de la medición, un saber que no es posible descubrir sobre la base de la interrogación. Sin embargo, el que regula la acción de comunicar con la de escuchar en este grupo es, según la categorización de G. Brousseau, un contrato *estrictamente didáctico* en el que el profesor intenta provocar un aprendizaje, trata de modificar (acrecentándolos) los conocimientos de sus alumnos. Tal voluntad se expresa de distintas formas: recuperando índices acerca de si la comunicación tuvo lugar, modificando su discurso, agregando información.

Los alumnos, por su parte, son escuchas exigentes; mientras el relato se despliega, la información se procesa y se interroga al profesor, se solicita más información, la que se ofrece se comenta. Recordemos algunas de las preguntas planteadas durante el episodio:

- Maestro, ¿y esos pueblos [antiguos] medían con el tiempo?
- ¿Cómo *problemas*, maestro?
- ¿Y cómo lo hicieron?
- ¿Y cuánto se tardaron?

La comunicación del saber se convierte en diálogo; no sólo el profesor pregunta, también lo hacen los alumnos.

LA EJERCITACIÓN, SIEMPRE DESPUÉS DE LA COMPRESIÓN

En las clases del profesor José la introducción de un nuevo objeto de saber es siempre seguida de momentos destinados a la práctica. Es lo habitual en muchas clases. Sin embargo, aquí una cuestión la hace singular, pues a decir del profesor: «También la ejercitación es importante, pero antes debe haber comprensión, si no, ¿qué es lo que van a retener, lo que no entendieron? No, primero debe haber comprensión».

Además, el profesor utiliza otros índices que han devenido tales gracias a su experiencia: la expresión en las caras de los niños y su atención son dos que le parecen importantes. En efecto, ante la pregunta: ¿cómo sabe que los niños comprendieron lo que usted trata de enseñarles?, la respuesta es la siguiente: "Pues, por la experiencia que tiene uno, se ve en las caras [de los niños]. Cuando se ven gustosos, satisfechos, atentos, despiertos, uno se da cuenta de que aprendieron; que se vea la duda [en sus

caras] o que estén distraídos, es muestra de que no saben, de que no han entendido. Entonces hay que buscar otra forma».

La lectura inmediata de las situaciones, complementada por una amplia gama de posibles respuestas cuya validez en el terreno ha sido comprobada a lo largo de los años, es otro rasgo de los profesores expertos.¹³

DEL SABER A ENSEÑAR A LOS SABERES ENSEÑADOS

En el programa oficial de la época, el contenido *propiedades de la multiplicación* se expresaba mediante los objetivos siguientes:

- Efectuar multiplicaciones de números enteros positivos aplicando la propiedad conmutativa.
- Efectuar multiplicaciones aplicando la propiedad asociativa.
- Efectuar multiplicaciones aplicando la propiedad distributiva.¹⁴

Las actividades sugeridas para alcanzarlos eran muy similares en los tres casos. Valgan como ejemplo las referidas a la propiedad conmutativa:

- Construya una tabla de multiplicar hasta el 10.
- Encuentre en ella algunos productos como 3×2 y luego búsquelos cambiando el orden de los factores.
- Observe, con base en los resultados, que es lo mismo multiplicar 3×2 que 2×3 .
- Concluya que el cambio de orden en los factores de una multiplicación no altera el resultado.
- Llame a tal hecho *propiedad conmutativa de la multiplicación*.
- Generalice que si a y b representan enteros, se puede afirmar que: $a \times b = b \times a$.
- Exprese, en sus propias palabras, la propiedad conmutativa de la multiplicación.¹⁵

El profesor José ha retomado en su salón de clases los contenidos y el texto de saber propuestos oficialmente. Según nos dijo, aborda todos los temas planteados en el programa, probablemente por la formación matemática adquirida en la normal superior. No obstante su interés por incor-

¹³ Véase F. Tochon, *L'enseignant expert*.

¹⁴ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Quinto grado*, pp. 81 y ss.

¹⁵ *Idem*.

porar tales saberes, el *efecto-horizonte*¹⁶ que habría tendido la matemática moderna sobre su acción docente no lo limitó para conservar vivas algunas creencias y acciones derivadas de ellas. Así, mantiene como libro de cabecera uno escrito por Arquímedes Caballero,¹⁷ y agrega a su agenda de enseñanza contenidos que supone importantes, varios de los cuales fueron eliminados con la ola modernizadora. Es el caso de las numeraciones antiguas o las unidades del sistema métrico decimal que aquí vimos comunicar. «¿Cómo no enseñarlas si es un aprendizaje importantísimo?», dice. Y en efecto, en cualquier libro de *Aritmética* y *Geometría* anterior a la reforma podía encontrarse el tema. Pero, según la propia voz del profesor, su fuente específica de inspiración en este caso son los textos gratuitos de los años sesenta, en los cuales puede verse una forma de organización del saber casi idéntica a la trabajada por él: las dificultades resultantes de la variabilidad de las medidas corporales, las referencias a la Convención Internacional del Metro celebrada en París y a la medición del cuadrante terrestre. Después seguiría el conocimiento de las diferentes unidades de medida y las conversiones entre los múltiplos y submúltiplos de cada una.¹⁸

En la época en que la utilidad práctica de las matemáticas era menospreciada podía pensarse que la decisión del profesor era resultado de un simple *efecto Barrême*,¹⁹ en virtud del cual ciertos contenidos de enseñanza que han devenido obsoletos se mantienen bajo una de estas consideraciones: que siguen siendo útiles socialmente o que provocan una formación intelectual importante. Hoy, cuando se ha extendido por el mundo occidental una perspectiva didáctica distinta y la funcionalidad de los objetos matemáticos recobró su papel fundamental, resulta indiscutiblemente válida la postura del profesor José.

TODOS LOS ALUMNOS CUENTAN, O LA PREOCUPACIÓN POR UNA ALTA TASA DE ÉXITO

El profesor José mantiene el equilibrio didáctico no sólo en la interlocución con unos cuantos niños, sino que dirige sus acciones didácticas a todos sus

¹⁶ A. Kuzniak, *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*.

¹⁷ Los textos de Arquímedes Caballero eran sumamente apreciados en el periodo previo a la matemática moderna. Son emblemáticos de la pedagogía ostensiva descrita en otro capítulo.

¹⁸ Véase R. Novaro, *Mi libro de quinto grado. Aritmética y geometría. Estudio de la Naturaleza*, pp. 64-65.

¹⁹ Véase B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*.

alumnos. De ello deriva una regla: los ejercicios deberán incorporarse sólo cuando cada uno haya mostrado comprensión.²⁰ De esta manera, el contrato en curso es exigente con el profesor y también con los alumnos: no se avanza en la progresión didáctica si las responsabilidades de hacer comprender y de comprender no han sido cumplidas. Y el profesor utiliza diversos indicadores para ponderar si la comprensión se ha logrado: interroga a un número importante de niños durante las clases, luego solicita levantar la mano a quienes «ya entendieron», y no continúa sino hasta que el número de manos es cercano al total de alumnos. «¡Manos, manos, quiero ver manos!», dice con frecuencia en el transcurso de la clase.

También bajo la exigencia de una relación cuyo éxito se mide en función del total de sus alumnos, el profesor repasa diariamente ciertos aprendizajes y trabaja individualmente con los alumnos rezagados: «Siempre hay cuatro o cinco que se quedan atrás, hay que estar duro y duro con ellos [...] a la hora del recreo, volverles a explicar, ponerles ejercicios, dejarles más tarea; claro que algunos *se salvan*, pero siempre se quedan rezagados uno o dos».

LOS RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD

Una elevada tasa de éxito. De acuerdo con nuestra aproximación metodológica, sólo nos es visible lo que tiene lugar en el ámbito público de la clase. Los «alumnos protagónicos»,²¹ los que mostraron públicamente su relación con el saber, dejan ver que fue posible ir más allá de la simple memorización.

Un registro siempre intelectual. A la manera de un experto, el profesor José dispone de una gama amplia de estrategias de enseñanza, de regulación y de prevención. Su larga trayectoria docente, traducida en una acción eficaz conforme a reglas por él mismo definidas, mantiene la actividad de sus alumnos en los límites de lo intelectual y relativamente cerca

²⁰ No es tema de este libro discutir el término *comprensión*; sólo anotaré, siguiendo a B. Mopondi, que ha habido muchos intentos de precisar su sentido. Uno de ellos es el de B. Bloom, al definir como conductas que muestran comprensión el traducir, el interpretar y el extrapolar. La comprensión puede ser también entendida como «el conocimiento del conjunto de situaciones que concretan la noción». En una interpretación tomada de la informática, *comprensión* podría definirse como reformulación en diversos lenguajes. Finalmente, de acuerdo con su etimología, el término puede entenderse como: «tomar de conjunto» conocimientos de manera que se establezcan vínculos entre ellos para facilitar su activación, su uso o su control.

²¹ Esta expresión es utilizada por A. Mercier en «La relation didactique et ses effets».

de las intenciones de quienes impulsaron la matemática moderna.

Hay que decir que las situaciones e interrogaciones planteadas por el profesor tienen un nivel hasta cierto punto elemental. No obstante, hay otra cuestión que conviene destacar: rara vez se recurre a la simplificación de las preguntas para alcanzar las respuestas esperadas, la actividad parece mantener un cierto nivel de significación derivado de la acción de razonar, de observar las analogías del profesor, de escuchar activamente sus relatos, de interrogar, de demandar información.

LOS LÍMITES DE LOS CONTRATOS CELEBRADOS

Cabe preguntarse si sería posible —a partir de las relaciones con los objetos de saber que promueve el profesor José— dar respuestas que impliquen reorganizar los conocimientos adquiridos, es decir, resolver problemas. Creo que la respuesta sería *no*; varios hechos parecen indicarlo, el principal: la secuencia de clases registrada. Otro hecho relevante es un diálogo incidental sostenido con el profesor al finalizar una sesión:

MAESTRO.- En la siguiente clase, ya que tienen el panorama general, vamos a hacer conversiones, de unidad mayor a menor, y la otra clase, de unidad menor a mayor, que es más difícil. Con esto terminamos el tema.

Investigadora: ¿Y no les va a poner aplicación a problemas?

Maestro (*desconcertado, como sorprendido por la pregunta, piensa unos segundos*): Sí, sí les pongo aplicación, aunque lo más difícil es que entiendan las conversiones.

Como se ve, la resolución de problemas —que implica la reorganización de saberes previos— no es central en la agenda del profesor. Él ha definido en otros términos la relación con el saber: la ha centrado en los conceptos y las nociones; consiste en construir formulaciones, obtener y retener informaciones, institucionalizar los saberes, manejar procedimientos, aplicar eventualmente lo aprendido. El horizonte parece ser la comprensión. Y el éxito que logra en tales límites le permite suponer que la vinculación que promueve con las matemáticas es pertinente. Internamente, la relación establecida muestra validez: los niños cumplen los compromisos contraídos, disfrutan la actividad, la relación avanza fluidamente y la tasa de éxito es elevada. Seguramente por ello, en la época en que la observamos, la acción del profesor José era reconocida por el sistema de enseñanza.

Una comparación de la relación motivo de este apartado con la analizada en el capítulo anterior permitirá ver que, en un caso, las acciones ten-

dientes a mantener el contrato en curso orientaban hacia la pérdida del significado; en el otro, hacia su conservación. Este hecho es crucial para diferenciar el curso de contratos en principio similares. En un caso, se trata de un contrato *ligeramente didáctico*; en el otro, de uno *fuertemente didáctico* en el que —sobre la base de la memoria didáctica— el profesor se compromete a lograr que sus alumnos aprendan.

Por último, fijo la atención en el siguiente hecho: los contenidos matemáticos que motivan la relación parecen no repercutir en la diferenciación anterior. Esta afirmación encuentra apoyo también en la experiencia que se relata en seguida, en la cual los niños —aun sobre la base de un contrato articulado alrededor de la comunicación de un viejo objeto de saber— tendrán un papel fundamental no sólo en las decisiones tomadas en la clase sino incluso en las formas específicas que adquirirá dicho objeto de saber.

Rasgos de la actividad desarrollada en las clases del profesor José

	<i>Contenido abundado</i>	<i>Se introduce alguna definición</i>	<i>Se plantean preguntas cerradas</i>	<i>Se plantean preguntas abiertas o interrogatorias</i>	<i>Se resuelven problemas para aplicar los conocimientos adquiridos</i>	<i>Se exponen argumentos cones sobre la validez de las respuestas</i>	<i>Se realizan ejercicios rutinarios</i>	<i>Registro de la actividad</i>
Primera sesión	Propiedades de la multipli- cación con naturales	Si, los niños colaboran en su construcción	Si	Si (para obtener conclusiones que se anotarán en el cuaderno)	No	Si, de tipo procedimental	Si	Intelectual
Segunda sesión	Equivalencia entre fracciones	Si, los niños colaboran en construcción	Si	Si (para obtener la conclusión; también algunos cálculos)	No	Si (dos)	Si	Intelectual
Tercera sesión	Sistema métrico Decimal	Si, los niños colaboran en construcción	Si	Si (para obtener la conclusión; también algunos cálculos)	No	No	No	Intelectual
Cuarta sesión	Equivalencias (conversiones) entre unidades del SMD	Si, y se recuerda anterior	Si	Si (dos o tres)	No	Si	Si	Por momentos sobrecarga el efecto Topaze
Quinta sesión	Equivalencias (conversiones) entre unidades del SMD	Se recuerda la anterior	Si	Si (solo una)	No	Si	Si	Intelectual
Sexta sesión	Razones y proporciones	Si	Si	Si (para obtener la conclusión)	No	No	Si	Intelectual

Capítulo 6

EL HÁBITO DE LA EXPLICACIÓN Y EL INTERÉS POR VIEJOS OBJETOS DE SABER

LA EXPLICACIÓN COMO CATEGORÍA DIDÁCTICA

En el diccionario, la palabra *explicar* tiene significados diversos: declarar, manifestar y hacer comprender una cosa; entre sus sinónimos se citan *desarrollar, desplegar y aclarar*.¹ De acuerdo con B. Mopondi,² en latín «el término "explicare" significa "desplegar"; la explicación, considerada en esta acepción, es la *extensión* de una noción en todas sus implicaciones conceptuales con el objetivo de acceder a la *esencia* del objeto».

La explicación constituyó en otras épocas un recurso esencial en la enseñanza de las matemáticas elementales. En México, por ejemplo, en los programas oficiales de los años cuarenta, el «explicar y poner ejemplos» constituía el núcleo del texto de saber.³ En los años sesenta —momento cumbre del sensual-empirismo—⁴ la explicación se conservaba como categoría didáctica, aunque mezclada con otras intenciones: «que los niños razonen» y «que vayan de lo concreto a lo abstracto». Hasta ese entonces, los libros de texto se estructuraban mediante la exposición de conceptos y procedimientos matemáticos. Tal exposición tenía pretensiones explicativas que, alternadas con la ejercitación, suponían conducir a los niños a «entender» las matemáticas.⁵

Pero la explicación fue marginada como categoría didáctica con la irrup-

¹ Véase, por ejemplo, el *Diccionario Larousse*, 1972.

² B. Mopondi, «Les explications en classe de mathématiques», p. 14.

³ Véase Secretaría de Educación Pública, *Programas para las escuelas primarias de la República Mexicana*.

⁴ Véase Avila y García, *Paradigmas de enseñanza de las matemáticas elementales. El siglo XX en México*.

⁵ Véanse, por ejemplo, J. Hernández y A. López Orche, *Mi libro de sexto año. Aritmética y geometría*, y R. M. Novaro, *Mi libro de quinto año. Segunda parte. Aritmética y geometría*.

ción de la matemática moderna. Con el interés de que los niños descubrieran los conceptos, las explicaciones estaban prácticamente proscritas. Según los postulados del aprendizaje por descubrimiento, había que abstenerse de enunciar lo que los niños pueden descubrir por ellos mismos.⁶ Desde entonces la explicación (o exposición, con la cual de hecho se confunde) perdió prestigio como estrategia de enseñanza. El profesor que explica (o expone) se identifica con el profesor que habla y que al hacerlo «llena recipientes vacíos», reduciendo así al alumno a un sujeto inerte y sin iniciativa. No obstante tal creencia, acendrada con la entrada de las matemáticas modernas, algunos profesores mantuvieron la explicación como núcleo de su acción didáctica; por ejemplo la maestra a quien llamaré Clara, en cuya acción se sustenta este capítulo.

Con sus explicaciones, la maestra Clara busca aclarar, hacer comprender. Y sus explicaciones van desde acaso la más simple —consistente en hacer entender un procedimiento— hasta otras donde el interés radica en que los alumnos comprendan el concepto que intenta comunicar.

EL CONTEXTO DE LA RELACIÓN DIDÁCTICA

En el ciclo escolar 1989-1990 visité durante siete días no consecutivos el grupo de la profesora Clara. Era un grupo compuesto por treinta y cinco alumnos de sexto grado perteneciente a una escuela con prestigio académico importante. La profesora Clara es una mujer afable y cariñosa, a la vez que exigente con sus alumnos. En la época en que la vimos trabajar tenía treinta años de servicio en la educación primaria. Según nos dijo, no realizó otros estudios más allá de la escuela normal, sólo tomó los cursos cortos que ocasionalmente se ofrecían a los maestros. También consultaba libros de texto de primaria y secundaria para preparar sus clases de matemáticas. Los primeros libros de texto gratuitos publicados en nuestro país aún le servían de fuente de consulta, y decía: «¡Qué buenos eran esos libros!». La maestra Clara expresaba el gusto por su profesión y la satisfacción que le causaban los éxitos de sus alumnos, quienes, de acuerdo con las reglas no escritas de la noosfera,⁷ tenían logros importantes. Por ejemplo, en varias ocasiones habían ganado el concurso para seleccio-

⁶ Véase L. Shulman y R. Keislar, *Aprendizaje por descubrimiento. Evaluación crítica*.

⁷ Y. Chevallard denomina *noosfera* a la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico. En la noosfera participan —según sus diferentes modalidades— los representantes del sistema de enseñanza y los representantes de la sociedad (padres de familia, especialistas de la disciplina, actores políticos, etcétera).

nar al mejor alumno de sexto grado de la zona escolar a la que pertenecía su escuela. Tales concursos, que se premian con un viaje conocido como Ruta Hidalgo y una visita al presidente de la república, generaron un prestigio significativo para la maestra Clara, tanto entre los padres de familia como entre sus compañeros y las autoridades de su zona escolar.

UN VIEJO OBJETO Y UN ORGULLO PROFESIONAL: LA RAÍZ CUADRADA

La raíz cuadrada no aparecía como contenido de enseñanza en los programas de la época signada por la matemática moderna. No fue necesario que la ola innovadora la proscribiera, pues había sido eliminada de la educación primaria al comenzar los años sesenta.⁸ Es decir que su obsolescencia había sido señalada tiempo atrás. Hoy podríamos preguntarnos qué utilidad tiene enseñar el procedimiento para obtener raíces cuadradas si las calculadoras hacen ese trabajo con sólo apretar un botón. Empero, la raíz cuadrada parece constituir uno de esos contenidos que algunos profesores experimentados conservaban hasta entonces en su repertorio didáctico. Tal vez reconociendo este interés, algunos textos producidos por editores privados de la época incluían la raíz cuadrada. La idea con que se incorporaba era muy simple: como procedimiento para obtener —dado un número— el número que multiplicado por sí mismo da el número propuesto. Puesto que un número y su raíz cuadrada pueden ser interpretados como la medida del área de un cuadrado y de su lado, el procedimiento servía luego para resolver algunos problemas igualmente sencillos cuyo tema principal eran los terrenos y superficies cuadradas. Esta forma de presentación, con escasas pretensiones matemáticas y propia de una época donde los procedimientos de cálculo eran esenciales, ofrecía un modelo útil para acercarse al tema. Los alumnos de la maestra Clara contaban con uno de los libros que ofrecían tal acercamiento.⁹

El algoritmo de la raíz cuadrada, como han señalado algunos autores,¹⁰ es con mucho el más misterioso de todos. La mayoría de las personas, dice B. Gómez, cuando resuelve una raíz cuadrada efectúa una serie de pasos cuya explicación permanece en el más absoluto de los secretos. Quizá por esto mismo, calcular raíces cuadradas ganó la fama de ser «uno de los mar-

⁸ Véase Secretaría de Educación Pública, *Programas de educación primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*.

⁹ D. Robles y M. L. Minquini, *El matemático. Quinto grado*.

¹⁰ Por ejemplo B. Gómez, en su obra *Numeración y cálculo*.

tirios más practicados en la escuela». ¹¹ Sin embargo, la maestra Clara piensa de otro modo: «La raíz cuadrada no viene en los programas, pero para mí es un reto que los niños la aprendan. Siempre que tengo sexto año la doy». Y como se verá en seguida, a los niños no les incomoda aprenderla.

LAS EXPLICACIONES DE LA MAESTRA CLARA

Veremos en seguida las explicaciones de la maestra Clara cuando el objeto de saber en juego es la raíz cuadrada:

Explicación inicial: definición de raíz cuadrada

La maestra introduce, al inicio de la clase, el nuevo objeto de saber en forma de definición. De hecho, la clase se inicia con la institucionalización de la noción:

MAESTRA.- Varios de ustedes me han dicho: «Maestra, ¿cuándo nos enseña raíz cuadrada?»; pues ahora va a ser ese día en que aprendamos la raíz cuadrada. Escriben como título *raíz cuadrada*.

Observación de la investigadora: *Los niños escriben en silencio, se ven interesados.*

NIÑO.- Maestra, una pregunta: ¿también nos va a enseñar la raíz cuadrada de fracciones?

MAESTRA.- No, hoy sólo la vamos a iniciar, escriban lo siguiente (*dicta pausadamente*): «La raíz cuadrada es lo contrario de elevar un número al cuadrado. Sacar raíz cuadrada es encontrar un número que, multiplicado por sí mismo, nos dé el número propuesto».

La idea de raíz cuadrada introducida coincide con la mencionada párrafos atrás; la maestra la presenta de una manera sumamente escueta, aunque, de acuerdo con B. Mopondi, una definición implica ya un esfuerzo explicativo, porque busca mostrar el sentido del objeto. ¹² La afirmación: «La raíz cuadrada es lo contrario de elevar un número al cuadrado» parece también introducirse con el fin de ofrecer un referente conocido para la noción: el tema «potencias», que ya había sido trabajado en clase. A la

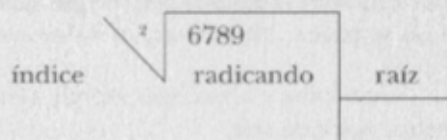
¹¹ Grupo Cero, *De 12 a 16, un proyecto de currículo* (1987), citado por B. Gómez, *Numeración y cálculo*, p. 154.

¹² Véase B. Mopondi, «Les explications en classe de mathématiques».

definición dada por la profesora le siguen nuevas explicaciones, orientadas a ofrecer los significados necesarios para comprender ya no el concepto sino el procedimiento para calcular raíces cuadradas. Veamos como ejemplo algunos fragmentos del episodio que prosigue a la introducción de la definición.

Segunda explicación: dotación de significado de los términos de la expresión

MAESTRA.- Bueno, ahora van a poner atención para que vean lo que es necesario conocer antes de poder resolver la raíz cuadrada (y anota en el pizarrón):



MAESTRA.- Primeramente, tenemos este signo que vamos a llamar signo radical y que indica que vamos a obtener una raíz [...] Para poder reconocer que la raíz es cuadrada necesitamos un numerito, el número 2 [...] porque hay un índice 3 cuando la raíz es cúbica [...] Este número (señala) se llama radicando, es el número que... (termina de explicar el sentido de cada uno de los elementos que forman la expresión. Los niños van anotando en su cuaderno).

MAESTRA.- ¿Cómo se llama esta cantidad? (señala el 6789) <

NIÑOS.- ¡Radicando!

MAESTRA.- ¿Y el resultado?<

NIÑOS.- ¡Raíz!

MAESTRA.- [...] Bueno, ¿alguna duda?

NIÑOS.- ¡No!

MAESTRA.- Ya con estos conocimientos, vamos a empezar a sacar nuestra raíz cuadrada.

NIÑO.- (saca y hojea un libro publicado por una editorial privada, luego se dirige a la maestra), ¡Maestra, pero en *El matemático* (Robles y Minquini, 1988) nomás viene como una división, sin esa raya que usted dibujó para abajo!

MAESTRA.- Bueno, pero también es una raíz cuadrada. Por lo regular en los últimos libros puede decirse que viene nada más así, es correcto, pero eso no tiene mucha importancia [...]

Y entonces tiene lugar una tercera explicación.

Tercera explicación. «Descomposición ostensiva»¹³ del procedimiento para calcular la raíz cuadrada

Veamos la forma en que esta explicación tiene lugar:

MAESTRA (ha anotado $^2\sqrt{3842}$ en el pizarrón, luego dice).- Para resolver nuestra raíz vamos a ir por partes, porque no la podemos resolver toda de una sola vez; primeramente [...] paso número 1: se separan las cifras de dos en dos, de derecha a izquierda (anota un punto entre el 8 y el 4). Fijense bien, [...] vamos a buscar un número que multiplicado por él mismo nos dé esta cantidad (señala el 38), o que nos dé un poquito menos, pero que no se pase.

NIÑO 1.- El seis

MAESTRA.- Sí, el seis.

NIÑO 2.- ¿Cómo, maestra, por qué seis?

NIÑO 1.- Sí, porque 6×6 son 36, no se pasa de 38.

MAESTRA.- ¿Sí? (Dirigiéndose al niño 2, que asiente). Bueno, vamos a hacerla, la vamos a hacer *desarrollada* para que se entienda más (con la expresión *desarrollada se refiere a ir anotando las restas que derivan de los cálculos*).

Se continúa de esta manera; al final del episodio, el pizarrón queda así:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 ^2 \\
 \hline
 38.42 \\
 - 36 \\
 \hline
 242 \\
 - 121 \\
 \hline
 121
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 61 \\
 \hline
 121 \\
 \hline
 1 \\
 \hline
 122
 \end{array}
 \end{array}$$

Durante el episodio los niños se ven concentrados, como tratando de comprender el procedimiento; en cierto momento, cuando se busca la segunda cifra del número que corresponde a la raíz (el 1 del 61), un niño dice:

NIÑO.- ¿Toca a uno?

¹³ *Idem.*

MAESTRA.- Sí, pero vamos a poner dos, para que se den cuenta de por qué toca a uno, ¿sí? *(e intenta primero resolver utilizando el 2, luego lo hace con el 1).*

Se concluye el cálculo en el mismo tenor; durante el episodio, los niños se ven muy atentos.

Por exigencias de los alumnos, una nueva explicación

Las explicaciones hasta aquí incorporadas son introducidas por la profesora conforme a sus propias convicciones didácticas y no por presión alguna ejercida por los alumnos. Sin embargo, con base en el contrato celebrado, las dudas y sugerencias de los niños constituyen indicadores para nuevas decisiones sobre la explicación, a saber:

- Si es necesaria alguna explicación adicional.

En tal caso:

- Qué tipo de explicación ofrecer.
- Qué elementos incorporar en la nueva explicación.

De este modo, con base en las participaciones de los niños, el procedimiento se repite, fragmenta y ejemplifica con un cierto tipo de números. Por ejemplo, la participación de un niño que desde su lugar grita: «¡Me hago bolas, maestra!», genera una nueva explicación.

MAESTRA.- *¿Te haces bolas?, vamos a ver, otra explicación. (Anota en el pizarrón 144 y va explicando paso por paso el procedimiento para obtener la raíz cuadrada, apoyada en las respuestas que solicita a los niños. Un diálogo representativo de esta fase es el siguiente):*

MAESTRA.- Vamos a ver, el primer paso... ¿cuál es el primer paso? <

NIÑO.- Separar de dos en dos las cifras, de derecha a izquierda.

MAESTRA.- Exacto, entonces, ¿en dónde voy a separar? [...] <

(Por la expresión de sus caras parece que muchos no han entendido; otros gritan «¡Yo!» indicando que quieren responder y exclaman:) «¡Entre el 1 y el 4!»

MAESTRA.- Ése es el primer paso. Paso dos, ¿cuál es el paso dos? [...]

(De esta manera se continúa calculando nuevamente la raíz cuadrada de 144).

NIÑO.- ¡Maestra, esto *(refiriéndose al cálculo de esta raíz)* es más fácil porque no sobró nada! [...]

A lo largo de la explicación por pasos se van levantando cada vez más manos para indicar a la maestra que quieren responder.

Probablemente considerando las manos levantadas como indicador de un cierto aprendizaje, la profesora intenta avanzar en su proyecto didáctico, introduciendo un procedimiento más sintético.

Un intento de demostración sintética del procedimiento

MAESTRA.- Veo que ya le van entendiendo; ahora, si la hacemos *sin desarrollar* sería así (y comienza a explicar nuevamente el procedimiento con los mismos números, pero sin anotar las restas).

NIÑA.- ¡Así nos confundimos más!

Retorno al procedimiento extendido por petición de los alumnos

MAESTRA.- Bueno, por ahorita las vamos a hacer desarrolladas para que no se confundan.

Durante el cálculo de la raíz cuadrada de otros números en el pizarrón, los niños plantean preguntas como las siguientes:

NIÑO.- Maestra, ¿y se puede también [con números] de una cifra?

NIÑA.- ¿Y cómo se sabe que no se pasa?

En cada caso la maestra responde con una explicación.

Las explicaciones paran cuando la maestra considera que el resultado es satisfactorio; esto es, cuando cree que sus alumnos han comprendido el procedimiento. La comprensión —en términos de la maestra Clara— es mostrada principalmente mediante la resolución ágil de distintos cálculos y, al final de la secuencia —que se prolonga por tres sesiones—, mediante la resolución de algunos problemas del tipo: «Si un terreno cuadrado mide 1369 m^2 , ¿cuánto mide por lado ese terreno?».¹⁴

¹⁴ No observamos la sesión dedicada a resolver problemas de raíz cuadrada; tuvimos acceso a su contenido mediante los cuadernos de los niños y los comentarios de la profesora.

LA TRANSPOSICIÓN DE LA MAESTRA CLARA

Los aspectos de la raíz cuadrada seleccionados por la maestra Clara para enseñar a sus alumnos fueron los siguientes:

- La noción de raíz cuadrada, entendida como «la operación inversa de elevar un número al cuadrado».
- El algoritmo convencional para calcular la raíz cuadrada, aplicado al campo de los números naturales.
- La prueba de la raíz cuadrada, multiplicando la raíz por sí misma, es decir, elevándola al cuadrado.

De esta manera, la raíz cuadrada se tradujo en:

- Una definición.
- Una técnica: calcular la raíz cuadrada de ciertos números utilizando el procedimiento convencional.
- Un procedimiento para verificar si el cálculo es correcto (éste es introducido en un episodio previo a las explicaciones dadas por presión de los alumnos).
- Resolución de problemas que en realidad no eran tales puesto que, presentándose al final del tema «raíz cuadrada» sólo con los datos necesarios, y todos en el formato antes anotado, los niños tenían construido de antemano el procedimiento de resolución.

Es cierto que el universo matemático propuesto por la profesora a sus alumnos es bastante limitado. Excepción hecha de los problemas que se resuelven a manera de aplicación del conocimiento adquirido, los esfuerzos se orientan al procedimiento y su dominio. Sin embargo, quiero destacar la interactividad entre la profesora y sus alumnos, el número importante de participaciones de los niños para solicitar aclaraciones y para sugerir formas de presentación de los ejercicios. Esta forma de relación, por otra parte, también se actualiza en torno a otros conceptos abordados en nuestra presencia, por ejemplo la noción de ángulo.

REITERACIÓN DEL ESQUEMA EXPLICATIVO ANTE OTROS OBJETOS DE SABER

Registramos otro ejemplo de la explicación recursiva desplegada por la profesora Clara en una clase dedicada a ángulos. En esa ocasión, en un momento en que ya se han ofrecido dos explicaciones —la inicial a cargo

de la maestra y otra cuya responsabilidad se había transferido a un alumno: «A ver, Erick, explícales a tus compañeros todo...»—, la maestra explica a una niña cómo trazar e identificar un ángulo de 300 grados:

MAESTRA (*dirigiéndose a dos niñas que le dicen algo incomprensible en la grabación*).— Ahorita les vuelvo a explicar (*les explica algo también inaudible, luego se dirige al grupo*). Miren, niños, me dicen aquí sus compañeras que todavía no le entienden muy bien... Julieta, pasa al pizarrón...

NIÑO.— ¡Yo tampoco le entiendo, maestra!

MAESTRA.— Bueno, ahorita su compañera va a pasar al pizarrón y yo les voy a ir explicando [cuál es y cómo se traza un ángulo de 300 grados] y ustedes ponen atención. Primeramente, Julieta, vas a trazar una línea (*la niña traza una línea horizontal*); ahora vas a colocar el transportador y vas a contar (*la niña lo coloca en el centro de la línea y cuenta en un sentido que no es correcto; la maestra le explica cómo hacer el conteo. Finalmente, el ángulo queda así*):



NIÑA (*después de trazar el ángulo, dirigiéndose a la maestra*).— ¿Entonces éste es el ángulo? (*señala el de 60 grados complementario al de 300*).

MAESTRA.— No, no, no, ¿para dónde se abrió nuestra línea, hacia dónde giró?

NIÑA.— A la izquierda.

MAESTRA.— A la izquierda. Fíjate bien, esta línea está dando vuelta (*señala la línea, luego hace un giro con su mano, describiendo el ángulo de 300 grados*) hasta quedar así (*detiene la mano y señala la segunda línea que forma el ángulo*), ¿sí? [...]

NIÑA.— ¡Sí! (*su expresión muestra que acaba de comprender*).

MAESTRA.— ¿Ya está entendido?>

NIÑA.— ¡Sí!

A tal explicación le siguen otras más:

MAESTRA.— A ver, ¿alguna otra duda?<

ENRIQUE.— Sí, maestra, ¿cómo se va contando [en el transportador]?

MAESTRA.— No se les olvide que... si esa línea da vuelta completa, se vuelve a juntar con la otra, forma una circunferencia (*explica sobre un transportador, relacionando las medidas en grados que aparecen en el transportador*

con giros de distintas magnitudes y la medida de la circunferencia, que tiene 360 grados...).

MAESTRA.- A ver, otra duda.<

ERICK: Sí, es que todavía a éstos no les entiendo muy bien, estos que dan la vuelta para acá (*hace un ademán girando la mano de derecha a izquierda*)...

MAESTRA (*explica, luego pregunta*).- ¿Algo más?<

NIÑO.- Estos de más de 180 no les entiendo muy bien todavía.

MAESTRA.- Bueno, supongamos ...

ERICK.- ¿Me deja trazar uno en el pizarrón?

MAESTRA.- Claro que sí, nada más espérenme tantito. Permítanme un lápiz (*un niño le da un lápiz*). Aquí tenemos la línea (*pone el lápiz sobre una línea en el pizarrón*), si va girando y queda en esta posición (*gira 90 grados a la derecha*) ¿qué se formó? [...]

El registro indica que no resulta fácil identificar los ángulos de 300° , tampoco identificar el giro que produjo un cierto ángulo; en general, los de 180° o más parecen causar dificultad; hay también problemas para utilizar el transportador.

Pero a cada duda le sigue una explicación, y éstas, aunque por lo general responden a solicitudes de alumnos específicos, se realizan en la red primaria de comunicación —esto es, en aquella en la que participa también el profesor—¹⁵ y tienden a hacer compartir a todos los alumnos una cierta relación con el objeto de saber. Al final de la secuencia, las participaciones públicas reflejan que los niños avanzaron; destacaré dos que tienen lugar mientras se resuelve un ejercicio con ángulos complementarios y otra que ocurre cuando se miden los ángulos de algunos cuadriláteros. Veamos la primera:

La maestra solicita trazar cinco pares de rectas que se intersecan (*pone un ejemplo en el pizarrón*):



e indica que no importa la medida de los ángulos que se formen.

¹⁵ Según la clasificación de R. Sirota, «Analyse sociologique d'une situation didactique à l'aide d'une nouvelle grille d'observation».

ENRIQUE (*interrumpiendo a la maestra*).- ¡Usted el otro día nos dijo que con dos rectas no se puede formar una figura y ahí ya se formaron!

MAESTRA.- No, no, no, yo dije que dos rectas no pueden formar polígonos, pero sí pueden formar ángulos.

ENRIQUE.- ¡Ah!

Observación de la investigadora: *La maestra continúa, indica a los niños que midan los cuatro ángulos que se formaron con cada par de rectas; al comenzar a medir en la tercera figura, Enrique y un niño a quien llaman Palomino dicen casi al unísono:*

NIÑOS.- ¡Ya, maestra, ya está, con que saquemos uno ya sabemos cuánto miden los otros!

(*Varios más, al escucharlos, parece que también descubren la misma relación que sus compañeros.*)

MAESTRA.- ¡Muy buena observación! [...]

...

El ejercicio que se realiza consiste en medir los ángulos internos de varios cuadriláteros que aparecen en el libro de texto; miden uno junto con la maestra, que explica cómo hacerlo, el resultado es 360° ; luego miden otro ya de manera individual, con algunos ajustes a la medición no precisa de los niños, también obtienen como suma 360° . La maestra pide medir los ángulos del resto de las figuras:

MAESTRA.- Vamos a medir los ángulos internos...

NIÑOS (*interrumpiéndola*).- ¡Todos van a salir lo mismo, maestra!

MAESTRA.- Bien, si ya se dieron cuenta de que todos los ángulos van a sumar lo mismo, van a anotar en su cuaderno con sus propias palabras lo que descubrieron y por qué creen que es así [...]

PARTICIPACIÓN DE LOS ALUMNOS EN LA VERSIÓN DIDÁCTICA DEL CONTENIDO

En consonancia con la pedagogía de la época, la profesora Clara no promueve tiempos *adidácticos* (véase la p. 50 de este libro). Ella nunca sale de la escena y los niños nunca quedan en relación oficialmente independiente con el objeto de saber. Sin embargo, la relación que establecen con él no es la que deriva de un contrato de transmisión común, sus preguntas y solicitudes tienen un papel esencial en las explicaciones, mostraciones y ejemplos de su profesora; de sus participaciones deriva la forma específica y la dificultad de los ejercicios, el contenido de las nuevas explicaciones, los ejemplos, la fragmentación de las tareas, el tamaño de los números, la re-

petición. A cada momento las decisiones docentes derivan del reconocimiento de los conocimientos personales y diversos de los alumnos; también de sus necesidades y exigencias didácticas: «Pónganos unas con números más chicos», «¡Me hago bolas!», «¡Los de más de 180 todavía no les entiendo!», «¡Es más fácil si no sobra!»

EL CONTRATO CELEBRADO, DE EXPLICACIÓN «A LA MEDIDA»

Sintetizando la progresión explicativa utilizada por la maestra Clara, tenemos que:

- Hay una o varias explicaciones iniciales (de una noción, de un procedimiento o de ambos) para introducir el nuevo objeto de saber.
- A la(s) explicación(es) inicial(es) le(s) siguen otras, correspondientes a solicitudes específicas de los alumnos o a dificultades identificadas —mediante diferentes recursos— en el transcurso de la actividad.
- Las explicaciones, en cada caso, se adaptan a las solicitudes y necesidades de los niños; de este modo, son algo más que reiteración de ostensiones previas; son explicaciones «a la medida».

Esta forma de interacción didáctica es resultado de una activación permanente de la memoria didáctica, es decir, de la actuación en función de reconocer los conocimientos personales y provisorios —en ocasiones insuficientes y erróneos— de los alumnos. Porque la memoria didáctica, según anoté en otro apartado, «se manifiesta en el proceso de enseñanza por la utilización de informaciones y datos personalizados, contextualizados, temporalizados»,¹⁶ y conduce al profesor a modificar sus decisiones en función de su pasado escolar común con sus alumnos.

EL ÁMBITO DE PARTICIPACIÓN DE LOS ALUMNOS EN LA CLASE

El contrato didáctico delimita el ámbito y la modalidad de participación de los alumnos en la clase. Según los contratos habituales, al alumno le toca responder a las exigencias, las indicaciones y las preguntas del profesor.¹⁷ Aquél, en la condición asimétrica que lo obliga a aceptar las reglas

¹⁶ G. Brousseau y J. Centeno, «Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant», p. 203.

¹⁷ Véase Y. Chevallard, *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*.

de la enseñanza, no tiene derecho a participar en la clase en un registro que sólo corresponde al profesor: definir el tipo de experiencias, la calidad de las tareas, la dificultad de los ejercicios. Este registro —que Chevallard denomina *epididáctico*— pertenece al profesor. ¿Por qué entonces la maestra Clara acepta la participación de los alumnos en un plano en el que eventualmente resulta cuestionada? Porque según el contrato que ha establecido con ellos, asume como compromiso principal explicar «a la medida». En efecto, de acuerdo con las concepciones que la profesora refleja en su acción, su proyecto didáctico sólo tendrá éxito si logra «explicar bien» (y con ello hacer comprender) las nociones matemáticas a sus alumnos. Cumplir este compromiso hace indispensable que ellos asuman otro: ostentar su estado de conocimiento y expresar públicamente sus dudas y exigencias a cada momento de la actividad.

En los contratos ordinarios, el papel de los alumnos consiste en dar respuestas correctas. Es común que cuando los niños con representaciones erróneas o insuficientes participan públicamente, a su participación le siga una sanción o la marginación, pues esa participación no es útil para proseguir el proyecto definido. En el grupo de la maestra Clara se ha fracturado este ritual. Con base en el contrato puesto en marcha, las representaciones erróneas o incompletas se expresan públicamente, pero no como artificio para hacer caer en falta a los alumnos; tal llamado tiene la intención de definir el rumbo de la progresión didáctica y los términos específicos de futuras explicaciones.

MECANISMOS DE REGULACIÓN QUE DEVIENEN MECANISMOS DE PREVENCIÓN

Con la regla antes mencionada como esencia del contrato establecido, el proyecto marcha fluidamente. Los mecanismos de regulación instrumentados por la profesora las pocas veces que hay estancamiento son:

- Nuevas explicaciones.
- Nuevos ejemplos.
- Nuevos ejercicios.

Pero, de hecho, casi no son utilizados como respuesta a un desequilibrio didáctico. Más que en acciones de regulación, la maestra Clara sustenta su acción en mecanismos que previenen los desequilibrios, a saber:

- Solicitar a los niños la ostensión de su estado de conocimiento.
- Permitir la participación en el registro epididáctico (por ejemplo, señalando el tipo y la calidad de los ejercicios convenientes): «¡Pónga-

nos [operaciones] con números más chicos!», «¡Exactas, maestra, es más fácil!», «¡Maestra, pásame al pizarrón para ver si ya le entendí!», «¡A mí también, para que me explique!»

La maestra accede a las peticiones ofreciendo el tipo de ejercicios solicitados, también pasando al pizarrón a quienes lo demandan. Dependiendo del punto donde los niños se atorán, ella da explicaciones específicas y los ayuda a avanzar. A medida que las sesiones avanzan más alumnos ofrecen las respuestas esperadas. La permisión de la participación en el registro epididáctico es, pues, un mecanismo preventivo de eventuales desequilibrios.

DEL DESCUBRIMIENTO A LA EXPLICACIÓN «A LA MEDIDA»

La maestra Clara decidió orientar sus clases con base en una idea: «explicar a la medida». Tal decisión la tomó a pesar de las recomendaciones oficiales que señalaban la interrogación como base de la relación didáctica. Ante tal convicción, para ella el buen maestro «debe tener buena voz, tener paciencia para cuando el alumno pregunta y despejar las dudas; no molestarse porque los niños preguntan; atender al niño o al grupito de niños que necesite [ayuda]. Un maestro que tuve, si yo preguntaba, me decía: "Todo está explicado en el pizarrón". No debe ser así, el maestro está precisamente para ayudar a los niños a entender».

LO PERMANENTE EN LA CLASE: LA EXPLICACIÓN «A LA MEDIDA»

El contrato que regula amplios periodos de la actividad en este grupo es ciertamente peculiar, los niños tienen una responsabilidad que se renueva día a día: ostentar sus representaciones, el estado de su conocimiento, sus necesidades de explicación. De eso depende que la maestra cumpla la responsabilidad básica que se ha asignado y que consiste en explicar, dosificar, agregar, reelaborar, hasta lograr que sus alumnos comprendan.

La diferencia entre este contrato y los que celebran muchos otros profesores que también ostentan, es que la responsabilidad asumida consiste en hacer comprender, mientras que la más frecuente consiste sólo en transmitir sin importar los efectos producidos en el receptor. Se trata de un contrato *fuertemente didáctico*¹⁸ en el que, con sus preguntas y la expresión

¹⁸ Según la categorización de G. Brousseau comentada en el primer capítulo, un con-

de sus dudas, los niños colaboran para que la explicación de las nociones resulte «a la medida». Ellos han asumido la responsabilidad de orientar la acción específica y las decisiones de su maestra, quien además de recuperar permanentemente su estado de conocimiento les ha permitido ingresar al registro en el que, comúnmente, sólo entra el profesor. Ambas cláusulas se observan en el contrato renovado cotidianamente, con independencia de los contenidos que se aborden. Es una costumbre alejada de las propuestas oficiales, cuya idea central era sustituir el «enunciar» por el «interrogar para ayudar a descubrir».

LOS RESULTADOS DEL CONTRATO

Siempre un registro intelectual. Es común asociar la incomprensión y, por ende, el deslizamiento a la lógica de las respuestas en detrimento de la lógica del aprendizaje con la enseñanza en la que no se conceden tiempos adidácticos. Es decir, se asocia generalmente (pareciera que necesariamente) el efecto Topaze a la enseñanza frontal, como si aquél fuera constitutivo de ésta. El trabajo realizado en el grupo de la maestra Clara ofrece elementos para cuestionar tal vinculación. Ella tiene un estilo de interrogar que aunque no propone preguntas abiertas (en el sentido de que conduzcan a tiempos adidácticos), sí ofrece condiciones que orientan hacia la comprensión. El tono de voz o la actitud (índices comunicativos que conducen al efecto Topaze) no son utilizados para indicar la corrección o incorrección de una respuesta, o para lograr que otra emerja.

Una alta tasa de éxito. Los alumnos de la maestra Clara, a medida que se introducen nuevas explicaciones y nuevos ejemplos, van logrando resolver correctamente los ejercicios y tareas que se les plantean. De esto no es posible derivar conclusiones sobre los aprendizajes. No pretendo hacerlo. Empero, es válido afirmar que pasar al pizarrón sin problemas, preguntar, resolver, responder, demandar, cuestionar... refleja una relación distinta con los objetos de saber que aquella que, puede suponerse, subyace a comentarios del tipo «Parece que los pegaron con Kola Loka» y que vimos ocurrir en otro salón de clases.

Una relación privilegiada con la noosfera. En el proyecto didáctico de la maestra Clara se observan pocos rasgos del introducido con la matemática moderna. Ella conserva la explicación como base de su acción —y si bien incluso en ocasiones la resolución de los problemas y ejercicios del texto

trato fuertemente didáctico es aquel en el que el profesor se compromete a que sus alumnos efectivamente aprendan.

gratuito es el criterio de verdad de los aprendizajes— y también conserva viejos contenidos de saber. Tiene razones para ello: «La raíz cuadrada es un reto profesional, y a ellos [los alumnos] les gusta saber que la saben». «Las medidas son algo muy necesario, no deberían haberlas quitado». Empero, como anoté al inicio, varios alumnos de la maestra Clara han obtenido el reconocimiento como el mejor alumno de la zona escolar en que se ubica su escuela, «han ganado la Ruta Hidalgo», como suele decirse en el lenguaje escolar. La maestra tiene, pues, acerca de la eficacia de su labor —además de las que recoge al interior del salón de clases—, las pruebas que vienen del exterior. La «explicación a la medida» —me parece— es un factor esencial en los resultados que obtiene.

LOS LÍMITES DEL CONTRATO

La maestra Clara conserva, como parte de la experiencia que ofrece a sus alumnos, contenidos eliminados veinticinco años atrás; también propuestas de enseñanza consideradas obsoletas. Se trata de una profesora que recuperó pocos elementos de la matemática moderna porque no lo creyó conveniente. Su hacer refleja concepciones nutridas en fuentes tales como los programas y textos caídos en desuso décadas atrás.

No obstante lo anterior, la disponibilidad de los conocimientos para resolver problemas —hoy aspecto esencial en las propuestas de aprendizaje matemático escolar— ocupaban también espacio en la reflexión de la profesora Clara: «Para ver si realmente aprendieron, hay que ponerles problemas, pero no solamente problemas con la operación que se acaba de ver, sino de varias operaciones, para que haya necesidad de distinguir qué operación u operaciones hay que realizar. Si no, no tendría caso».

Como se ve, ella deja los problemas como criterio de verdad de los aprendizajes; son los niños quienes, con sus recursos personales, deben responder a la exigencia de saberlos resolver. Pero esta laguna didáctica alcanzaba a todo el sistema de enseñanza. Era el límite de la matemática escolar en los años ochenta, que si bien consideraba la resolución de problemas como elemento esencial en la enseñanza, no había ofrecido a los profesores los medios necesarios para desarrollar una didáctica en tal sentido. Aun cuando los impulsores de la matemática moderna hubieran referenciado importantes a esta habilidad matemática e introdujeran muchos problemas interesantes con el fin de desarrollarla, el modelo que se proponía no se basaba en los hechos el esquema «aprendo-aplico»¹⁹ propio de la época.

¹⁹ Expresión acuñada por R. Donady para referirse a una forma de enseñanza —atribu-

Por otra parte, si bien acorde con la cultura escolar imperante en esos años, la profesora centra sus esfuerzos en que los niños comprendan las nociones y los procedimientos dejando los problemas para el momento de la aplicación, es posible reconocer que la comprensión que refleja la participación de los alumnos protagónicos no es igual que la obtenida en otros salones de clases donde las respuestas se consiguen con negociaciones a la baja. De esto daba cuenta la relación privilegiada que guardaba con la noósfera.

...

Los hasta aquí analizados, teniendo cláusulas muy diferentes, son contratos que prestan un denominador común: los alumnos no cuentan con tiempos adidácticos para construir las respuestas demandadas por sus profesores. Si bien tienen más o menos oportunidades de interacción —y en algunos casos las cuestiones propuestas orientan a la puesta en marcha de recursos personales para colaborar en la construcción de alguna solución—, el profesor es el poseedor del saber. Las condiciones que permitirán que contratos de este tipo sean sustituidos por otros donde «se devuelve a los alumnos la responsabilidad de su aprendizaje» se analizan en el siguiente apartado.

gada en la cultura escolar— según la cual primero se enseñan los conceptos y después éstos se aplican a la resolución de problemas. Esta actividad se convierte en la «prueba del aprendizaje». Pero saber resolver los problemas, en esta pedagogía, en los hechos es una responsabilidad del alumno, no del profesor.

Rasgos de la actividad matemática desarrollada en las clases de la maestra Clara

<i>Contenido</i>	<i>Se introduce definición</i>	<i>Se ilustra o explica definición o procedimiento</i>	<i>Preguntas cerradas</i>	<i>Preguntas abiertas o anticipatorias</i>	<i>Preguntas y participaciones en un nivel epistodidáctico</i>	<i>Problemas como vía de aprendizaje</i>	<i>Problemas para aplicar</i>	<i>Expresión de dudas y dificultades</i>
Primera sesión Resolución de problemas con números naturales	A manera de repaso.	No	No	No	Si	No	Si	Si
Segunda sesión Conversión de monedas	A manera de repaso; la maestra acepta las definiciones "libres" y basadas en ejemplos dadas por los niños	La maestra "glosa" los procedimientos Se vuelve varias veces a ello.	Si	No	Si	No	Si	Si
Tercera sesión Potencias	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si
Cuarta sesión Ángulos	A manera de repaso; la maestra acepta las definiciones "libres" dadas por los niños	Muchos trazos y mostraciones en el pizarrón Se vuelve varias veces a ello	Si	Sólo una	Si	No	No	Si
Quinta sesión Raíz cuadrada	Si	Se vuelve varias veces a ello	Si	No	Si	No	No, los problemas se resolverían después de haber realizado ejercicios sencillos	Si
Sexta sesión Equivalencias entre unidades del sistema métrico decimal	Procedimientos de conversión	Se vuelve varias veces a ello	Si	Sólo dos	Si	No	No	Si

Capítulo 7

DEVOLVER LA RESPONSABILIDAD A LOS ALUMNOS. MÁS ALLÁ DE DESCUBRIR LA VARIACIÓN PROPORCIONAL

La devolución era un acto por el cual el rey —por derecho divino— abandonaba el poder para remitirlo a una cámara. La «devolución» significa: «Ya no se trata de mi voluntad, sino de lo que ustedes deben querer, pero yo les otorgo este derecho porque ustedes no pueden tomarlo por sí solos»

GUY BROUSSEAU¹

INTRODUCCIÓN

La propuesta de enseñanza propia de la matemática moderna fue más allá de la incorporación de objetos matemáticos inéditos en el currículum de la educación primaria. La intención de los reformadores tuvo también una faceta pedagógica consistente en que los alumnos aprendieran las nociones descubriendo por sus propios medios las que el profesor buscaba hacerles adquirir. La aspiración oficial reconocía en los alumnos conocimientos e intuiciones previas y buscaba eliminar la ostensión como vía del hacer conocer. La interrogación se presentaba como el recurso esencial para ayudar a descubrir los conocimientos que el profesor ahora se abstendía de transmitir. Como hemos visto hasta aquí, las transposiciones operadas por los profesores han asumido las propuestas, las han marginado o alejado de las ideas originalmente difundidas, han dado lugar a contratos escasamente didácticos y fuertemente didácticos. En lo que sigue veremos una nueva interpretación de las proposiciones oficiales, ahora caracterizada por

¹ «Los diferentes roles del maestro», p. 68.

la decisión de devolver la responsabilidad del aprendizaje a los alumnos. A manera de telón de fondo, esta idea sustentaría la reforma de los años noventa. Nos encontramos, pues, ante una *reforma adelantada*.

EL SENTIDO DE LA DEVOLUCIÓN

Considerar el aprendizaje como una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar, obliga al docente a buscar situaciones apropiadas, para las cuales el alumno no tenga de antemano la respuesta; si no, no constituirían situaciones de aprendizaje.² En esta perspectiva, el trabajo del maestro consiste, en primer término, en proponer al alumno situaciones para que produzca su conocimiento como respuesta personal a la pregunta que le plantea la situación. El profesor debe, además, dejar de intervenir directamente, de manera que el alumno produzca sus respuestas en función de la situación y no por exigencias docentes. Pero, dice Brousseau, no basta comunicar un problema a los alumnos para que ese problema se convierta en su problema y se sientan responsables de resolverlo. Mediante la *devolución* se intenta lograr que la responsabilidad se asuma y también que se produzca la respuesta esperada.³

UNA PROFESORA CON ORIENTACIÓN CONSTRUCTIVISTA

La maestra Patricia —coprotagonista de la actividad que se analiza en este capítulo— es una profesora hasta cierto punto distinta de aquellos cuya labor analicé antes: tiene únicamente seis años de experiencia docente y cuenta con una formación adicional en educación matemática, producto de su asistencia sabatina voluntaria a un centro de actualización de profesores de orientación constructivista cuya dinámica de trabajo se orientaba a dos cuestiones:

- reflexionar junto con otros compañeros maestros sobre los problemas que plantea la práctica cotidiana de enseñanza de las matemáticas, y
- elaborar y experimentar actividades y formas de gestión de la clase para que los niños aprendan dicha disciplina «construyendo su conocimiento».

² Véase G. Brousseau, «Los diferentes roles del maestro».

³ *Idem*.

El proceso se alimenta con algunas lecturas y toma distintas modalidades: discusión de temas y cuestiones sugeridos por los participantes o el asesor del grupo; análisis de las producciones de los alumnos de los participantes (que en general son resultado de alguna actividad promovida desde el taller sabatino); análisis de clases impartidas por los participantes (previamente registradas por alguno de los compañeros asistentes al curso).⁴

La maestra expresa en las siguientes palabras el que considera producto principal de su asistencia al círculo de estudio: «Lo más importante que aprendí es a escuchar lo que los niños piensan, porque antes venía y les explicaba y ya, y los que sabían, bueno, y los que no, ni modo, cuando mucho les volvía a explicar. Ahora ya no, me preocupa ver cómo piensan y que ellos vayan construyendo [...] porque entendí que si los niños construyen un conocimiento no se les olvida, pero ahora debo prepararme más sobre el cómo [hacer]».

Como es fácil imaginar, la relación didáctica promovida por la maestra Patricia es diferente de las hasta aquí analizadas. Esta relación se establece con un grupo de aproximadamente treinta alumnos de sexto grado de una escuela pública que goza de prestigio académico importante. Antes de iniciar el análisis de esta relación conviene precisar algunos aspectos del objeto de enseñanza que la motiva.

EL OBJETO DE ENSEÑANZA: LA VARIACIÓN PROPORCIONAL DIRECTA

La noción de variación proporcional directa

Varios investigadores han señalado que la variación proporcional directa desempeña un papel fundamental en muchos ámbitos de la vida social y económica; sus aplicaciones son innumerables y están presentes en diversos sectores de la actividad humana. En el ámbito comercial, asuntos como porcentajes, cálculo de descuentos, recargos e intereses, tienen en la base el manejo de la variación proporcional directa. Su fuerte presencia en la cotidianidad se evidencia incluso en la capacidad de muchos analfabetos para resolver, mediante estrategias personales, problemas que implican dicha noción.⁵ Esta utilidad cotidiana ha dado a la variación proporcional —junto con las cuatro operaciones aritméticas— un lugar de privilegio en

⁴ Véase L. Lara y N. Ortega, «La formación de maestros de primaria en el área de matemáticas. Relato de una experiencia en el Estado de México».

⁵ Al respecto pueden verse I. Soto y N. Rouche, «Problemas de proporcionalidad re-

la educación primaria. Cualquier profesor, cualquier diseñador de currículum, probablemente cualquier padre de familia, estarían de acuerdo en considerar que la variación proporcional debe enseñarse a todos los niños, por su valor de aplicación en la vida práctica.

La variación proporcional se sustenta en una idea matemática importante: la de *razón*, que puede definirse como la comparación de dos números o magnitudes a través de su cociente. Así, si a y b representan dos cantidades cualesquiera, la razón entre ellas está dada por el cociente a/b .

Dos listas, constituidas cada una de números no nulos (diferentes de cero): $x \mid y, x' \mid y'$ son proporcionales si $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$.

Otra manera de expresar la variación proporcional es la siguiente: dadas dos cantidades variables x y y , se dice que son proporcionales si están relacionadas por una expresión de la forma:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{donde } k \text{ es constante}$$

Como tal expresión presenta problemas cuando $x = 0$, para definir la noción se prefiere utilizar la expresión $y = kx$.

La variación proporcional como objeto de enseñanza

E. Dupuis y F. Pluvinage⁶ identificaron tres periodos en la evolución de la enseñanza de la proporcionalidad: uno que denominan *de la regla de tres*, y que corresponde a las llamadas *matemáticas tradicionales*; el de *las funciones lineales*, correspondiente a las *matemáticas modernas*, y, finalmente, el de *las tablas de proporcionalidad*, propio de las llamadas *matemáticas concretas*. En la evolución del currículum mexicano se observa —*grosso modo*— dicha evolución.

La variación proporcional directa como tal apareció en los programas de los años setenta, en el marco de la matemática moderna, bajo un título

suelos por campesinos chilenos», así como A. Avila y cols. *Usos y conceptualizaciones en torno a las fracciones, los decimales y la proporcionalidad. Estudio en adultos analfabetos y de escasa escolaridad*.

⁶ «La proportionnalité et son utilisation», cit. por E. Comin, «L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège».

coherente con esta orientación: *variación funcional*. Pero la temática —con otras denominaciones y enfoques— tiene larga historia en el currículum de educación primaria. Al menos desde inicios del siglo xx está en los programas oficiales bajo el nombre de *razones y proporciones*. La referencia al tema se hacía precisamente mediante la expresión mencionada y se definía la proporción como «la igualdad de dos razones». También era común su expresión mediante escrituras del tipo: $a:b::c:d$.

En el largo periodo en que la enseñanza de esta disciplina se orientó por concepciones utilitaristas —periodo que se vería interrumpido precisamente con el ingreso de la matemática moderna— las razones y proporciones ocuparon amplios espacios, quizá porque pocos contenidos mostraban con tanta claridad su valor de aplicación. La regla de tres era el procedimiento que entonces se enseñaba para resolver los problemas de este tipo y se introducía desde el quinto grado. De hecho era tal procedimiento y su aplicación a la resolución de problemas prácticos el que ocupaba el interés didáctico y poco se cuestionaba la comprensión por parte de los niños. Así, por ejemplo, en el libro de texto de quinto grado editado en 1961 (primer libro de texto gratuito para el grado distribuido en México), una vez introducidas ostensivamente las nociones de razón y de proporción, todas las explicaciones se orientaban a mostrar el funcionamiento del procedimiento mediante la igualdad de los productos de los medios y los extremos. Una vez mostrada —en el nivel procedimental— la validez del mecanismo de cálculo, se procedía a utilizarlo en la resolución de algunos problemas vinculados a situaciones consideradas cotidianas.⁷

Hoy —y a partir del desarrollo de la teoría piagetana— es acuerdo entre los investigadores que la comprensión de la proporcionalidad no es accesible a los niños antes de su arribo a la etapa de las operaciones abstractas. De hecho, según afirmó Piaget, es el dominio de la estructura de la proporcionalidad el que marca el tránsito a dicho periodo. Pero en décadas pasadas tales consideraciones no pasaban por la mente de los planeadores o los educadores y el tema se mantenía y enseñaba sin preocupaciones de ese tipo. Así ocurrió en el periodo denominado de las matemáticas modernas.

En el currículum de la educación primaria de esa época, las innovaciones fueron significativas en el tema de la proporcionalidad. La noción de razón y proporción, así como el procedimiento de la regla de tres y el interés simple y compuesto —hasta entonces centrales en la escuela elemental—, dejaron el espacio a la variación funcional. La atención se orienta,

⁷ R. M. Novaro, *Mi libro de quinto grado. Aritmética y geometría. Estudio de la Naturaleza*, pp. 85 y ss.

entre otras cosas, a hacer comprender el sentido y la importancia que al interior de las matemáticas tiene la *relación funcional*.⁸ El título de la lección que abre formalmente el tratamiento del tema en el sexto grado es en sí mismo elocuente: «Unas cosas dependen de otras».⁹ Tal título es indicador del interés por poner a los niños en contacto con las *verdaderas matemáticas*, en este caso, con la relación entre pares de datos que al variar cumplen —o no cumplen— con la condición $y = kx$. El acercamiento inicial se hacía mediante situaciones diversas a partir de las cuales se elaboraban tablas y gráficas para representar la variación existente entre los datos implicados. Con base en esto se definía: a) la eventual existencia de una relación de dependencia entre dos conjuntos de datos; b) el tipo de dependencia, y c) el coeficiente que define la variación, en el caso de la variación proporcional.

En congruencia con el enfoque pedagógico de la época —que los niños descubrían los conocimientos—, el trabajo debía realizarse sobre la base de interrogaciones, y la formulación que sintetizaba el conocimiento producto de las sucesivas interrogaciones aparecía al final de las diferentes lecciones. Por ejemplo, cuando se había resuelto una situación que mostraba el comportamiento de la variación entre distintas cantidades de un cierto producto y el precio que debía pagarse por ellas, la formulación específica era del tipo: «a una variación de 1 kilo de tortilla le corresponde una variación de \$2.20 en el precio. El precio de las tortillas está en función del peso de las tortillas».¹⁰

Después de estas breves notas sobre el objeto de enseñanza que la maestra Patricia pone en juego, nos trasladaremos a su salón de clases.

ACERCAMIENTOS INICIALES BAJO UN CONTRATO DE DEVOLUCIÓN

De manera distinta a lo entonces habitual en las escuelas, las butacas que sirven de mobiliario en el salón de la maestra Patricia se encuentran dispuestas en semicírculo de doble fila, abierto hacia el pizarrón. La actividad tiene lugar alrededor de una situación asociada a objetos circulares de diferentes tamaños y la relación π (pi), contenido cuyo tratamiento llevó cuatro sesiones de clase de aproximadamente una hora treinta minutos cada una. Ésta es —a decir de B. Mopondi— una situación utilizada en varios países en el periodo de la matemática moderna. En México se si-

⁸ Véase C. Ímaz (coord.), *Matemáticas sexto grado. Libro del maestro*.

⁹ *Ibidem*, p. 69.

¹⁰ Véase C. Ímaz (coord.), *Matemáticas sexto grado. Libro del maestro*.

entre otras cosas, a hacer comprender el sentido y la importancia que al interior de las matemáticas tiene la *relación funcional*.⁸ El título de la lección que abre formalmente el tratamiento del tema en el sexto grado es en sí mismo elocuente: «Unas cosas dependen de otras».⁹ Tal título es indicador del interés por poner a los niños en contacto con las *verdaderas matemáticas*, en este caso, con la relación entre pares de datos que al variar cumplen —o no cumplen— con la condición $y = k x$. El acercamiento inicial se hacía mediante situaciones diversas a partir de las cuales se elaboraban tablas y gráficas para representar la variación existente entre los datos implicados. Con base en esto se definía: a) la eventual existencia de una relación de dependencia entre dos conjuntos de datos; b) el tipo de dependencia, y c) el coeficiente que define la variación, en el caso de la variación proporcional.

En congruencia con el enfoque pedagógico de la época —que los niños descubran los conocimientos—, el trabajo debía realizarse sobre la base de interrogaciones, y la formulación que sintetizaba el conocimiento producto de las sucesivas interrogaciones aparecía al final de las diferentes lecciones. Por ejemplo, cuando se había resuelto una situación que mostraba el comportamiento de la variación entre distintas cantidades de un cierto producto y el precio que debía pagarse por ellas, la formulación específica era del tipo: «a una variación de 1 kilo de tortilla le corresponde una variación de \$2.20 en el precio. El precio de las tortillas está en función del peso de las tortillas».¹⁰

Después de estas breves notas sobre el objeto de enseñanza que la maestra Patricia pone en juego, nos trasladaremos a su salón de clases.

ACERCAMIENTOS INICIALES BAJO UN CONTRATO DE DEVOLUCIÓN

De manera distinta a lo entonces habitual en las escuelas, las butacas que sirven de mobiliario en el salón de la maestra Patricia se encuentran dispuestas en semicírculo de doble fila, abierto hacia el pizarrón. La actividad tiene lugar alrededor de una situación asociada a objetos circulares de diferentes tamaños y la relación π (*pi*), contenido cuyo tratamiento llevó cuatro sesiones de clase de aproximadamente una hora treinta minutos cada una. Ésta es —a decir de B. Mopondi— una situación utilizada en varios países en el periodo de la matemática moderna. En México se si-

⁸ Véase C. Ímaz (coord.), *Matemáticas sexto grado. Libro del maestro*.

⁹ *Ibidem*, p. 69.

¹⁰ Véase C. Ímaz (coord.), *Matemáticas sexto grado. Libro del maestro*.

que incluyendo en los libros de texto y, al parecer, es un modelo aceptado por los maestros. Pues bien, la clase en el grupo de la maestra Patricia se inicia con una primera fase en la que se plantea una pregunta abierta para introducir al tema;¹¹ en la segunda fase se establece relación con la variación proporcional.

Búsqueda libre de respuestas a un problema de variación proporcional (segunda fase de la actividad)

MAESTRA.- Bueno, ahora vamos a trabajar en equipo (se organizan en tres equipos de aproximadamente ocho niños cada uno). A cada equipo le voy a dar un juguete y van a averiguar y me dicen cómo giran las ruedas grandes en relación con las chicas; pueden hacerlo aquí o en el patio (da a cada equipo un juguete).

Observación de la investigadora: Se hace un alboroto, todos salen al patio y una vez ahí empiezan a discutir. En un equipo, cuyos integrantes se ven bastante pensativos, se registra lo siguiente:

Niño 1.- Ya sé, hay que moverlo (se refiere a empujar el cochecito).

Niño 2.- (Empuja el cochecito, los demás observan con mucho interés.)

Niño 3.- ¿Y eso qué? (se refiere a que el sólo verlo rodar no les da información).

Niño 4.- Hay que contarlas (las vueltas que dan las ruedas).

Niño 2.- (Empuja nuevamente el cochecito.)

Niño 5.- Pero éste (el niño que empuja el carrito) le da muy duro (y no se pueden contar las vueltas).

Niño 3.- ¡Más despacio!

Niño 2.- (Empuja más lentamente el carrito, pero aun así no logran contar con precisión las vueltas.)

Niño 6.- Hay que marcarle con un gis (en la orilla de la llanta), si no no se puede (contar las vueltas).

Observación de la investigadora: Varios miembros del equipo van por un gis al salón; cuando regresan, uno de ellos pone una marca en cada llanta; los demás siguen atentamente sus acciones; las marcas les servirán de punto de referencia para contar las vueltas. Después intentan contar los giros de las dos llan-

¹¹ El episodio trata de lo siguiente: la maestra pone sobre el piso varios juguetes con dos o más llantas diferentes entre sí, y comienza un interrogatorio para centrar la atención en la relación de magnitud entre pares de llantas de desigual tamaño. Luego, la atención se dirige al número de vueltas simultáneas de las diferentes llantas; los diálogos son del tipo: MAESTRA.- A ver, a ver, cómo se moverán las de adelante de este carrito en relación con las de atrás? ¿?

Como.- ¡Más rápido!

tas al mismo tiempo pero no lo logran, es difícil hacer el conteo simultáneo; entonces, a sugerencia de uno de los integrantes, la tarea se divide: unos cuentan las vueltas de las llantas delanteras mientras otros cuentan las de las traseras y algunos otros registran en una libreta el número de giros simultáneos; los siguientes minutos se dedican a ello.

La actividad anterior es apenas el primer acercamiento a la variación proporcional. La relación con esta noción se ha establecido bajo un contrato de *devolución*, es decir, un contrato conforme al cual la profesora transfiere a los alumnos la responsabilidad de aprender y ellos la aceptan. Al definirse tiempos en los cuales los alumnos se comprometen a obtener una solución por exigencias de la propia situación y no de la maestra, en sus acciones y sus decisiones prevalece la lógica intelectual.

Esto fue posible porque la maestra ha cuidado ciertas características de la situación propuesta. Se trata de que ésta efectivamente interroge a los alumnos. Si esto no ocurre, la devolución no tiene lugar. Pero el grupo acepta la devolución. En virtud de tal aceptación, al interior de los pequeños grupos se imaginan y se prueban estrategias, se aceptan y se rechazan sugerencias.

Con base en el proyecto ideado por la profesora, la búsqueda es apenas el inicio; se hace luego necesario compartir el producto de la actividad. Por ello tiene lugar una puesta en común de las estrategias utilizadas y los resultados obtenidos.

*Puesta en común de los hallazgos: avances y límites de la actividad
(tercera fase de la actividad)*

Cuando los equipos conformados terminan la tarea inicial, exponen sus hallazgos al resto de los compañeros:

Equipo 1. La chica da dos vueltas y la grande una; la chica mide la mitad de la grande.

EDUARDO.- Nosotros lo que vimos es que la chiquita da una vuelta y la grande da media vuelta; la grande da una vuelta y la chiquita da dos vueltas.

MAESTRA.- La chiquita da una vuelta, la grande da//

CORO.- ¡Media!

MAESTRA.- La chiquita da dos vueltas, la grande da//

CORO.- ¡Una!

MAESTRA (*dirigiéndose a Eduardo*).- ¿Y por qué?

EDUARDO.- Porque es de diferente tamaño, es más chica.

MAESTRA.- ¿Y qué más?

EDUARDO (*y otros del equipo que se le unen para dar la respuesta*).- Es la mitad.

MAESTRA (*a los niños del equipo*).- ¿Están seguros de que es la mitad, cómo lo comprobaron?

NIÑO.- Le marcamos y le dábamos vuelta. La chica daba su vuelta completa y la grande daba media; la chica daba dos vueltas y la grande ya daba una vuelta.

MAESTRA (*a los niños del equipo*).- Pero vuelvo a repetir, ¿cómo supieron que la chiquita es la mitad de la grande?

NIÑO.- Por el número de vueltas que dio la chiquita y la grande.

MAESTRA.- ¡Ah, bueno! Aquí ya nos contestaron que la rueda chiquita mide la mitad de la grande [...] Y si la grande da cinco vueltas, ¿la chica?<

CORO.- ¡Diez!

MAESTRA.- ¿Y si la grande da diez?<

CORO.- ¡La chica da veinte!

Equipo 2. La grande da quince giros, la otra veinte; es más chica, pero desconocemos en qué proporción.

CAROLINA.- En lo que la [rueda] grande dio quince giros, la rueda chica dio veinte giros.

MAESTRA (*dirigiéndose al equipo*).- ¿Y por qué?

CORO.- ¡Porque es más chica!

MAESTRA (*nuevamente a los niños del equipo*).- ¿Y cómo es el tamaño de la chica en relación con la grande?

VARIOS NIÑOS (*piensan unos segundos*).- Cinco veces más chica.

CAROLINA (*responde, en la grabación su respuesta es incomprensible*).

MAESTRA.- A ver, entonces, ésta [la grande] dio quince y ésta [la chica] dio veinte, en el mismo tiempo...

NIÑOS.- ¡Sí!

MAESTRA.- Ahora, si ésta da treinta [la chica] ¿cuánto dará ésta? [la grande?]<

VARIOS NIÑOS.- Veinticinco (*luego se hace un murmullo, parece que en cuanto dan la respuesta se percatan de que es errónea*).

MAESTRA.- A ver, ¿qué me dijeron [antes?], que ésta da veinte mientras la otra da quince, entonces, si ésta da treinta...

NIÑOS.- ¡Veinticinco! ¡Treinta y cinco! (*distintas respuestas*).

Observación de la investigadora: Los dos niños que son interrogados en se-

guida responden «veinticinco». Entonces la maestra dice: «Será necesario comprobar si la respuesta es correcta ya que la mayoría opina así, pero primero vamos a escuchar al tercer equipo». Este equipo expone sus resultados; encuentra fácilmente la relación ya que ésta, al igual que en el primer equipo, es de 2 a 1 [...].

Los alumnos, haciendo uso del tiempo adidáctico que les fue otorgado, han logrado establecer algunas relaciones entre los giros simultáneos de las diferentes llantas. Dichas relaciones, para el caso en que la razón entre las llantas es $1/2$ (o $2/1$), pueden esquematizarse como se ve en la tabla:

Giros de la rueda chica	Giros de la rueda grande
1	$1/2$
2	1
10	5
20	10

Adicionalmente, a pregunta de la profesora, se explicita la relación entre las medidas de las dos llantas: «Una mide la mitad ($1/2$) de la otra». Puede suponerse que, establecida la razón $1/2$, se podrá calcular cualquier número de giros simultáneos para este par de llantas.

Al ser éste un primer acercamiento a la proporcionalidad, los avances parecen interesantes. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el caso en que la relación entre el tamaño de las llantas es un poco más compleja: $15/20$ ($3/4$). En efecto, en este caso la única respuesta obtenida como resultado de la actividad la expresa Carolina: «En lo que la rueda grande dio quince giros, la rueda chica dio veinte giros».

La formulación se obtuvo empíricamente, manipulando las llantas del juguete, y se expresa vinculada a dicha situación en términos de giros. Pero cuando los niños son interrogados con tal fin, no logran hacerla explícita en tanto que relación entre las dos medidas: «La rueda chica mide $15/20$ de la llanta grande». Hasta aquí los avances en el primer acercamiento a la variación proporcional.

Como se ve, hay progreso pero también límites en el conocimiento producido; la relación explícitamente formulada corresponde sólo a la más simple: $1/2$ (o $2/1$), mientras que la relación $15/20$ (o $3/4$) no fue convenientemente formulada; tampoco fue resuelta la situación correspondiente

a la proporción $15/20 = x/30$, en algún momento sugerida por la profesora.

Las dificultades no deben sorprender. Establecer tal equivalencia implica una complejidad mayor porque la razón entre los números no es entera ($15/20 = .75$). Esta variable numérica (razón no entera) —sabemos con base en diversos estudios—¹² aumenta de manera importante la complejidad de las situaciones de proporcionalidad. Así se comprobó en la actividad realizada. Pero la ausencia de respuestas no implica para la profesora un motivo para cambiar su proyecto, tal ausencia es más bien indicador de la necesidad de organizar nuevos acercamientos a la variación proporcional; veremos en seguida uno que implicó algunas modificaciones en la relación con el saber.

MODIFICACIÓN DE LA SITUACIÓN Y EXIGENCIA EXPLÍCITA DE VALIDACIÓN (SEXTA FASE DE LA ACTIVIDAD)¹³

MAESTRA.- Bien, vamos a continuar con este trabajo, pero ahora en equipos.

Observación de la investigadora: *La maestra reparte dos engranes de cartulina a cada equipo y solicita averiguar cuántos giros da el pequeño en relación con el grande; la relación es $24/8$. Comienza la actividad. En el equipo registrado, los niños marcan un punto en la orilla de cada engrane, el cual les servirá de referencia para contar los giros, y buscan la solución de forma similar a como hicieron con las llantas en la sesión anterior; esta vez la estrategia es más fluida y sistemática. Un niño de otro equipo llama a la maestra, quien se acerca:*

NIÑO.- ¡Maestra, maestra!, nosotros contamos los dientes, aquí son ocho y acá son veinticuatro; entonces veinticuatro entre ocho toca a tres; ha dado tres vueltas el chiquito y el grande una (*el tono de la voz denota entusiasmo*).

Observación de la investigadora: *pasea entre las bancas; cuando los niños le dicen a su paso el resultado que obtuvieron, les dice: «A ver cómo me lo comprueban», luego dice a todo el grupo: «A ver cómo me lo comprueban». Los niños que dicen haber dividido veinticuatro entre ocho ahora dicen a la profesora: «¡Nosotros ya se lo comprobamos!» (Pasan algunos minutos.)*

¹² Por ejemplo G. Ricco, «Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans», y B. Mopondi, *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme*.

¹³ Las fases 4 y 5 no son relevantes para el análisis, así que se omiten.

MAESTRA.- A ver, todos acá. Acá dicen sus compañeritos que para comprobar si es correcta su respuesta van a sacar *la medida* de los engranes; los compañeritos de este otro equipo también dicen que van a sacar *la medida*; aquí sus compañeritos dicen que van a hacer otra vez los giros y al irlos contando podrán comprobar: acá estos compañeritos dicen que van a comprobar contando los dientes de los engranes [...] ¿Saben qué?, a ver si nos podemos poner de acuerdo, porque hay distintas respuestas, a ver de qué manera lo podemos comprobar más fácil (*anota en el pizarrón las respuestas de dado los distintos equipos*). ¿Cuál de todas estas formas les parecerá más fácil? (*Pregunta a varios niños. Por el momento queda como favorita la de contar los dientes de los dos engranes y luego dividir entre sí los dos números resultantes.*)

Tres cuestiones diferencian esta situación de las trabajadas antes:

- la relación entre las dos circunferencias es: $\frac{8}{24}$ ($\frac{1}{3}$); antes se había trabajado una relación $\frac{1}{2}$, o $\frac{15}{20}$ ($\frac{3}{4}$), esta última sin haber sido explicada;
- la posibilidad de obtener el resultado en el ámbito estrictamente aritmético (mediante la división $24 \div 3$);
- la solicitud explícita de validar (comprobar) los conocimientos.

Todos los equipos enfrentaron exitosamente la tarea. Sin embargo, un análisis de ésta lleva a señalar que en términos relacionales el avance es modesto. En cuanto al primer punto, la relación $\frac{8}{24}$ es de una naturaleza similar a $\frac{1}{2}$ en el sentido de que en ambos casos el numerador es divisor del denominador. Es decir que la incorporación de las nuevas medidas no obligaba a la modificación de las estrategias de acercamiento al problema. En relación con el segundo punto, el avance radica en la posibilidad de prescindir de las manipulaciones empíricas y obtener, en el campo estrictamente numérico, el resultado. Empero, no todos los niños se desplazan a este campo, algunos —según se ve en los comentarios vertidos en la red primaria—¹⁴ han permanecido en el ámbito empírico: hacer girar los engranes.

Finalmente, un elemento importante es la exigencia de validación, que obligaría a los niños a distanciarse de la acción para elaborar justificaciones de sus resultados. Aquí aparece —en algunos equipos— la estrategia anticipada por la profesora: encontrar la relación entre el número de giros sin realizarlos físicamente. Sin embargo, algunos conservaron la estra-

¹⁴ Recuérdese que es la red de comunicación en la que —según clasificación de Régine Sirota— participa el profesor.

tegia previa consistente precisamente en hacerlos. La restricción que hubiese no sólo promovido sino obligado al uso de la nueva estrategia: *No se permite hacer girar los engranes*, no fue incorporada por la profesora.

Como quiera que sea, los resultados de la actividad anterior significaron un relativo aunque pequeño avance en relación con la variación proporcional. Puesto que la maestra busca que los niños avancen aún más, plantea una nueva situación.

NUEVAS RESTRICCIONES EN LA TAREA Y EMERGENCIA DE NUEVAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN (SÉPTIMA FASE DE LA ACTIVIDAD)

La tarea planteada en esta fase consistió en «encontrar el número de giros simultáneos de dos círculos», entre cuyos diámetros existía también la relación $\frac{1}{3}$. Conforme a las características de la situación, en esta ocasión se buscaba bloquear la estrategia de conteo directo y promover la utilización de la medida del diámetro y la relación π para resolver el problema. La actividad se desarrolla así:

MAESTRA.- Casi todos dicen que contando los dientes sería más fácil comprobar; vamos a ver... les voy a dar esto para que vean qué pueden hacer para calcular los giros simultáneos (*reparte unos círculos de cartulina que denomina «engranes sin dientes»; esto, en principio, impediría a los niños utilizar el conteo como estrategia de solución o comprobación, idea que la profesora tiene en mente*).

Observación de la investigadora: *En algunos equipos se reitera la estrategia de hacer girar simultáneamente los engranes sin dientes, marcando el punto de inicio del giro en cada uno (tal como hicieron en la segunda fase). Aparece, sin embargo, otra estrategia más evolucionada: algunos niños dicen a la maestra: «Se puede saber sabiendo lo que miden las circunferencias» (y tratan de medir las). El siguiente es uno de estos casos: Los niños del equipo miden con una regla el diámetro de cada uno de los círculos y calculan el perímetro de ambos usando una calculadora; luego dividen la medida de la circunferencia mayor entre la medida de la menor, y obtienen 3 como resultado. El entusiasmo del equipo es enorme, llaman a la maestra para comunicarle lo que perciben como un gran logro. La maestra los escucha.*

Son dos los equipos que —conforme a las previsiones docentes— producen la estrategia anterior, que esquematizo así:

- Reconocer el diámetro y la circunferencia como datos útiles para resolver el problema.

- Obtener, utilizando la regla graduada, la medida del diámetro de cada uno de los círculos.
- Calcular las dos circunferencias (utilizando la relación π).
- Dividir la medida de la circunferencia mayor entre la medida de la menor y obtener así un resultado.
- Interpretar este resultado como la respuesta al problema.

Sin embargo, otros equipos conservan la estrategia sustentada en hacer girar los círculos. Hubo una estrategia más, consistente en la simple aplicación de un conocimiento anterior: «Los círculos miden lo mismo que los engranes, [por lo tanto] la relación entre ellos es la misma». Esta similitud, como se ve, banalizó la actividad matemática.

En la estrategia más avanzada se observa el reconocimiento de que la medida de los diámetros respectivos servirá para calcular la relación entre el número de giros de las dos circunferencias. De hecho, la profesora ya había tratado de promover esa estrategia en etapas anteriores de la clase (quinta fase):

MAESTRA (*dibuja en el pizarrón un carro de carreras visto de costado, con las llantas traseras más chicas que las delanteras, luego pregunta*).- ¿Cómo le haría yo para saber de este carro cuántas veces da vueltas la llanta chica en relación con la grande *sin tener que estar dándole vueltas?*

Observación de la investigadora: *Los niños comentan entre sí, pero ninguno responde directamente a la maestra; ésta insiste dos veces más: «¿Nadie me puede decir?», pero no recibe respuesta.*

MAESTRA.- Bueno, pues queda de tarea lo siguiente [...]

Se observa una vez más —ante este intento no exitoso— una actitud parsimoniosa, conforme a la cual la lógica de la relación didáctica no está dada por la urgencia de obtener respuestas. La respuesta, como se vio, vendría más adelantada la clase.

LAS SITUACIONES DISEÑADAS POR LA PROFESORA PATRICIA

La situación «fundamental»¹⁵ que busca provocar el conocimiento previsto sobre la variación proporcional está constituida por objetos circulares

¹⁵ Tomo prestada, un poco abusivamente, la expresión de G. Brousseau para señalar,

de distinto diámetro que giran simultáneamente (llantas, engranes, círculos de papel).

Como se pudo ver, las dos últimas situaciones propuestas no eran suficientemente «potentes» para generar el conocimiento previsto por la profesora, pues permitían el uso de más de una estrategia como recurso de resolución. Es decir, tal como las situaciones fueron planteadas era posible hacer girar físicamente los círculos para obtener la solución, porque la restricción *No se permite girar los círculos* no se expresó. De cualquier manera, algunos equipos utilizaron la estrategia prevista por la profesora, la cual fue comunicada a otros en la fase de intercambio y validación.

Por otra parte, las razones trabajadas en la secuencia no rebasaron aquellas que podían manejarse como enteras. Cuando aparece la excepción —relación $15/20$ (.75)— la tarea no es exitosa. Su formulación simplificada $3/4$ emergió en la quinta fase de la secuencia, *tuvimos noticia de ella cuando los niños expusieron sus observaciones sobre los engranes de distintos aparatos*:

NIÑA.- La rueda chica da una vuelta mientras la grande da $3/4$ de vuelta.

MAESTRA.- Bien, ¿y entonces cuál será el tamaño de la chica en relación con la grande?

NIÑOS.- $1^3/4$!

Pero el conocimiento generado no se transfiere a otros pares de números que también impliquen la relación formulada, por ejemplo: $15:20$, que se había tratado originalmente.

No obstante las limitaciones que es posible señalar en la secuencia elaborada, la manipulación de variables didácticas y las restricciones incorporadas sucesivamente no son triviales. La labor de la profesora muestra una notable intuición, aun cuando haya faltado cierto control para que las situaciones no sólo *promovieran* sino que *obligaran* a utilizar determinadas estrategias. No resulta común en un profesor novel (la maestra Patricia lo es en esta forma de enseñanza) el provocar la sucesión de estrategias antes descritas, las cuales, dentro de los límites marcados en la misma secuencia, devienen relativamente más generales, y progresivamente consideran más relaciones matemáticas. Esto se expresa en las sucesivas formulaciones:

metafóricamente, que la maestra Patricia trabaja con sus alumnos a partir de una situación básica, que luego se modifica para generar distintos conocimientos, todos correspondientes a una familia.

- Para calcular las vueltas pueden hacerse girar los engranes y contar cuántas vueltas da cada uno.
- También pueden contarse los dientes de cada engrane y dividir.
- Se puede calcular [utilizando la relación π] la medida de una circunferencia y dividirla entre la medida de la otra circunferencia.

Tales formulaciones no fueron proporcionadas por la profesora, tenían en la base la experiencia intelectual de los alumnos. Acaso de ahí el gusto muchas veces expresado al descubrir las relaciones en juego. De entre ellas, una resultó para algunos un auténtico descubrimiento: *la relación entre el número de vueltas que dan dos engranes puede encontrarse conociendo el diámetro de éstos.*

EL APRENDIZAJE PAUTA EL TIEMPO DE LA ENSEÑANZA

Conviene señalar que durante los tiempos adidácticos autorizados por la profesora Patricia el avance no es homogéneo. La heterogeneidad se manifiesta en la permanencia de la estrategia inicial de resolución en las situaciones subsecuentes. Sin embargo, al haberse celebrado un contrato fuertemente didáctico —sobre la base de una excelente memoria didáctica que recupera a cada momento los saberes personales y provisionales de sus alumnos— la profesora acepta la diversidad conceptual generada durante la actividad y quienes utilizan las estrategias más primitivas se sirven, posteriormente, de los avances de otros compañeros. Es decir que la relación personal con el saber, al tener cabida oficial en la clase, pauta el avance de la progresión didáctica, y el tiempo de aprendizaje de unos colabora en el avance del de los otros.

En virtud de lo anterior, el tiempo didáctico sufre pocos estancamientos. Sólo eventualmente es necesario introducir mecanismos de re-equilibración. Hay uno del cual la maestra echa mano con mayor frecuencia y que desempeña un papel esencial en la forma de trabajo establecida: se trata de la «puesta en el congelador»,¹⁶ es decir, la introducción de nuevas experiencias de aprendizaje ante preguntas para las cuales los niños no tienen aún respuestas. Los siguientes son momentos en que tal mecanismo se utiliza:

- Cuando los niños no logran resolver la cuarta proporcional correspondiente a la expresión $20:15=30:X$.

¹⁶ Véase G. Brousseau y J. Centeno, «Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant».

Entonces la maestra dice: «Será necesario comprobar si la respuesta es correcta, ya que la mayoría opina así, pero primero vamos a escuchar la respuesta del tercer equipo». Y no se retoma la cuestión sino hasta la sesión siguiente, cuando se han proporcionado nuevas experiencias de aprendizaje (segunda fase).

- Cuando la maestra pregunta: «¿Cómo podríamos hacer [...] para no estar contando las vueltas de las llantas?», la interrogante tiene algún efecto en los niños y se generan comentarios en la red secundaria, pero ninguno muestra deseo de hacer pública su respuesta. Entonces, la maestra decide retirar la pregunta y, en su lugar, agrega nuevas experiencias (quinta fase).

En la «puesta en el congelador» —que no es sino una suspensión temporal de la pregunta planteada— subyace una cuestión esencial: la maestra no tiene prisa por que las respuestas *correctas* afloren. Ella considera que el aprendizaje toma tiempo y que hay que adaptar la enseñanza a ese ritmo, no a la inversa. Con tal idea en mente, entre la ocasión en que una cierta interrogación no respondida tiene lugar y la segunda en que ésta aparecerá, la forma de presentación del saber y la relación con él se han modificado. *La maestra Patricia no es una maestra que repite, es una maestra que recuerda*, con ello las acciones didácticas que realiza permiten que la actividad se mantenga en un registro intelectual.

¿POR QUÉ ES POSIBLE LA DEVOLUCIÓN DE LA TAREA?

La posibilidad de plantear tiempos adidácticos como eje del contrato se vincula con la forma en que la maestra concibe el aprendizaje: las relaciones y los conceptos matemáticos no son objeto de ostensión o de transmisión, sino objeto de construcción a partir de la interacción directa con una situación. Según dice ella: «en el CCECMEM¹⁷ entendí que si los niños construyen su conocimiento [a partir de resolver problemas] no se les olvida».

Es decir, la garantía del recuerdo no es la repetición ni el ejercicio, sino la significación que pueda extraerse de la interacción con una situación. Por lo tanto, ayudar a los niños a adquirir y retener conocimientos consiste en permitirles «que los construyan». Esto es muy distinto de lo que hacía antes de ir al CCECMEM: «Si veía que no entendían, lo que hacía es que les volvía a explicar».

¹⁷ Centro Coordinador para la Educación Continua del Magisterio del Estado de México.

Un rasgo sobresaliente en la acción de la maestra es su decisión de transferir a sus alumnos la responsabilidad de su aprendizaje. Para que esto fuese posible, debieron cumplirse varias condiciones, entre otras la confianza en los alumnos. Ella responde así a nuestra interrogación:

—¿Y tú crees que los niños sí pueden construir el conocimiento [por sí mismos]?

—Usted ya vio que sí, al principio me quedaba sorprendida, porque como nunca había trabajado de esta manera, no me imaginaba sus potencialidades, sus respuestas, pero después hasta me daba miedo de con qué irían a salir, qué me irían a preguntar, porque hay algunos muy inteligentes y de veras que me sorprenden, pero ahora ya les digo que lo que no sepamos lo vamos a investigar.

Como se ve, la valoración que la maestra ha hecho de sus alumnos es un factor fundamental en la posibilidad de transferirles la responsabilidad del aprendizaje.

LA VINCULACIÓN CON LO INSTITUCIONAL

Del saber a enseñar al saber enseñado

El desarrollo de la clase, según vimos, transcurre con base en la creatividad de la maestra y la de sus alumnos; empero, a decir de aquella, está acotado por la forma en que el libro de texto vigente en la época lo sugería. La referencia específica la constituye la lección titulada «Engranes», en la cual, por cierto, la actividad matemática en términos de dificultad corresponde a la trabajada en el grupo, pues se incluyen sólo razones enteras.¹⁸ Aunque el libro de texto no es directamente utilizado, produce un efecto horizonte claramente visible sobre las pretensiones educativas de la profesora y la relación didáctica que se establece.

De acuerdo con el programa oficial, en la lección «Engranes» se buscaba que los niños «Apliquen sus conocimientos sobre escalas y proporciones para resolver algunos problemas».¹⁹ Este objetivo, de suyo abierto, se acompaña de actividades que muestran detalladamente el *texto de saber institucional*. A partir de observar y responder a una serie de interroga-

¹⁸ C. Ímaz (coord.), *Matemáticas. Sexto grado*, pp. 74-75. Véase la lección al final del apartado.

¹⁹ Véase Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Sexto grado*, p. 97.

ciones acerca de los engranes que aparece en la lección de referencia, el alumno debería:

- Discutir con sus compañeros cuántas vueltas dará el engrane B mientras da una el engrane A.
- Contestar preguntas como:
 - Si el engrane B da ocho vueltas, ¿cuántas dará el engrane A?
 - Si el engrane A da diez vueltas cada minuto, ¿cuántas dará el B en cinco minutos?
- Medir los diámetros de los engranes y observar la relación que hay entre ambas medidas.
- Comparar la relación entre las medidas de los diámetros y la relación entre el número de vueltas que da un engrane respecto al otro.
- Comentar con sus compañeros el resultado de sus observaciones
- Realizar otros ejercicios similares.²⁰

Como podrá apreciarse, los aspectos de la variación proporcional seleccionados por la maestra están fuertemente vinculados a la propuesta oficial. En entrevista, la maestra hace explícita tal intención: «Trato de que ellos lleguen a lo que se plantea en el libro, aunque a veces [éste] es demasiado difícil. Por ejemplo en la lección de cilindros y conos [...]. Pero siempre intento que puedan resolver lo que viene [en él]». Y en efecto, en la progresión didáctica presentada, el trabajo con engranes, la elaboración (aunque no explícita) de listas de números proporcionales, la identificación de la razón diámetro del engrane A/diámetro del engrane B como determinante de la razón giros del engrane A/giros del engrane B, así como el uso de la relación π , fueron recuperados de los documentos oficiales. Sin embargo, en su interpretación personal del *texto de saber* oficial la maestra convirtió el «interrogar para descubrir» en «resolver para construir».

Del contrato sugerido al contrato celebrado: del descubrir al construir

La teoría de las situaciones didácticas²¹ postula como condición óptima del

²⁰ *Idem.*

²¹ Véase G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*.

aprendizaje matemático escolar la posibilidad de que los niños transiten —mediante un trayecto que se construye en la institución— del conocimiento que generan como respuesta personal a una pregunta al saber constituido por los objetos oficialmente designados para su enseñanza. Hemos visto en este grupo una relación de tal naturaleza.

Ubicada en el periodo en que tuvo lugar, la relación entre la maestra, los alumnos y el saber es excepcional, pues el texto de saber oficialmente vigente se entretecía con el «aprender descubriendo».

LOS RESULTADOS DEL CONTRATO

Un registro siempre intelectual

Al realizarse por exigencias de la situación-problema, la actividad se mantiene en un registro intelectual. Cuando la maestra se hace presente de manera explícita, no recurre —porque no le resulta necesario— a preguntas cerradas ni a índices comunicativos para obtener las respuestas. Ella retira las preguntas que, percibe, no serán respondidas; las planteará de nuevo cuando haya proporcionado otras experiencias que produzcan no sólo las respuestas sino los conocimientos que permiten ofrecerlas con un respaldo de significación.

Dice Brousseau que el cumplimiento de las responsabilidades derivadas de un determinado contrato se apoya en la posibilidad de reconocer ciertos índices de que una acción ha producido cierto efecto.²² La maestra ha ubicado en los razonamientos de sus alumnos los índices útiles para ponderar los avances y mantener el equilibrio didáctico —«Sé que aprendieron por sus razonamientos», dice—, son éstos los que le dicen si puede seguir adelante o si debe retroceder y plantear de otra manera el problema, agregar información, experiencias o simplemente esperar. Por esto le resulta importante conocer las estrategias desplegadas, así como que se expresen las representaciones construidas en los tiempos adidácticos. Aquí la comunicación y puesta en común no es un simple ritual como en estudios recientes se ha documentado,²³ sino una necesidad del contrato, que resulta fundamental para que el proyecto avance dentro del registro intelectual.

²² Véase G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques».

²³ Por ejemplo en J. Mendoza, «La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas».

Una tensa relación con la noosfera

De manera distinta a lo que podría suponerse, la relación entre la maestra Patricia y el entorno institucional no es nada buena. He aquí unos cuantos datos al respecto:

- Los docentes cuyas aulas colindan con la de la maestra Patricia, permanentemente expresan ante el director las molestias que ocasiona un método de enseñanza «tan permisivo»: hacen ruido, salen del salón, distraen a los niños de los otros grupos. Esta forma de trabajo, en suma, causa molestias porque perturba el trabajo de los demás.
- En los concursos internos en los cuales se selecciona a los niños para competir por el «mejor» alumno de la zona escolar, el grupo de la maestra Patricia obtuvo el último lugar entre los tres de sexto grado de su escuela. ¿A qué puede atribuirse esto? Una respuesta posible es que los exámenes aplicados en la época eran «institucionalizantes» y que en ese ámbito los alumnos de la maestra Patricia probablemente no eran muy hábiles, mientras que los de otros profesores sí.

Sea válida o no esta respuesta, es claro que el aprendizaje con la mediación de tiempos adidácticos resultaba incompatible con los valores vigentes en el sistema de enseñanza en el periodo. A fines de los años ochenta tales ideas resultaban raras y conflictivas, pero no pasaría mucho tiempo antes de que fueran acogidas por los responsables de la política educativa estatal. Pocos años después, en efecto, tal concepción de aprendizaje daría sustento a una nueva reforma curricular y se convertiría en paradigma del *buen enseñar*. Cabe entonces preguntarse si —una vez convertida en *ley*— esta reforma anticipada y voluntaria ha sido incorporada en las aulas. Porque, se habrá visto, en ello median ciertas ideas sobre los alumnos y la forma en que puede ayudárseles a aprender, pero también ciertas destrezas didácticas que los profesores deberán desarrollar para llevarla a cabo.

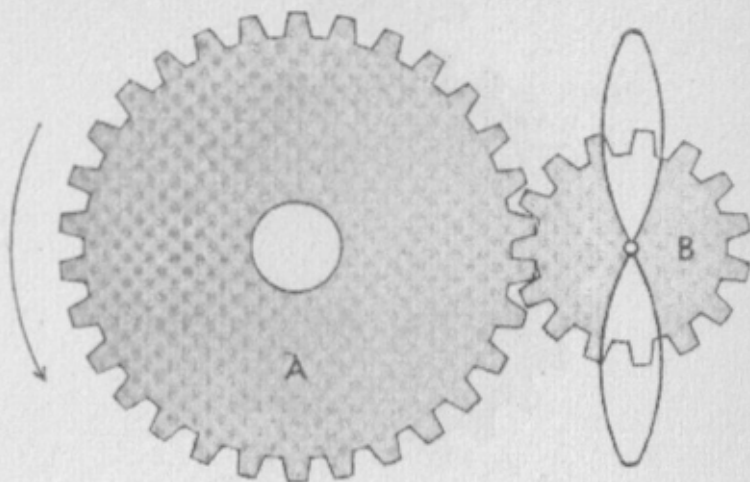
Rasgos de la actividad matemática desarrollada en el grupo de la maestra Patricia

	Primera sesión	Segunda sesión	Tercera sesión	Cuarta sesión	Quinta sesión	Sexta sesión
Contenido	Resolución de problemas con números naturales	Conversión de monedas	Potencias	Ángulos	Recta cuadrada	Equivalencias entre unidades del sistema métrico decimal
Se introduce definición	A manera de repaso	A manera de repaso, la maestra acepta las definiciones "lilas" y basadas en ejemplos dadas por los niños	Si	A manera de repaso, la maestra acepta las definiciones "lilas" dadas por los niños	Si	Procedimientos de conversión
Se ilustra o explica definición o procedimiento	No	La maestra "glasa" los procedimientos. Se vuelve varias veces a ello	Si	Mediante trazos y insinuaciones en el pizarrón. Se vuelve varias veces a ello	Se vuelve varias veces a ello	Se vuelve varias veces a ello
Preguntas cerradas	No	Si	Si	Si	Si	Si
Preguntas abiertas o antipatorias	No	No	No	Solo una	No	Solo dos
Preguntas y participaciones en un nivel epistémico	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Problemas como vía de aprendizaje	No	No	No	No	No	No
Problemas para aplicar	Si	Si	Si	No	No, los problemas se resolverían después de haber realizado ejercicios suficientes	No
Expresión de dudas y dificultades	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Engranés

¿Conoces un engrane?

Aquí se muestran dos de ellos



Si el engrane A gira en el sentido que indica la flecha (contrario al que giran las manecillas de un reloj), ¿en qué sentido gira el engrane B? _____

Si la hélice está unida al engrane B por un eje fijo:

¿En qué sentido gira la hélice? _____

¿Cuántos dientes tiene el engrane A? _____

¿Cuántos dientes tiene el engrane B? _____

Si el engrane A da una vuelta completa, ¿cuántas vueltas da el engrane B? _____

Si el engrane A da 4 vueltas, ¿cuántas vueltas da la hélice? _____

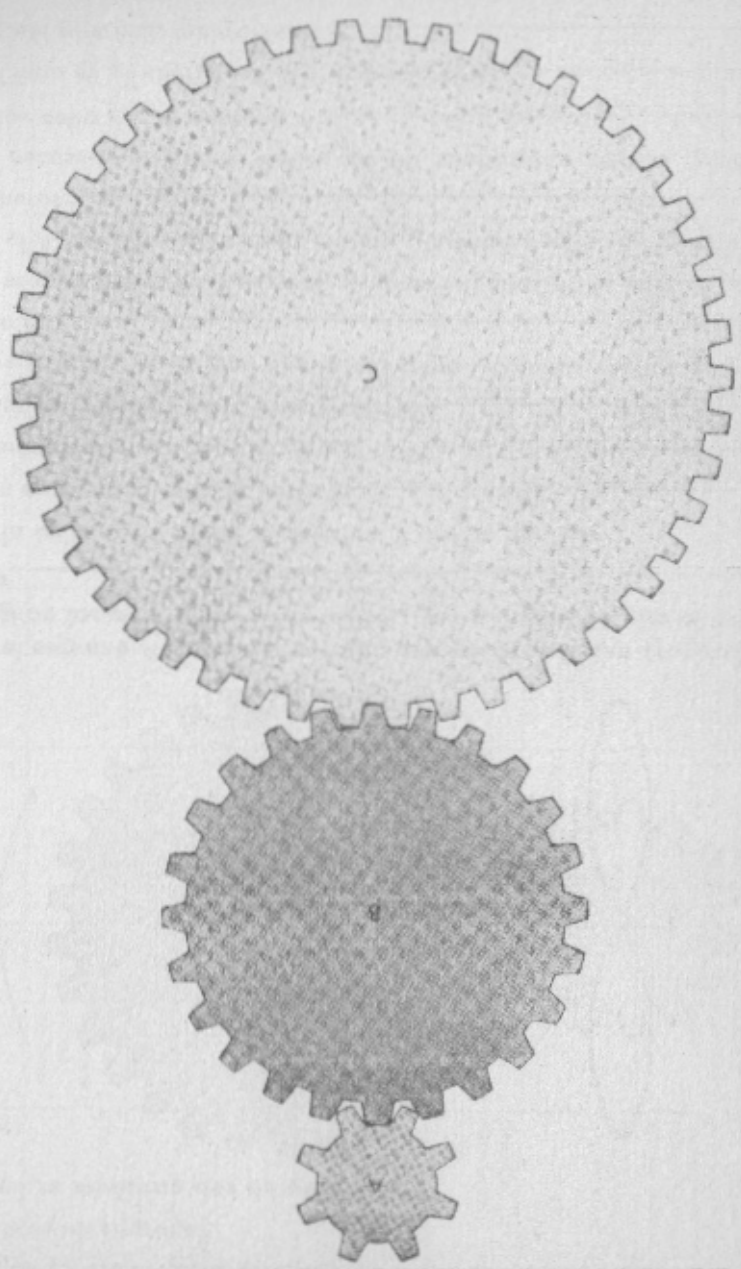
Si el A da 10 vueltas cada minuto, ¿cuántas vueltas da la hélice en 5 minutos? _____

Si necesitamos que la hélice dé 60 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas debe dar el engrane A? _____

¿Cómo es el engrane A con respecto al B? _____

¿Cuál gira más rápidamente? _____

Observa estos engranes y contesta las preguntas que se hacen en la página siguiente



TERCERA PARTE

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
COMO *TEXTO DEL SABER*

Capítulo 8

JUSTIFICACIÓN Y CONTEXTO DE LA NUEVA REFORMA

Los programas y textos correspondientes al periodo de la llamada matemática moderna permanecieron por más de veinte años en las escuelas en los tres últimos grados de la educación primaria. En los tres primeros, en cambio, los materiales serían sujetos a una revisión sustancial, pero el discurso ministerial redujo tal acción a «reformas esporádicas y fragmentarias».¹ Así, ante modificaciones que no alcanzaran un reconocimiento oficial importante, en el tiempo «cronológico» y el «de la sociedad» se había hecho viejo el marco vigente para la enseñanza de las matemáticas. Varios elementos, además del simple paso del tiempo, contribuirían al envejecimiento. A México llegaría desde 1976 el libro titulado *El fracaso de la matemática moderna*,² el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del instituto Politécnico Nacional (Cinestav) había creado por esas fechas la Sección de Matemática Educativa y el Laboratorio de Psicomatemáticas, y desde tales instituciones se iría generando una nueva perspectiva sobre la enseñanza de esta disciplina; los caminos que se vislumbraban se apartaban de la matemática moderna. Y para los años noventa, época en que otros grupos de investigación en esta línea habían generado ya algunos resultados, las perspectivas más educativas sobre la matemática como objeto escolar habían ayudado a construir una nueva cultura en importantes grupos constitutivos de la noosfera.

En este marco, en mayo de 1992, conforme a los ritos que de cuando en cuando preceden a las acciones de ajuste del sistema didáctico al tiempo de la sociedad, se firmó el Acuerdo para la Modernización de la Educación Básica. El documento delineaba vertientes de acción tales como la reformulación de contenidos y materiales educativos y la revaloración de la función magisterial. A las consideraciones, los programas y las medidas

¹ Secretaría de Educación Pública, *Acuerdo para la Modernización de la Educación básica*, p. 13.

² M. Kline, *El fracaso de la matemática moderna*.

acerca de la educación elemental se agregaban los relacionados con la actualización de los profesores —ya que ellos deben ser los «protagonistas de la transformación educativa»³ y las referidas a la educación normal, «porque es la que capacita y forma el personal docente de los ciclos de Educación Básica».⁴

Según el acuerdo modernizador, la reformulación de los contenidos y los métodos se justificaba porque a pesar de los grandes avances en el umbral del siglo xxi era necesario reconocer las limitaciones observadas, particularmente las vinculadas a la calidad educativa: «la calidad de la educación básica es deficiente en que, por diversos motivos, no proporciona el conjunto adecuado de conocimientos, habilidades, capacidades, destrezas, actitudes y valores necesarios para el desenvolvimiento de los educandos y para que estén en condiciones de contribuir, efectivamente, a su propio progreso social y el desarrollo del país».⁵

A partir de entonces, las matemáticas se ubicaron en el primer plano de la formación que los niños debían recibir: «El fundamento de la educación básica —se decía— está constituido por la lectura, la escritura y las matemáticas, habilidades que asimiladas elemental pero firmemente permiten seguir aprendiendo durante toda la vida y dan al hombre los soportes racionales para la reflexión».⁶ En el ámbito específico de esta materia se trataría de «reforzar a lo largo del ciclo el aprendizaje de las matemáticas, subrayando el desarrollo de la capacidad para relacionar y calcular las cantidades con precisión y fortalecer el conocimiento de la geometría y la habilidad para plantear claramente problemas y resolverlos».⁷

Ésta sería la primera formulación de las intenciones de la reforma a las matemáticas. En ella aparecía aún desdibujada una idea que finalmente sería esencial: «que los niños aprendan al resolver problemas».

De acuerdo con el discurso oficial, los supuestos de la reforma, de ser llevados a la práctica, implicarían una transformación radical del papel de los actores principales de la educación matemática elemental: los niños y los maestros. En efecto, la reforma se introdujo con la intención de revisar los contenidos curriculares: «se eliminaron los temas de "Lógica y conjuntos", ya que esta temática mostró en los hechos, en México y en el mundo, su ineficiencia como contenido de la educación primaria»,⁸ y otros

³ Secretaría de Educación Pública, *Acuerdo para la Modernización de la Educación Básica*, p. 17.

⁴ *Ibidem*, p. 2.

⁵ *Ibidem*, p. 5.

⁶ *Ibidem*, p. 14.

⁷ *Ibidem*, p. 15.

⁸ Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*, p. 52.

considerados difíciles se transfirieron a la secundaria. Pero sobre todo con una intención didáctica impulsada por la creencia de que la enseñanza de la matemática predominante en las escuelas promovía sólo aprendizajes memorísticos y sin significado. Bajo tal creencia subyacía otra: que la enseñanza habitual en las escuelas tenía una única vía de realización.

El vínculo con los saberes matemáticos analizado en el apartado precedente muestra que esto no es así. Se constata la permanencia de objetos de enseñanza oficialmente eliminados décadas atrás, el recorte de los que acarrean la novedad, una gestión diferenciada de la memoria didáctica, distanciamientos de las propuestas oficiales en distintas direcciones... en suma, contratos y transposiciones impregnados del saber personal y de experiencia de los profesores, que dan por resultado relaciones didácticas distintas.

Parece que del gran esfuerzo desplegado para introducir la matemática moderna quedó poco en las escuelas. Pero también es cierto que la acción de los profesores no puede caracterizarse simplemente mediante términos como «tradicional» o «memorística». Los contratos celebrados son diversos, también sus cláusulas invariantes y las costumbres. Incluso hemos presenciado una reforma adelantada.

Pero cualesquiera que fuesen los objetos matemáticos en juego, los contratos celebrados o las formas de regulación utilizadas, el currículum de matemáticas sustentado en la resolución de problemas llamaría, según sus prescripciones, a abandonar una buena parte de la tradición educativa en matemáticas, a dejar de lado las certezas y las creencias, los hábitos y las costumbres de muchos profesores. Esto porque, tomando prestados los términos de G. Brousseau, el considerar que los niños podían aprender al resolver problemas significaba que el profesor podría devolver la responsabilidad de su aprendizaje a los alumnos y ocupar, en muchos momentos de la clase, un lugar marginal.

Chevallard ha precisado que una vez hecho el trabajo necesario para planear una reforma, y una vez convertida ésta en ley, comienza el trabajo de interpretación y adecuación que hacen los profesores para traducir el *saber a enseñar* en un *saber enseñado*.⁹ Tal trabajo, según hemos visto, se hace a partir de concepciones arraigadas en la tradición, en la historia de las ideas acerca de la enseñanza, en los resultados de una práctica docente que ha devenido un sistema bien estructurado y que se autovalida en sus propios términos. En el límite, los docentes no incorporan (ni siquiera lo pretenden) las ideas de las cuales son portadores los materiales oficiales. En el otro extremo superan lo institucionalmente propuesto.

⁹ Véase Y. Chevallard, *La transposition didactique*.

Es pertinente por lo tanto preguntarse si los contratos didácticos celebrados en el marco de la resolución de problemas son inéditos; si la significación de los conocimientos que se adquieren ha aumentado; si Topaze ha limitado su presencia en las aulas. En síntesis, si la actividad matemática escolar es hoy cualitativamente diferente y, de ser el caso, en qué consiste tal diferencia.

Antes de introducirnos en las aulas recordaré al lector que nuestras observaciones fueron hechas entre el final del primero y el cuarto año de instrumentación de la reforma. Es pertinente suponer que el vínculo de los docentes con el nuevo texto de saber no se había estabilizado. Sería apresurado suponer que el desequilibrio provocado por las exigencias y los materiales recientemente introducidos había devenido ya un nuevo equilibrio didáctico. De cualquier manera, de qué tanto se han incorporado los nuevos principios educativos, de cómo éstos son gestionados, de qué beneficios intelectuales o dificultades han traído, de cómo las ideas viejas se entremezclan con las nuevas en el momento captado, de todo esto se habla en los siguientes apartados.

Capítulo 9

PRINCIPIOS Y SUPUESTOS DEL NUEVO CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS

LOS ORÍGENES

La reforma curricular introducida en México en 1993 es una reforma en la cual, de manera distinta a la de 1972, el énfasis innovador se situó en la relación didáctica, es decir, en la relación entre los alumnos, el maestro y el saber matemático. El objetivo explícito era que los niños aprendieran matemáticas al resolver problemas. Hay sin embargo un rasgo en que ambas reformas son coincidentes: la innovación es resultado de una ola de pensamiento internacional, cuya orientación en este caso se explica parcialmente en el hecho de que estudios evaluativos realizados a fines de los años setenta hicieron pública la persistencia de dificultades en los niños para construir soluciones a problemas cuyo modelo de resolución no era idéntico a los ya estudiados.¹ El hecho se repetía al menos en Estados Unidos, Gran Bretaña, Francia y Suiza. F. Perret lo dice de este modo:

En la lectura de las conclusiones de cada uno de los estudios mencionados, un elemento impacta por su permanencia. En todos los casos, en términos similares, los autores hacen notar un cierto desfase entre los objetivos previstos y lo que los alumnos han realmente aprendido. Confrontados a situaciones-problema que requieren una elaboración propia más allá de la aplicación de procedimientos de resolución-tipo, un gran número de alumnos no ha adquirido las capacidades de comprensión y de invención que la enseñanza renovada, según sus promotores, debería haber desarrollado.²

En lo que parecería reacción a estos resultados, en Francia se introdu-

¹ Véase J. F. Perret, *Comprendre l'écriture des nombres*, pp. 24-25.

² *Ibidem*, p. 24.

jeron oficialmente indicaciones a los docentes para ayudar a los niños en tal sentido: «No basta con solicitar a los alumnos resolver problemas (aun multiplicando los ejemplos) para que progresen en su capacidad de hacerlo. Es necesario un aprendizaje específico, de orden metodológico».³ Y se fijaron entonces objetivos tomando en consideración tres clases de comportamientos supuestamente intervinientes en la resolución de problemas:

- Saber buscar y seleccionar información pertinente: las informaciones ¿son todas necesarias?, ¿son suficientes?
- Saber organizar la información.
- Saber explotar la información pertinente.

Estas consideraciones, que dieran rumbo a la enseñanza en los años ochenta, se retomaron y precisaron en el texto relativo a la nueva política escolar de 1990, donde aparecen bajo el rubro «Tratamiento de la información».⁴

En Estados Unidos también germinó el interés por desarrollar la habilidad de la cual los niños carecían a pesar de las reformas. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) creó en 1987 la comisión para la elaboración de los *estándares curriculares*, que serían publicados en 1989.⁵ El primer estándar se refiere a «Las matemáticas como resolución de problemas», mientras que otros señalan «Las matemáticas como comunicación y «Las matemáticas como razonamiento».⁶ La emergencia de tales ideas en el contexto estadounidense estuvo vinculada a elementos más allá de preocupaciones estrictamente intelectuales o internas del sistema educativo: las nuevas empresas y la sociedad de la información las imponían. De este modo, el NCTM encuentra apoyo para la nueva orientación en declaraciones del Congreso de ese país: «los empleados han de estar preparados para entender las complejidades de las tecnologías de la comunicación, hacer preguntas, asimilar información nueva y trabajar en equipos de forma solidaria. Las empresas no buscan ya trabajadores con hombros fuertes, manos hábiles y conocimientos matemáticos "de tendero"».⁷ También en-

³ Ministerio de la Educación Nacional, Dirección de Escuelas, *Contenidos de formación para la escuela elemental*, p. 41, cit. por B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*. (Las cursivas corresponden al original.)

⁴ Véase B. Sarrazy, *La sensibilité au contrat didactique*, pp. 77-78.

⁵ National Council of Teachers of Mathematics, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*.

⁶ *Ibidem*, pp. 13 y ss.

⁷ A. C. Lewis, «Reading the writing on the wall», p. 46, cit. en National Council of Teachers of Mathematics, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, p. 4.

contró apoyo en las opiniones de Henry Pollak, al cual se refieren como notable matemático especializado en aplicaciones a la industria, quien resumió las exigencias matemáticas de los nuevos trabajadores industriales de la siguiente manera:

- Ser capaces de plantear problemas con las operaciones adecuadas.
- Conocer técnicas diversas para plantear y resolver problemas.
- Comprender las implicaciones matemáticas de un problema.
- Ver la posibilidad de aplicar ideas matemáticas a problemas comunes y complejos.
- Estar preparado para enfrentarse a problemas abiertos, ya que la mayoría de los problemas reales no están bien formulados.⁸

Todo lo anterior resaltaba la necesidad de una fuerza laboral flexible, capaz de seguir aprendiendo, por lo que:

Las matemáticas escolares deben subrayar una forma de instrucción dinámica. La resolución de problemas —incluyendo el modo en que se presentan los problemas, los significados del lenguaje matemático y el modo en que se hacen conjeturas y razonamientos— debe ser un punto central durante la escolarización, de forma que los estudiantes puedan explorar, crear, acomodarse a condiciones alteradas y crear conocimientos nuevos de forma activa a lo largo de toda su vida.⁹

Como puede verse —ya fuera porque de este modo los conocimientos tendrían más significación para el niño o porque la sociedad y la industria lo requerían—, la resolución de problemas se había situado en el centro de la enseñanza en el mundo occidental.

A México, la influencia llegaría tanto por los aportes anglosajones como por los de la didáctica francesa.¹⁰ Oficialmente se declaró que la propuesta de enseñanza de las matemáticas derivó de los resultados de investigación desarrollados en las últimas décadas en diversos institutos nacionales y extranjeros que pusieron en cuestión las formas dominantes de

⁸ H. Pollak, «Notes from a talk given at the Mathematical Sciences Education Board», 1987, cit. en National Council of Teachers of Mathematics, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, p. 4.

⁹ National Council of Teachers of Mathematics, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, p. 4.

¹⁰ Esta opinión es confirmada por R. Cambray (*Reform process of the mathematics curriculum for basic education in Mexico during 1992–2000*), a cuyo decir, algunos autores de la reforma reconocieron tener influencias anglosajonas en su trabajo, mientras que otros (quizá los menos) señalan adherirse a la didáctica francesa.

enseñanza de las matemáticas.¹¹ Y en efecto, los resultados de tales investigaciones permitieron replantear, inicialmente en el ámbito académico y experimental, los supuestos acerca del aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. Los resultados del conjunto de trabajos, traducidos luego en principios, secuencias y recomendaciones didácticas, constituyeron en buena medida el basamento de los nuevos programas y materiales mexicanos. Era la primera ocasión que una reforma a las matemáticas se sustentaba en la investigación educativa; fue precisamente su desarrollo el que permitió darle cierta orientación y sentido.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO VÍA DEL APRENDIZAJE, NOCIÓN BÁSICA DE LA REFORMA

Poner a los alumnos en contacto con los objetos de saber mediante situaciones problemáticas se declara como el núcleo básico de la reforma mexicana de los años noventa. Y aunque tal intención se entreteje en los materiales con elementos de otras concepciones de enseñanza y por momentos se diluye, a lo largo de los planes y programas se reitera de maneras distintas. El planteamiento general en los documentos oficiales es el siguiente:

«Los cambios principales [...] se refieren fundamentalmente al enfoque didáctico. Este enfoque coloca en primer término el planteamiento y la resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos» (SEP, 1993, p. 54). [Es por esto que] «Una de las funciones de la escuela es brindar situaciones en las que los niños utilicen los conocimientos que ya tienen para resolver ciertos problemas y que, a partir de sus soluciones iniciales, comparen sus resultados y sus formas de solución para hacerlos evolucionar hacia los procedimientos y las formulaciones propias de la matemática [convencional]» (SEP, 1993, p. 51).

Concuerdo con E. Mancera en su afirmación de que con la expresión «enfoque de resolución de problemas se alude a una variedad de formas de trabajo que abarcan desde la simple incorporación de problemas en el desarrollo de una clase hasta propuestas sumamente elaboradas apoyadas en teorías sobre el desarrollo cognitivo o el procesamiento de la información».¹² En los materiales curriculares no se define explícitamente el sen-

¹¹ Véase Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*.

¹² E. Mancera, *Saber matemáticas es saber resolver problemas*, p. VII.

tido que se da a los problemas matemáticos; empero, puede inferirse que un problema se entiende como una situación para la cual quien intenta encontrar la respuesta no tiene de antemano una estrategia de solución específica, aunque sí cuenta con elementos para imaginar y construir la solución. Un problema, en la perspectiva asumida, obliga a analizar, a reflexionar, a anticipar soluciones, a probar... a generar conocimientos, de ahí su valor como vía de acceso al saber.

Más allá del enfoque general hasta aquí descrito, la propuesta curricular muestra variantes en los distintos grados de la educación primaria. Por ejemplo, en el primer grado se plantea la necesidad de que:

Las actividades que se propongan en la escuela enlacen los contenidos de los programas de estudio con los aprendizajes que los niños han adquirido fuera de la escuela y con la forma en que han arribado a ellos, apoyándose en la percepción visual, en la manipulación de objetos, en la observación de las formas de su entorno y en la resolución de problemas. Se busca que a través de estas actividades los conocimientos matemáticos sean para los alumnos una herramienta flexible y adaptable para enfrentar situaciones problemáticas que se les presenten.¹³

Es decir que la resolución de problemas no es la única vía considerada para el aprendizaje; no obstante, se refrenda la importancia otorgada a ésta: «Para que la resolución de problemas sea el motor que promueva el aprendizaje matemático y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los alumnos es necesario invertir el orden en que tradicionalmente hemos procedido. Enfrentar desde el principio a los alumnos a la resolución de problemas utilizando sus propios recursos, les permitirá construir nuevos conocimientos y, más adelante, encontrar la solución de problemas cada vez más complejos».¹⁴

En el tercer grado, además de insistir en la resolución de problemas se alude al aprendizaje significativo y se anota que este tipo de aprendizaje es resultado del interés por responder a una pregunta o resolver un problema motivador. Luego se acota que «tales problemas o preguntas pueden implicar desde saber cuál de los compañeros ganó un juego hasta saber cómo construir un juguete o encontrar un camino para salir de un laberinto numérico».¹⁵ De esta manera, en franca alusión a las ideas entonces instaladas en las escuelas, se precisa que «un problema no es sólo un enunciado escrito que aparece al final del desarrollo de un tema y que se debe

¹³ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*, p. 10.

¹⁴ *Ibidem*, p. 14.

¹⁵ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas tercer grado*, p. 9.

completar con un dato, [sino que] los problemas también son situaciones que desencadenan actividades, reflexiones, estrategias de resolución y discusiones que permitirán aproximarse a la solución buscada mediante la construcción de nuevos conocimientos».¹⁶

En este grado se mencionan además dos tipos de problema: a) *para descubrir* [entiéndase para construir nuevos conocimientos] a los cuales los niños se acercan con sus propios recursos de resolución, y b) *para aplicar* los conocimientos que ya se poseen (problemas para los que se tiene un modelo de resolución construido con antelación) y cuyo objetivo es ampliar el ámbito de aplicación de los conocimientos. Según se dice, el trabajo alternado con unos y otros permitirá el aprendizaje matemático significativo deseado.

En el quinto grado —en concordancia con el enfoque general— los problemas se declaran nuevamente núcleo y motor del aprendizaje de las matemáticas, pero se introduce además un acento en que sean los propios niños —con base en las características de la situación-problema o mediante la confrontación de ideas— los que validen los resultados que obtengan, sin que sea un juicio externo el que los sancione.¹⁷

Estos principios curriculares —en los que predomina la resolución de problemas como vía del aprendizaje— tomaron forma a través de diversos materiales: el plan y los programas de estudio, los *libros para el maestro*, los *ficheros de actividades* y los *libros para el niño*, distribuidos gratuitamente a alumnos y profesores.

LOS PRINCIPIOS CURRICULARES EN LOS LIBROS DE TEXTO

Similitudes a lo largo de la educación primaria

La vía por la cual la reforma se convirtió en materiales educativos fue peculiar: los libros de texto gratuitos fueron elaborados a partir de un concurso abierto convocado por la Secretaría de Educación Pública y en cada ciclo de la educación primaria los equipos ganadores fueron diferentes. Como antes vimos, el enfoque que se observa en todos los casos tiene una línea de identidad principal: la vía del aprendizaje que se pretende impulsar es la resolución de problemas. Se busca proponer situaciones en las cuales las nociones matemáticas cobren sentido y funcionalidad; el saber institucionalizado, cuando se incluye, se inserta por lo general al final de

¹⁶ *Ibidem*, p. 9.

¹⁷ Véase Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas quinto grado*.

las secuencias de aprendizaje, es decir, se supone que es el corolario del trabajo intelectual realizado previamente. Pero como hemos visto, las ideas y los desarrollos específicos en cada ciclo escolar muestran diferencias. Estas se agudizan en el caso de algunos libros de texto.

Los cuatro primeros grados de la educación primaria

En los cuatro primeros grados, siempre con el sustento de la resolución de problemas, la fuente de inspiración más evidente es la didáctica de las matemáticas francesa y la ingeniería generada desde tal corriente. Con las adaptaciones que serían imaginables, en los materiales se perciben dos influencias principales: Guy Brousseau con la noción de situación didáctica (principalmente en primer grado) y Gérard Vergnaud con su tipología de problemas aritméticos, que se corrobora claramente en el tercer y cuarto grados. Asimismo, el trabajo de ingeniería desarrollado en el Institut National de Recherche Pédagogique (INRP) se observa como referencia importante en los cuatro grados mencionados.¹⁸ La influencia se advierte o bien en los principios generales acogidos, o bien en la forma específica de las lecciones y las actividades sugeridas, y puede entenderse por el vínculo de los autores de los textos y demás materiales de estos grados con la literatura e investigadores franceses.¹⁹

El tercer ciclo de la educación primaria

En los nuevos textos del tercer ciclo de primaria se plasmó un interés autorral por presentar los contenidos matemáticos «integrados» alrededor de situaciones que les dieran cierto realismo. Este interés, central en la propuesta, deriva de fuentes tales como los escritos de Luis Hidalgo, para quien (según aseveración de los autores) los bloques de contenido, al es-

¹⁸ Véase, por ejemplo, *ICMIL. Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours préparatoire*.

¹⁹ Los materiales curriculares correspondientes al primer ciclo de la educación primaria fueron elaborados con la participación de investigadores del Departamento de Investigaciones Educativas del CINEP/AV, quienes adoptaron, casi desde el inicio de sus trabajos, el enfoque de las situaciones didácticas de G. Brousseau. Los materiales correspondientes al segundo ciclo de la primaria fueron elaborados en la Universidad Pedagógica Nacional, también con clara influencia francesa favorecida a partir de un convenio de intercambio celebrado con el Institut National de Recherche Pédagogique, durante la rectoría de José Ángel Pescador.

tar suficientemente correlacionados, favorecen que los procesos constructivos tengan productos significativos; es decir, son propicios para que el alumno genere nociones y conceptos. Los escritos de G. Vergnaud también fueron útiles a los autores de quinto grado, que de este investigador recuperan la idea de que no es pertinente estudiar separadamente los conceptos y los procedimientos, ya que éstos son difícilmente dissociables al enfrentar una situación problemática.

No obstante el interés por la integración alrededor de alguna situación, las formas de presentación de contenidos fueron también el juego y la narración, las cuales, se dice, se utilizaron cuando la integración de contenidos resultaba demasiado artificial.²⁰

Ahora bien, las influencias identificadas en los distintos textos no implican ni uniformidad al interior de cada uno ni que el enfoque de «aprender a través de la resolución de problemas» esté presente en el tratamiento de cada uno de los temas. Tradicionalmente, las reformas han sido planteadas en México a la luz de una determinada epistemología, que si bien ejerce un efecto horizonte, no todos y cada uno de los desarrollos específicos se realizan conforme a ella. Por lo general se dan yuxtaposiciones de las concepciones emergentes con otras remanentes que ocupan espacios de consideración.²¹ En ocasiones se corrobora también que las ideas emblemáticas de la reforma están presentes sólo metafóricamente en los materiales. Así pues, aunque la idea de base es el aprendizaje a través de la resolución de problemas, esto no significa que los materiales se hayan desarrollado sistemáticamente a partir de tal idea, o que los problemas planteados tengan un nivel cognitivo tal que constituyan una real oportunidad de producir conocimientos relevantes sin la ayuda del profesor.

Conviene finalmente precisar que los libros para el maestro y ficheros de actividades correspondientes a los seis grados de la educación primaria son materiales que también ocupan un lugar central conforme a los fundamentos de la reforma, y fueron redactados en colaboración con el personal de la Subsecretaría de Educación Básica, lo cual permitió un desarrollo más homogéneo de los mismos.²²

²⁰ Véase E. Pérez y otros, «El libro de texto *Matemáticas quinto grado*».

²¹ Véase A. Avila y S. García, *Paradigmas de enseñanza de las matemáticas elementales*.

²² Conviene indicar que en el año 2000 los libros de texto de quinto y sexto grados fueron sustituidos por otros más acordes con el enfoque de los primeros ciclos. Las fechas en que se recolectaron los datos que sustentan este texto no permiten dar cuenta de las relaciones didácticas establecidas en presencia de los nuevos textos.

CONSTRUCTIVISMO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El término *constructivismo* se ha vuelto trivial; se ha afirmado incluso que «se extiende como una mancha de aceite sobre todas las publicaciones pedagógicas, de tal manera que hoy resulta que todo el mundo se proclama constructivista sin serlo realmente».²³ Aun reconociendo la trivialización del término, ubico la propuesta curricular sintetizada oficialmente mediante la expresión «que los niños aprendan resolviendo problemas» justamente en el marco constructivista por al menos las siguientes razones: se considera que el conocimiento supone una elaboración por parte del sujeto (el niño); se asume una posición interaccionista en la que el conocimiento matemático es resultante de la acción del sujeto sobre las situaciones problemáticas; se acepta que el conocimiento está determinado no sólo por las situaciones sino también por las estructuras cognitivas del niño, es decir que la vinculación con las situaciones se hace por mediación de las características cognoscitivas del alumno, y los recursos intelectuales de éste determinan cómo las interpreta y enfrenta. Se presupone además una génesis en el desarrollo de los conceptos matemáticos.²⁴

R. Cambray-Núñez ha señalado que el de la reforma es un constructivismo poco claro. Esto se entiende, dice, si se toma en consideración, por una parte, que ningún documento difundido por la Secretaría de Educación trató de manera amplia este tema y, por otra parte, que algunos autores —según su propio decir— prácticamente desconocían tal corriente educativa, lo cual obviamente les dificultó la elaboración de materiales desde tal perspectiva.²⁵ Pero en mi opinión este constructivismo borroso no se encuentra ni en todos los programas ni en todos los libros de texto. Si tal vez en pocos se trató de seguir rigurosamente una teoría del aprendizaje o de la enseñanza, sí es posible observar en varios de ellos la concreción relativamente sistemática de algunos de los principios antes mencionados.

²³ J. Delval, «Tesis sobre el constructivismo», p. 15.

²⁴ Sobre los «requisitos» de una teoría constructivista puede verse J. Delval, «Tesis sobre el constructivismo».

²⁵ R. Cambray, *Reform process of the mathematics curriculum for basic education in Mexico during 1992-2000*, pp. 117 y ss.

IMPLICACIONES DEL NUEVO TEXTO DE SABER

Una nueva relación con las matemáticas

No obstante los cuestionamientos antes anotados, el enfoque curricular en su conjunto, al suscribirse *grosso modo* en una posición constructivista, tiene múltiples implicaciones didácticas. Por una parte, las matemáticas dejan de ser una disciplina que se transmite a manera de definiciones y procedimientos institucionalizados. Ni la presentación cultural del saber ni el aprendizaje mediante el descubrimiento forman parte del nuevo proyecto educativo, al menos no en las declaraciones de principio. Ahora se trata de que los niños «hagan matemáticas».

En efecto, los didactas franceses han puesto de relieve el hecho de que el trabajo fundamental realizado por los matemáticos en su labor de creación es precisamente resolver problemas (y luego verificar la validez de los conocimientos producidos); ese trabajo, dicen, es el que los niños deben desarrollar en la escuela para aprender significativamente esta disciplina. En términos de la teoría de las situaciones didácticas se trataría de hacer que los niños se apropien del saber previsto a partir de la producción de un conocimiento personal que emerge por exigencias de la situación y no del profesor.²⁶

Una nueva concepción de alumno y nuevas funciones para el docente

Conforme a lo anterior, plantear problemas y situaciones promotoras de nuevos conocimientos constituye una de las responsabilidades que ha de asumir el docente, aunque no es ésta su única tarea. De acuerdo con la propuesta plasmada en los materiales, a la creación de condiciones para que se produzca el conocimiento mediante la resolución de problemas se agrega el compromiso de «hacerlo visible», de transformarlo en un saber que sea útil en futuras ocasiones y constituya una marca de saber reconocido socialmente.²⁷ Tal postura, claramente inspirada en las ideas de G. Brousseau, se traduce concretamente en que ante un nuevo objeto de enseñanza no se hacen necesarias las explicaciones del profesor para que el alumno se relacione con aquél, y tampoco sus interrogatorios. Frente a un

²⁶ Véanse G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, y F. Conne, «Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique».

²⁷ Véase G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*.

determinado problema, que permitirá establecer la relación inicial con el objeto de saber, aparecerán estrategias de solución no enseñadas y diversas, según los conocimientos previos que los niños tengan para enfrentar la tarea. Esto será la materia prima para que el maestro haga funcionar la clase de matemáticas, puesto que, como han dicho Briand y Chevalier, el trabajo del profesor consiste en conciliar las concepciones de los alumnos con su proyecto de enseñanza, en construir situaciones adecuadas para ello. Uno de los retos de la actividad matemática en clase consiste, pues, en producir un saber oficial fundamentándose en los conocimientos de base de los alumnos.²⁸

Brousseau acuñó el término *desdidactificación* para referirse al hecho de que el profesor, en vez de participar explícitamente en la actividad que tiene por objetivo que los niños se apropien del saber, los ponga en contacto directo con el saber a través del *medio* (que puede ser un problema a resolver) y produzca así sus conocimientos como respuesta a una pregunta.²⁹ Pero, ha afirmado también este investigador, la desdidactificación es una actividad voluntaria del maestro, ya que consiste en transferir a los niños un derecho que tradicionalmente le ha pertenecido.³⁰ La desdidactificación, pues, puede suponerse un obstáculo en la posibilidad de incorporar la resolución de problemas como vía del aprendizaje escolar. Pero tal obstáculo no es la única dificultad que encuentra la resolución de problemas como vía del aprendizaje en las aulas.

Sobre el saber hacer y las destrezas docentes

El ámbito de las dificultades para gestionar una propuesta constructivista comprende también el de las destrezas y las técnicas. Sólo un ejemplo de esto: ¿qué puede hacer un profesor cuando advierte que el problema planteado a sus alumnos es demasiado difícil, que éstos no tienen los conocimientos necesarios para construir una estrategia personal de solución? O, al contrario, ¿cómo asegurar que las situaciones propuestas no sean una simple aplicación de conocimientos previamente adquiridos y que por lo tanto no promuevan ninguna construcción? Es decir, ¿qué variables didácticas ha de manipular el profesor para que su acción no caiga en ninguno de estos casos?

²⁸ J. Briand y M. C. Chevalier, *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*.

²⁹ Véase G. Brousseau, «Los diferentes roles del maestro», pp. 66 y ss.

³⁰ Véase G. Brousseau, «Los diferentes roles del maestro».

Al respecto son llamativas las palabras de uno de los actores de la reforma, quien, con bastante escepticismo, le comenta a Cambray: «Determinar las situaciones que favorecen el aprendizaje es tarea de los profesionales de la didáctica, por ello es poco realista demandar a los maestros hacer esta tarea».⁵¹ Aunque la pertinencia de esta afirmación no es sino parcial, ya que precisamente los materiales tratan de ofrecer tales situaciones (problemas), en efecto queda al profesor encontrar el punto en que estos problemas lo son realmente para sus alumnos.

¿Los profesores comunes estarán en capacidad de llevar a buen término esta propuesta? Porque, por otro lado, ¿no desearán mantener para sí el control de los acontecimientos, aun si el control es flexible? ¿No será que, si la puesta a prueba de la innovación se convierte en incertidumbre o fracaso, optarán por retomar los contratos que gestionaban con facilidad y certeza?

En el apartado anterior vimos el caso de una profesora que adelantándose por propia voluntad a esta reforma decidió devolver la responsabilidad a sus alumnos; con base en tal decisión, la actividad matemática en su clase se tradujo en un verdadero trabajo intelectual. Pero la devolución, como Brousseau lo ha señalado, es un acto de libre decisión. ¿Ocurrirá entonces que los profesores, por decisión de los planeadores, transfieran la responsabilidad del aprendizaje a sus alumnos? En principio, la cuestión no parece fácil. Probablemente por ello es que muchos profesores se mantienen al margen de la reforma.

⁵¹ R. Cambray, *Reform process of the mathematics curriculum for basic education in Mexico during 1992-2000*, p. 103.

AL MARGEN DE LA REFORMA

Capítulo 10

LA OSTENSIÓN COMO BASE DE LA ACTIVIDAD. FRENTE A UNA VIEJA CONCEPCIÓN DE LA FRACCIÓN

NOTA PRELIMINAR

En la primera etapa del estudio acerca de la recepción de los materiales y principios educativos introducidos en 1993, que realicé con el apoyo de varios colaboradores, me percaté de que algunos profesores se reconocían a sí mismos como desconfiados de las reformas educativas promovidas por el Estado. Para algunos de ellos incluso resultaba que estas reformas, al ser «solamente modas», luego se sustituían por «otras nuevas modas». A su entender, este hecho implicaba el reconocimiento de la Secretaría de Educación del error cometido al haber impulsado años atrás una cierta forma de enseñar las matemáticas. La reforma que llevara a la escuela las llamadas matemáticas modernas era el ejemplo más claro señalado por estos profesores.

Teniendo esta opinión sobre las reformas impulsadas sucesivamente, y consecuentes con su postura, algunos profesores a quienes luego observamos trabajar señalaron explícitamente no haber incorporado en su práctica de enseñanza las ideas promovidas por los nuevos textos y programas, al menos no hasta entonces. Su quehacer, según nos dijeron, se basaba en la experiencia alcanzada a lo largo de su profesión y no en las ideas provenientes de materiales y textos, aun cuando éstos definiesen las aspiraciones educativas del Estado.

Al entrar a los salones de clase de esos profesores constatamos transposiciones por completo ajenas a las propuestas oficiales, así como la permanencia de contratos basados en la ostensión, en la explicación o en el descubrimiento. De entre todos estos casos sólo seleccioné uno que me parece llamativo por el hecho de tener una fuerte raigambre sensual-empirista que dos reformas trataron de desterrar de las escuelas pero que, al

parecer, se mantiene como horizonte pedagógico de muchos profesores.¹

LA OSTENSIÓN COMO BASE DE LA ACTIVIDAD

«¿Podemos ver las ideas?», pregunta la maestra a sus alumnos, y, sin esperar respuesta, ella misma se responde: «No, pero podemos representarlas mediante dibujos o gráficas». Y esto último es parte sustancial de lo que hace en su clase.

En efecto, el aprendizaje de la matemática tal como la profesora Nidia lo concibe, la conduce a practicar una enseñanza basada en la introducción ostensiva de los contenidos matemáticos, esto es, mostrando de un solo golpe todos los elementos y relaciones constitutivas de la noción en juego.² Las ostensiones de la profesora tienen un objetivo principal: dotar de significado las formas institucionalizadas del saber, trátase de la fracción o de otros contenidos cuyo tratamiento pudimos presenciar. Esta voluntad se expresa permanentemente en sus acciones didácticas, las cuales consisten en:

- La presentación ostensiva de las definiciones y los conceptos.
- La realización de ejercicios similares a los ostentados.
- El uso de una libreta para conservar en la memoria oficial de la clase las definiciones trabajadas y sus respectivos ejemplos.
- El repaso cotidiano de las definiciones guardadas en la *libreta de conceptos*.

En las siguientes páginas veremos cómo toma cuerpo esta forma de enseñanza en el caso específico de las fracciones, tema comúnmente considerado entre los más difíciles de la aritmética en primaria.

Tradicionalmente las fracciones (o quebrados) fueron incorporadas en la escuela bajo una idea principal: una fracción es una parte que se toma de un *todo*. Esta noción se trabajaba con un fuerte acento en la simbolización.³ En los programas incorporados en 1993 el tema fue objeto de una

¹ En A. Avila, *La experiencia matemática en la educación primaria*, se analizan algunos de los casos que se refieren en esta introducción.

² Esta formulación, que debemos a Harrison Ratsimba-Rajolin, se comentó en la primera parte del libro.

³ Véanse, por ejemplo S. Caballero y B. Villaseñor, «Aritmética y geometría», en *Mi libro y mi cuaderno de trabajo de tercer grado. Instructivo para el maestro*, así como J. Hernández y A. López Orche, *Mi libro de sexto año. Aritmética y geometría*.

revisión importante. Entre otras cosas, se redujo la simbolización asociada y se introdujeron los distintos significados que, hoy sabemos, puede adquirir una fracción: como parte de un todo, como cociente, como razón, como operador... Por otra parte, las definiciones y los procedimientos dejaron de ser importantes como objeto de enseñanza; de hecho, en lo que hoy parece una postura radical, en los libros de texto oficiales casi no aparecen definiciones, procedimientos ni fórmulas; se dio más importancia a la resolución de problemas, al análisis y al despliegue de estrategias personales de resolución.⁴ En el grupo cuya actividad sustenta este capítulo, sin embargo, no fueron incorporadas las situaciones problemáticas o la diversidad de acercamientos sugeridos. A cada una de las fracciones introducidas en la clase corresponde sólo un acercamiento sustentado en una triple representación —*objetiva-gráfica-simbólica*— determinada por la profesora. De manera distinta a como se plantea en los documentos oficiales, tales representaciones se vinculan a una única interpretación de la fracción: *una parte de un todo*. Así, en el contexto de este grupo escolar, $\frac{1}{2}$ significa que un círculo (o un rectángulo) se ha dividido en dos partes iguales y que de ellas se ha tomado una.

EL OBJETO DE ENSEÑANZA: EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

«*Fracción* —o lo que corresponda en otras lenguas— es la palabra con la que se introduce el número racional, y en todas las lenguas que conozco [decía Freudenthal] está relacionada con romper, fracturar».⁵ La fracción, que constituye el recurso fenomenológico de los números racionales, es un objeto de enseñanza presente desde siempre en la educación primaria y también uno de los reconocidos entre los más difíciles de este nivel educativo. La dificultad tiene en la base diversas razones, entre otras, que el número racional implica una relación entre dos números (a/b , con $b \neq 0$) y que admite múltiples interpretaciones, puesto que puede modelar una amplia variedad de situaciones. En efecto, los números a los que comúnmente llamamos fracciones —números que pueden representarse en la forma a/b con b diferente de cero— modelan un abundante número de fenómenos. Algunos matemáticos (por ejemplo Peterson y Hashisaki) distinguen cuatro interpretaciones o significados principales de estos números, a saber:

⁴ La observación es válida al menos para los materiales antes de la revisión realizada a algunos de ellos en el año 2000.

⁵ H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, p. 2.

1. Elemento de un sistema matemático.
2. División.
3. Fracción o partición.
4. Razón.

Cada una de estas interpretaciones está asociada a situaciones en las que hay un problema bien definido.⁶

Los didactas han asociado otros significados al concepto de fracción. Dienes, precursor de la didáctica de las matemáticas en el nivel básico, resaltaba, entre otras, la idea de que la fracción puede entenderse como un estado (descripción de una situación) o un operador (sucesión de divisiones y multiplicaciones).⁷ Más influyente resultó la opinión de H. Freudenthal, para quien las ideas básicas que es posible asociar a las fracciones son dos: fracturar y comparar.⁸ Thomas Kieren, otro autor clásico sobre el tema, afirma que las fracciones pueden considerarse como el resultado del fraccionamiento (partición) de una unidad, como el resultado de una medición, como un operador o como una división.⁹ Como se aprecia, aunque sin una total coincidencia, hay un reconocimiento amplio de que la fracción es un concepto polisémico.

Existe al menos otro factor que dificulta el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones: sus propiedades son distintas de las de los números naturales. Por ejemplo, no existe el antecesor y el sucesor, siempre será posible ubicar una fracción entre otras dos; la regla según la cual al multiplicar dos números siempre se obtendrá uno mayor o al dividir se obtendrá uno menor tampoco se cumple, en este campo. Las diferencias entre uno y otro campo numérico, según ha documentado la investigación, son fuente importante de dificultades en el aprendizaje.

El texto de saber introducido con la reforma de 1993 recupera los múltiples significados asociados al concepto de fracción antes mencionados, disminuyendo el peso dado, por una parte, al de *partición de la unidad*, y por la otra a la simbolización y la operatividad. Según se lee en los documentos oficiales:

Se aplazó la introducción de las fracciones hasta el tercer grado [anteriormente se introducían en el primero] y la multiplicación y división con fracciones pasó a la secundaria. Lo anterior se basa en [el reconocimiento de] la dificultad que

⁶ Véase J. Peterson y J. Hashisaki, *Teoría de la aritmética*.

⁷ Véase Z. Dienes, *Fracciones*.

⁸ H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*.

⁹ Véase T. Kieren, «Partitioning, equivalence and the construction of rational numbers ideas».

tienen los niños para comprender las fracciones y sus operaciones en los grados en que se proponían anteriormente. A cambio de ello, se propone un trabajo más intenso sobre los diferentes significados de la fracción en situaciones de reparto y medición y en el significado de las fracciones como razón y división.¹⁰

El avance programático de quinto grado insiste en el tratamiento de las fracciones en distintas situaciones y con distintos significados: partición, medición, razón o división.¹¹ No obstante estas sugerencias, resultantes de casi dos décadas de investigación educativa, la profesora cuyo trabajo se analiza en seguida prefiere vincular a sus alumnos con aspectos de las fracciones presentes desde siempre en el currículum escolar.

LAS FRACCIONES EN LA CLASE¹²

Primera fase: introducción ostensiva del concepto

Después de un breve recordatorio de definiciones y resúmenes anotados en la libreta de conceptos, la maestra introduce el tema de las fracciones:

• *Mostración objetiva*

MAESTRA.- El día de hoy vamos a ver qué son las fracciones (*muestra a los niños un plato para pozole*). ¿Para qué sirve [el plato]? <

NIÑOS.- ¡Para pozole!

Observación de la investigadora: *La maestra hace un amplio interrogatorio sobre los ingredientes que se ponen al pozole y con los que éste se acompaña; finalmente, una respuesta le da pie para vincularse con el contenido matemático previsto:*

NIÑA 1.- Rábanos.

MAESTRA.- ¿Y van enteros?<

NIÑA 1.- No, porque no nos los podemos comer así.

MAESTRA.- Exactamente, no los podemos comer enteros y *por eso los parti-*

¹⁰ Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*, p. 52.

¹¹ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas cuarto grado*, p. 15.

¹² La profesora Nidia, quien atiende el grupo de quinto grado al que se hace referencia en este capítulo, tiene dieciséis años de servicio y estudió la normal básica cuando ésta no tenía aún nivel de licenciatura. La escuela a que pertenece el grupo es de prestigio medio, ubicada en una colonia céntrica de la ciudad.

mos (enfatisa con el tono de voz la última frase). Por eso vamos a ver qué son las fracciones. En la antigüedad les llamaban quebrados y yo no sabía por qué, pero un día estaba jugando con mi hermanito ¿y qué creen que pasó? (finge lanzar el plato por el aire; los niños se ponen tensos. Después de varios simulacros, tira el plato y éste se rompe).

Niños.- ¡Ah! ¡Se rompió! (y otros comentarios similares).

MAESTRA.- Sí, pero ¿qué pasó?<

Niño.- Se despedazó, se hizo varios pedazos.

MAESTRA (tomando una taza).- Éste es un entero pero (rompe la taza lanzándola al aire a pesar de que los niños gritan pidiéndole que no lo haga).

MAESTRA.- Ahora es un quebrado. ¿Por qué es un quebrado?<

Niño.- Porque se desunen todas sus partes.

MAESTRA.- Estas partes son quebrados (muestra los pedazos de la taza).

En este episodio, la maestra ha hecho una demostración de la noción apoyada en objetos físicos. En ella recupera una de las dos grandes ideas que según Freudenthal pueden asociarse a la fracción: la de fracturador,¹³ la cual destaca incluso por el uso del término tradicional en español: *quebrado*. Pareciera que lo hace bajo la guía de dos viejos profesores, Julio Hernández y Aurelio López Orche, quienes recomendaban, en su *Instructivo para el maestro* de sexto grado, la presentación sugestiva de los conocimientos y desarrollar el sentido de la vista (y el oído), habida cuenta de que en muchos casos los niños no saben ver (ni oír) con la debida atención.¹⁴

Pero éste es apenas el inicio de la clase; con base en la idea de que el aprendizaje de las matemáticas transita por un camino que va *de lo concreto a lo abstracto*, idea de fuerte raigambre en los años sesenta, se ofrece en seguida una ostensión hasta cierto punto diferente:

• *Mostración gráfica del concepto*

MAESTRA.- Recuerden que al mostrar algo, lo estamos haciendo en forma gráfica (muestra un dibujo en un libro de texto comercial), con el dibujo representan una idea. Gráfica viene de *grafía*, que significa dibujo... ¿Pueden ustedes ver las ideas?<

Niños (a coro).- ¡No!

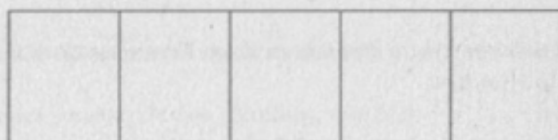
MAESTRA.- Bueno, pero las fracciones las podemos representar de diferentes maneras (y dibuja en el pizarrón círculos divididos en medios y tercios a

¹³ Véase H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*.

¹⁴ Véase J. Hernández y A. López Orche, «Aritmética y geometría», en *Mi libro y mi cuaderno de trabajo de sexto año. Instructivo para el maestro*, pp. 8-9.

la vez que va mencionado las partes representadas).

Tal ostensión parece no serle suficiente, ya que la siguiente actividad consiste en que un niño coma frente al grupo $\frac{5}{5}$ de un chocolate que viene dividido en cinco trozos de igual forma y tamaño; todos van contando los trozos que se come el compañero; luego la maestra dibuja en el pizarrón el chocolate dividido en quintos:



MAESTRA.- Esto que acabamos de hacer es como si lo estuviéramos haciendo gráficamente, pero no siempre voy a poder hacerlo así. Ustedes ya no son niños de primero y por eso les van a quitar los dibujos para ponerles números, pero ustedes empiezan a sufrir cuando les ponen números. Y en matemáticas se usan los números.

A juzgar por la última participación, la maestra es consciente de que las matemáticas constituyen un lenguaje simbólico que sus alumnos deben aprender; también de que tal aprendizaje es difícil porque implica una abstracción. Abstraer, según se entendía en los años sesenta, «es considerar aparte un elemento (cualidad o relación) de una representación o de una noción, interesándose especialmente por aquel y desechando el resto. La abstracción aísla, mediante el pensamiento, lo que no es posible aislar en la representación».¹⁵

Según la *pedagogía de lo concreto-abstracto*, la noción de fracción se elaboraría a partir de la percepción de imágenes de superficies (o de objetos) divididas en secciones. Porque «intervendría sobre las imágenes un proceso de abstracción gracias al cual se pasaría de éstas a la noción general de fracción: mediante eliminación de los caracteres secundarios como forma, color o materia... No se conservaría sino un núcleo esquemático de las diferentes imágenes, es decir, la idea de fracción».¹⁶

Una vez constituida la idea, la maestra se propone transitar a la expresión simbólica de los aspectos relacionales abstraídos: las partes en que se

¹⁵ C. Gattegno y otros, *El material para la enseñanza de las matemáticas*, p. 13.

¹⁶ H. Aebli, *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*.

divide el círculo se expresarán mediante el denominador; al número de partes coloreadas corresponderá el numerador, y la relación entre ellas se expresará con el formato a/b .

• Vinculación con las expresiones simbólicas

La maestra introduce los símbolos correspondientes y los asocia a las figuras dibujadas en el pizarrón, de acuerdo con diálogos como el siguiente:

MAESTRA (señalando un círculo dividido en dos).- Tenemos un entero, ¿en cuántas partes lo dividí?<

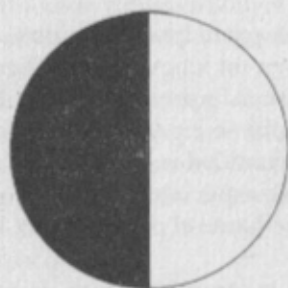
NIÑOS.- ¡En dos!

MAESTRA.- En dos (anota el número 2 bajo una línea horizontal, a manera de denominador).

MAESTRA.- ¿Cuántas [partes] quieres, Carlos?

CARLOS.- Una.

MAESTRA.- La parte que regalé [a Carlos] la coloco arriba de la línea (anota el 1 como numerador; el pizarrón queda así):



$1/2$

Observación de la investigadora: La maestra repite la ostensión; lo hace con tercios y con cuartos, en cada caso se asocian las figuras y los símbolos correspondientes.

Bajo la consideración de que el trayecto hacia el aprendizaje ha sido recorrido, ya que se ha tocado lo objetivo, lo gráfico y lo simbólico, la profesora transita a la fase en la cual lo aprendido toma carácter oficial.

Tercera fase: institucionalización

MAESTRA.- A continuación vamos a hacer ejercicios, pero antes les voy a dar unos conceptos de fracción. Saquen su cuaderno de conceptos... (la maestra dicta y los niños anotan):

Número fraccionario o quebrado

El número fraccionario es el que expresa una o varias partes iguales de la unidad.

Las fracciones constan de dos términos, que son:

$$\frac{1 \text{ numerador}}{2 \text{ denominador}}$$

Denominador: Nos indica en cuántas partes iguales se divide el entero.

Numerador: Nos indica cuántas partes iguales tomamos del entero

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4}$$

En el quebrado $\frac{3}{4}$ el denominador 4 indica que la unidad se ha dividido en cuatro partes iguales, y el denominador 3 que se han tomado solamente tres de esas partes.

Se dice primero el numerador y después el denominador. Si el denominador es dos, se lee medios; si el denominador es tres, se lee tercios (...). Si el denominador es mayor que diez, se añade al número la terminación *avo*.

Conforme a la didáctica instrumentada por la profesora esta última fase es fundamental, pues de aquí en adelante el trabajo con las fracciones versará sobre definiciones y expresiones simbólicas. En efecto, desde la perspectiva que se asume, las representaciones concretas se abandonarán una vez cumplida su función de crear una intuición.¹⁷ En principio, y conforme a las reglas establecidas en la clase, los niños aceptarán trabajar con los sustitutos de lo real —los símbolos— cuando se retomen las fracciones. Y efectivamente esto ocurrirá, aun cuando no sea cierto que la claridad

¹⁷ *Idem.*

propia de las formas gráficas utilizadas lo es también de las formas simbólicas correspondientes.¹⁸ Pero la costumbre (en el sentido de Balacheff) basta para que los niños respeten los límites de la actividad fijados por la profesora.

LA TRANSPOSICIÓN DE LA MAESTRA NIDIA: DE LA FRACCIÓN CON MÚLTIPLES SIGNIFICADOS A LA FRACCIÓN COMO PARTICIÓN DE LA UNIDAD

Como se ha visto, el contenido de enseñanza introducido por la profesora es la noción de fracción como *partición de la unidad*. La vinculación con tal noción se realizó mediante:

- Introducción ostensiva de la noción, en dos modalidades:
 - partición de *enteros* representados por tazas o platos rotos y un chocolate dividido en quintos (mostración objetiva);
 - representación gráfica de las fracciones mediante el dibujo de círculos divididos en dos, tres, cuatro, cinco... partes iguales (mostración gráfica).
- Asociación de las anteriores representaciones con simbolizaciones del tipo a/b .
- Registro, en el cuaderno, de las representaciones gráficas (dibujos de círculos divididos en partes iguales) y sus correspondientes simbolizaciones (expresiones de la forma a/b).

La noción de fracción que es posible derivar de tal actividad es la siguiente: la fracción es un número de la forma a/b en donde b representa las partes en que se divide el todo continuo y a las partes que se consideran.

Como ya he señalado, es una noción que ignora el texto de saber concretado en libros de texto y programas oficiales; para comprobarlo basta la lectura de una recomendación anotada en el libro del maestro:

Las fracciones y su operatoria deben seguirse trabajando a partir de sus distintos significados, es decir, deben proponerse problemas ligados a situaciones de reparto, partición, medición, razón y división, ya que se han incorporado los significados de razón y cociente. Al desarrollar las actividades se recomienda que los alumnos, en la medida

¹⁸ Véase L. Streefland, «Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción».

en que lo requieran, representen las fracciones y resuelvan los problemas utilizando objetos o dibujos, o haciendo mediciones reales.¹⁹

En sesiones subsecuentes ya no sería abordada la noción de fracción como tal. La siguiente sesión se dedicaría a repasar lo aprendido en esta clase y se trabajaría la idea de que las fracciones pueden clasificarse en propias (menores que la unidad) e impropias (mayores que aquella). Posteriormente, según nos dijo la profesora, la atención se ubicaría en las operaciones con estos números.²⁰

La maestra Nidia conocía poco la nueva propuesta curricular de quinto grado. Según su propio decir, no había incorporado en su hacer didáctico las innovaciones propuestas por la Secretaría de Educación. Y es que, a pesar de su relativa juventud, tiene un conjunto de concepciones y creencias bien estructuradas y estables acerca de cómo se aprenden y se enseñan las matemáticas, distante de las nuevas propuestas de enseñanza. Aún más allá, los aspectos de la fracción seleccionados por la profesora no son tampoco los que constituyeran novedad en los años setenta, a saber:

- La representación de las fracciones en la recta numérica.
- Algunos problemas donde la fracción se asocia a situaciones de reparto.
- Figuras distintas de los círculos o los rectángulos para representar la unidad.
- Los *todos* discretos (colecciones de objetos).²¹

La transposición realizada se identifica con las propuestas de los años sesenta y corresponde a una fuerte tradición en la enseñanza de las fracciones. Valgan, para justificar la afirmación, algunos fragmentos de una lección de ese período, en la cual se introducen estos números (véase figura de la siguiente página).

El significado asociado a la fracción en esta página es *la fracción como partición de la unidad*. De hecho, hay una correspondencia casi biunívoca entre las tareas y situaciones sugeridas por la profesora y las que aparecen en el texto:

- La presentación ostensiva del concepto.
- Los *todos* que sirven de base para hacer la partición son círculos o rectángulos en ambos casos.

¹⁹ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas quinto grado*, p. 22.

²⁰ Entrevista realizada al concluir la secuencia de clases analizada.

²¹ Al respecto pueden verse los libros de los distintos grados correspondientes a los años setenta.

FRACCIONES COMUNES Y NÚMEROS MIXTOS

En la ilustración vemos que cada parte del cuadrado es una cuarta parte del mismo; así como que cada parte del círculo abarca una tercera parte de éste. Las 4 cuartas partes del cuadrado forman el cuadrado entero, y las tres terceras partes del círculo forman el círculo entero (...)



El pan que se muestra en el dibujo está dividido en 8 partes, y cada parte es un octavo ($1/8$) del pan. Si comiésemos una de esas partes, ¿las siete sobrantes formarían el pan entero? No, pues faltaría la octava parte que hemos comido (...)



Las fracciones comunes, llamadas también quebrados, se escriben así:
 $1/2$, que se lee un medio, significa la mitad de algo.
 $1/3$, que se lee un tercio, significa la tercera parte de algo.
 $4/5$, que se lee cuatro quintos, significa las cuatro quintas partes de algo (...)



Recordemos lo aprendido en años anteriores:

1. Los términos que forman un quebrado se llaman numerador o dividendo, y denominador o divisor.

Numeradores: 8 3 5 7 3 1 67 Dividendos
 Denominadores: 9 4 6 8 7 6 121 Divisores

2. Si el numerador es menor que el denominador, $1/2$, $7/10$, $2/5$, etc., la fracción es propia, o bien quebrado propio.

- El pan dividido en trozos es análogo al chocolate dividido en cinco partes. Éste es un modelo útil para dar significado a la fracción porque, además de otras virtudes, vincula la noción con situaciones de la vida cotidiana, altamente valoradas en esta pedagogía.
- Aparece, en uno y otro caso, la denominación de las fracciones con el término *quebrados*.
- La insistencia en la denominación de cada uno de sus términos (numerador y denominador).
- El interés por definir las como *propias e impropias*.²²

En suma, para poner en relación a sus alumnos con las fracciones, la profesora ha seleccionado el significado y los aspectos correspondientes a una propuesta sustituida décadas atrás. Los límites de esta propuesta fueron claramente cuestionados con el ingreso de las innovaciones, pero la maestra parece no haberse enterado de dichos cuestionamientos.

²² En otra sesión de clase la observamos trabajar este tema, aun cuando fue eliminado en los programas de 1993.

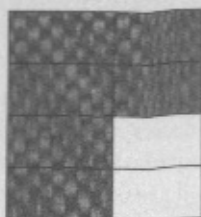
UN CONTRATO BASADO EN LA OSTENSIÓN

La profesora Nidia establece con sus alumnos un contrato que se actualiza día a día donde el compromiso de los estudiantes es dominar los saberes matemáticos institucionalizados, y el camino para alcanzar este propósito es observar las ostensiones de su profesora. La resolución de problemas puesta al centro del proceso educativo según recomendaciones oficiales o la interrogación sugerida décadas atrás fueron omitidas en la clase. Es una forma de actuar que tiene viejas raíces y que se conserva a pesar de reformas educativas radicales desde el punto de vista matemático o didáctico.

Al operar una reducción sobre el texto de saber oficial, la profesora autoriza una única vía de acceso a la noción de fracción. Los acercamientos personales no están oficialmente considerados y desde el inicio la relación se establece con la forma institucionalizada del saber. Puede pensarse que la simplicidad del concepto en juego no facilitaba la diversidad de acercamientos o estrategias, pero esto se debe a la limitada transposición del concepto realizada por la profesora, porque la investigación en didáctica nos ha enseñado lo contrario, baste con recordar que $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$ pueden referirse a fenómenos mucho más allá de la estrechez de la división de un círculo de papel: conjuntos discretos (la cuarta parte de la población...), expresión de una razón (proporción de azúcar y café vertidos en una taza...), un operador (obtener, considerando sus medidas lineales, una reducción al 25% de una figura cuadrada cuyo lado mide 28 cm), entre muchos otros. Adicionalmente, sabemos que la comparación, la ordenación o las transformaciones que podamos operar sobre los números es lo que los dotará de su significado cabal. Tales actividades no se realizaron.

La profesora actúa de otro modo, ella pretende poner ante los ojos de los niños todos los elementos implicados en la noción de fracción. Ella busca, mediante la ostensión, generar *intuiciones* para dotar de cierto significado a la noción y trabajar luego en el ámbito de la simbolización.

Tal forma de enseñanza tiene sentido bajo la consideración de que el aprendizaje de una noción es el resultado necesario (casi automático) de su percepción: tocar, ver, manipular, aunque según las concepciones que vuelve acto la profesora, la vista es la vía principal. En este marco, la prueba del saber (las fracciones) consistirá en hacer asociaciones adecuadas entre tres tipos de representación: la gráfica, la lingüística y la simbólica, como en el siguiente ejemplo:



= seis octavos = $6/8$

La concepción que sustenta esta acción didáctica se pone de relieve cuando, respondiendo a nuestras preguntas con un ejemplo de enseñanza de la ciencia, la profesora dice: «[los niños aprenden] manipulando, a través de experiencias, también con problemas de la vida diaria. El material didáctico es fundamental, yo te puedo hablar por ejemplo... de la hipófisis, y tú puedes decir sí, está en tal lugar, pero, ¿te la imaginas? A lo mejor puede ser de este tamaño [señala con los dedos], a lo mejor puede ser del tamaño de un chicharo, no puedes tú explicar algo que ellos no conocen, algo que no han visto».

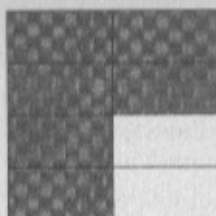
Es decir, para la maestra el conocer se vincula con el ver, pues abriga, como muchos profesores, una noción sensual-empirista del aprendizaje, y con base en ella organiza y gestiona sus clases.

PARA HACER APRENDER: REPETIR

En general, las respuestas demandadas por la profesora Nidia se refieren a formas institucionalizadas o a procedimientos convencionales previamente introducidos. En distintos momentos de la progresión didáctica las respuestas a dichas cuestiones se producen con fluidez, pocas veces el tiempo didáctico se detiene. Siendo este último el caso, se utilizan dos mecanismos para hacerlo progresar:

- Pasar la pregunta a otro niño.
- Reiterar la ostensión buscando que la respuesta se produzca; en tales intervenciones se repite prácticamente idéntico lo antes mostrado.

La profesora expresa así su percepción del asunto: para saber si aprendieron «les pregunto», y si no saben «me desilusiono un poco, porque no pude lograr una manera de mostrar el camino, [entonces] tengo que regresarme, es importante regresarme porque no puedes avanzar sobre cosas que ellos no saben [...] tienes que regresarte, a veces desde el principio, y volver a explicar».



= seis octavos = $6/8$

La concepción que sustenta esta acción didáctica se pone de relieve cuando, respondiendo a nuestras preguntas con un ejemplo de enseñanza de la ciencia, la profesora dice: «[los niños aprenden] manipulando, a través de experiencias, también con problemas de la vida diaria. El material didáctico es fundamental, yo te puedo hablar por ejemplo... de la hipófisis, y tú puedes decir sí, está en tal lugar, pero, ¿te la imaginas? A lo mejor puede ser de este tamaño [señala con los dedos], a lo mejor puede ser del tamaño de un chicharo, no puedes tú explicar algo que ellos no conocen, algo que no han visto».

Es decir, para la maestra el conocer se vincula con el ver, pues abriga, como muchos profesores, una noción sensual-empirista del aprendizaje, y con base en ella organiza y gestiona sus clases.

PARA HACER APRENDER: REPETIR

En general, las respuestas demandadas por la profesora Nidia se refieren a formas institucionalizadas o a procedimientos convencionales previamente introducidos. En distintos momentos de la progresión didáctica las respuestas a dichas cuestiones se producen con fluidez, pocas veces el tiempo didáctico se detiene. Siendo este último el caso, se utilizan dos mecanismos para hacerlo progresar:

- Pasar la pregunta a otro niño.
- Reiterar la ostensión buscando que la respuesta se produzca; en tales intervenciones se repite prácticamente idéntico lo antes mostrado.

La profesora expresa así su percepción del asunto: para saber si aprendieron «les pregunto», y si no saben «me desilusiono un poco, porque no pude lograr una manera de mostrar el camino, [entonces] tengo que regresarme, es importante regresarme porque no puedes avanzar sobre cosas que ellos no saben [...] tienes que regresarte, a veces desde el principio, y volver a explicar».

Puede verse que, según la profesora, la comprensión descansa en las buenas ostensiones y en el hecho de que las nociones sean repasadas y de nuevo explicadas. Tal concepción se corrobora cuando, después de que la profesora ha asociado las expresiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ con sus representaciones gráficas (fase de *Vinculación con las expresiones simbólicas*), un niño de nombre Alfredo señala no haber comprendido, entonces ella reitera la ostensión:

MAESTRA.- ¿Entendieron?

NIÑOS (la mayoría).- ¡Sí!

ALFREDO: Yo no entendí.

MAESTRA.- ¿No entendiste?

ALFREDO: No, no entendí.

MAESTRA (dividiendo en dos partes otra figura).- Fíjate, ¿en cuántas [partes] dividí?, en dos, pongo el dos aquí, debajo de la raya (luego dibuja un círculo dividido en tercios) ¿En cuántas partes lo dividí?<

NIÑOS.- En tres.

MAESTRA.- ¿Y dónde pongo el tres, arriba o abajo?<

NIÑOS. Abajo.

MAESTRA.- ¿Cuántas [partes] les gustaría tener?

NIÑO.- Una.

MAESTRA.- Una.

NIÑO.- No, maestra: tres.

MAESTRA.- Bueno, pues te las damos todas (dibuja las tres partes del círculo y anota $\frac{3}{3} = 1$). ¿Ahora sí ya le entendiste?

ALFREDO.- Sí.

En dos ocasiones escuchamos a la maestra preguntar: «¿Entendiste?» Con este acto parecía activar su memoria didáctica. En principio, esta memoria la obligaría a adoptar nuevas formas de presentación de los objetos matemáticos en función de los conocimientos provisorios alcanzados por sus alumnos. Pero, como se ve en el episodio citado, ante las dificultades de un niño le basta con repetir la ostensión previamente presentada. Es decir que si bien la maestra eventualmente solicita a sus alumnos índices para ponderar si su acción se mantiene en un nivel aceptable de efectividad, las respuestas que les brinda cuando la efectividad no es corroborada no buscan adaptarse a las representaciones provisorias o insuficientes de los estudiantes: ella se conforma con volver a ostentar, sin esforzarse por adaptar la ostensión inicial a requerimientos específicos que motivaron la solicitud. Convirtiéndose en repetición, las acciones regulatorias de la profesora mantienen la relación didáctica en un equilibrio precario que no tiende a mejorar ni a ampliar la comprensión. Este equilibrio pre-

cario, apenas en los límites de lo intelectual, es empero suficiente para que el contrato basado en la ostensión se haya vuelto habitual.

LOS LÍMITES DEL CONTRATO

Como se ha visto, la maestra Nidia no tiene por preocupación que sus alumnos transfieran sus conocimientos, que los expresen «en sus propias palabras» o que resuelvan problemas conforme a sus propios recursos, tal como las directrices oficiales lo proponen. Ella confía en la ostensión y la repetición. Y el tiempo didáctico no se detiene, la capacidad de responder a las preguntas docentes se pone de relieve cuando a primera hora, con las manos entrelazadas en la parte baja de la espalda, los alumnos repiten ágilmente lo que es una línea, o una fracción, o cualquier otra definición anotada en la libreta de conceptos.

Esta memoria no debe sorprendernos puesto que, además de la repetición, tiene en la base las intuiciones creadas mediante las ostensiones de la profesora. Según las explicaciones dadas por los autores de la también llamada pedagogía intuitiva, hay una opción más adecuada que la simple presentación de las fórmulas o los símbolos: justificar y hacer comprender, activar a la par que la memoria el razonamiento del niño. Y tal proceso, en esta perspectiva, se apoya en la ilustración de las nociones. Mediante este recurso, las simbolizaciones y las fórmulas son «resultado natural de todas las comprobaciones efectuadas».²³

En una y otra opción los ejercicios facilitarán la retención de lo aprendido. Pero cuando la ostensión (y el razonamiento que supuestamente permite) ha precedido a la simbolización, según las interpretaciones propias de esta pedagogía, la noción o fórmula «habrá sido comprendida, no será misteriosa, y la mente habrá puesto en juego sus propias fuerzas para asimilarla».²⁴ Lo más probable, cuando la enseñanza descansa en la simple verbalización, «es que se adquiera un saber no adaptativo, rígido, lo aprendido será válido sólo si la situación a la que se desee aplicarlo es idéntica al caso que ha servido para establecerlo».²⁵ En cambio, cuando los símbolos han sido acompañados de ilustraciones, constataciones y reflexiones, los alumnos desarrollarán su razonamiento y entenderán las matemáticas.

²³ J. Leif y R. Dézaly, *Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas*, p. 5.

²⁴ *Idem*.

²⁵ J. Leif y R. Dézaly, *Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas*.

Las afirmaciones de Leif y Dézaly, a la luz de las corrientes contemporáneas del aprendizaje, son verdades a medias. Porque aunque hemos visto la utilidad de las ostensiones de la profesora, el carácter rígido de éstas pone en tela de juicio la flexibilidad del conocimiento que puedan producir. Al parecer la maestra no se ha preguntado si eso que recitan ágilmente sus alumnos podrá ser utilizado en algo distinto que anotararlo en la libreta o decirlo ante la clase.

Ahora bien, creo poco probable que el horizonte delimitado por la reforma de los años noventa termine por hacer de tal interrogante una preocupación de la profesora. Como se expuso en la primera parte de este libro, hay quienes, seguros de la efectividad de su hacer docente —validada por el logro repetido del equilibrio didáctico—, se mantienen alejados de las innovaciones, aun con el paso del tiempo. Así, el equilibrio que la docente logra, por precario que sea, deviene elemento poderoso para creer en la efectividad de su acción porque, a fin de cuentas, le permite que la clase progrese, y sin sobresaltos.

La maestra Nidia parece no haberse dado cuenta, pero el cuestionamiento a la pedagogía ostensiva —formulado por Piaget al señalar el carácter activo del conocimiento— sería vehiculizado en los programas y libros de texto introducidos en 1993. En el siguiente apartado se aborda el encuentro, en las aulas, de estas dos pedagogías.

Características de la actividad matemática realizada en la clase de la profesora Nidia

	<i>Primera sesión</i>	<i>Segunda sesión</i>	<i>Tercera sesión</i>	<i>Cuarta sesión</i>
Contenido	Perímetro de polígonos regulares	Noción de fracción	Perímetro de polígonos regulares	Fracciones propias e impropias
Introducción ostensiva de la noción	Sí	Sí	No procede	Sí
Institucionalización del saber	Al inicio de la sesión	Al inicio de la sesión	Sí	Al inicio de la sesión
Resolución de problemas como vía del aprendizaje	No	No	No	No
Resolución de problemas como ámbito de aplicación	Sí, los que se plantean son rutinarios	No	Sí, los que se plantean son rutinarios	No
Resolución de ejercicios rutinarios	Sí	Sí	Sí	Sí
Mecanismos de regulación	Pasar la pregunta a otro niño Repetir la misma explicación	Pasar la pregunta a otro niño Repetir la misma explicación	Pasar la pregunta a otro niño Repetir la misma explicación	Pasar la pregunta a otro niño Repetir la misma explicación
Registro de la actividad	No se observa efecto Topaze	No se observa efecto Topaze	No se observa efecto Topaze	No se observa efecto Topaze

VIEJAS INTERPRETACIONES A NUEVAS PROPUESTAS

Capítulo 11

ENTRE LA COSTUMBRE Y LAS PRESIONES DE LA INNOVACIÓN. LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS EN PRIMER GRADO¹

INTRODUCCIÓN

El primer capítulo de la *Aritmética* de Rozán (1952), cuyo éxito llevó a la producción de numerosas reimpresiones, llevaba por título «Los números del uno al cinco»; el tercer apartado se titulaba «Los números del seis al diez». La secuencia didáctica elaborada para enseñar no sólo dichos números sino hasta el cien puede entenderse conociendo la propuesta para el uno y el dos:

El número uno.- El primer número es uno. El número uno se representa con la cifra 1. El grabado [que aparece en el texto] representa un niño, un clavo, un alfiler [...]

El número dos.- Uno y uno son dos. El número dos se representa con la cifra 2.

1 y 1 son 2 [la frase se acompaña con ilustraciones de una ficha de dominó].

El búho tiene dos orejas, dos ojos, dos alas y dos patas.²

Tradicionalmente, la enseñanza de los primeros números se ha resuelto a la manera de Rozán, la cual puede resumirse de este modo: siguiendo el orden de la serie numérica, el maestro o el libro muestran tantos objetos como correspondan al número que se quiere enseñar, y eventualmente los niños los pueden manipular; después se introduce el signo correspondiente

¹ Este capítulo fue publicado, con algunas modificaciones y bajo el mismo título, en la revista *Educación Matemática*, vol. XVI, núm. 2.

² J. E. Rozán, *Aritmética y nociones de geometría*, pp. 2 y ss.

a su representación convencional. Finalmente se hacen ejercicios para repasar con palabras y con signos el número de que se trate, tarea que Rozán también consideró. Luego la secuencia se repite para la enseñanza del siguiente número, el cual es introducido agregando una unidad al previamente enseñado. Esta forma de enseñanza, aquí un poco caricaturizada, sufrió algunas modificaciones con la introducción de las distintas reformas curriculares, pero la idea básica ha prevalecido en las escuelas: se trata de hacer entender, uno a uno y en el orden que aparecen en la serie, los números que sirven para contar.

Como antes vimos, en 1993 se introdujo en México una reforma de tipo constructivista cuya idea central consistía en promover un aprendizaje a través de la resolución de problemas.³ Conforme a esta nueva orientación, el papel central del profesor sería plantear situaciones problemáticas cuya resolución permitiese a los alumnos construir nociones matemáticas que no se le hubiesen comunicado con antelación. Con esta intención se generaron nuevos materiales para apoyar la enseñanza. Adicionalmente se impulsó —aunque con cierto retardo— un vigoroso programa de actualización y formación de maestros orientado por el mismo enfoque. Con todo ello se esperaba que las relaciones tradicionalmente establecidas en el salón de clases entre los alumnos, su profesor y el saber matemático se vieran sustancialmente modificadas. El alumno produciría su conocimiento como respuesta personal a una pregunta. En principio, el profesor dejaría de intervenir directamente, para que el alumno produjera efectivamente sus respuestas en función de la situación y no por sus exigencias.⁴ Esta forma de ver el aprendizaje de las matemáticas repercutió en las propuestas de enseñanza de los números: la presentación en el orden de la serie así como la mostración y la manipulación bajo dirección quedaban fuera de las acciones didácticas recomendadas.

En lo que sigue se analiza una secuencia de clase dedicada a enseñar y aprender los primeros números, que tuvo lugar unos años después de que la reforma había sido introducida. En la secuencia tiene presencia directa el libro de texto gratuito que da concreción a las ideas innovadoras.

Los libros de texto se postularon portadores de las nuevas ideas educativas. Su incorporación supone entonces la inclusión en la clase de elementos de la propuesta curricular impulsada:

³ Véase Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*.

⁴ Véase G. Brousseau, «Los diferentes roles del maestro» y «Le contrat didactique: le milieu».

- Nuevos contenidos de saber (ciertos aspectos de los contenidos han sido eliminados, otros se han subrayado).
- Nueva organización de los contenidos.
- Nuevas experiencias de aprendizaje.
- Nueva temporalidad en la institucionalización de los saberes.
- Nuevas formas de participación de los alumnos y el profesor.

Con la incorporación del texto, pues, el maestro se vería obligado a enfrentar la novedad de la reforma y a dar respuestas didácticas a partir de la transposición ahí plasmada. Sin embargo, sabemos que la incorporación de las propuestas constructivistas no ha sido fácil en las aulas⁵ y que los profesores usan los textos conforme a estructuras de pensamiento que en el límite dan lugar a reinterpretaciones totalmente alejadas de los objetivos originalmente planteados.⁶ Con ello —se ha llegado a afirmar—, la posible acción innovadora de dichos materiales se diluye en los salones de clases. En seguida se acota la validez de tales afirmaciones y se analizan la transposición las y relaciones didácticas a que da lugar la propuesta de enseñanza de los primeros números concretada en los materiales educativos distribuidos a partir de 1993.

UN VIEJO TEMA, UNA NUEVA TRANSPOSICIÓN: LOS PRIMEROS NÚMEROS MEDIANTE EL CONTEO

Una de las primeras tareas que enfrentan los profesores de primer grado es enseñar los números. Conforme al avance programático vigente, los objetivos iniciales relacionados con el tema buscan que el alumno:

- Utilice los recursos con que cuenta (percepción visual, correspondencia uno a uno, conteo oral) para comparar colecciones hasta de quince objetos.
- Afirme sus conocimientos sobre la serie numérica al utilizar el conteo oral para comparar, ordenar y crear colecciones hasta de quince objetos.
- Utilice la representación simbólica de los números hasta el nueve para comunicar cantidades.⁷

⁵ Véase A. Avila (dir.), *Evaluación cualitativa de las repercusiones de la reforma a las matemáticas en la educación primaria*.

⁶ Véanse, por ejemplo, A. Avila, «Los usos reconocidos de los textos de matemáticas» y A. Carvajal, «El uso del nuevo libro de texto de primer grado».

⁷ Véase Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*.

Estos objetivos son portadores de una importante novedad didáctica y, como se verá más adelante, modifican aspectos esenciales de la costumbre (en el sentido de Balacheff) en los salones de clases.

El enfoque de enseñanza del que se desprenden dichos objetivos se sustenta en estudios de orientación cognoscitiva realizados en las dos últimas décadas. Según estos estudios, los niños cuentan desde corta edad con conocimientos acerca de los números derivados de la información y las experiencias provenientes de su entorno cultural, a la vez que desarrollan en la interacción con éste importantes habilidades de conteo.⁸ Otro basamento del enfoque, muy emparentado con el anterior, está constituido por estudios didácticos (diseño y prueba de situaciones de enseñanza) realizados en Francia en las dos últimas décadas.

La postura piagetana postulaba que el número encuentra sus raíces en los sistemas de inclusión (jerarquía de clases lógicas) y las relaciones asimétricas (seriaciones). Según esta perspectiva, el número resulta de una síntesis de la seriación y la inclusión. Las explicaciones piagetanas tendrían un impacto notable en el nivel de la teoría; habrían también de eliminar del nivel preescolar el aprendizaje de la serie verbal y las prácticas tradicionales de conteo.⁹ De manera distinta a como lo entendió la postura piagetana, los estudios antes referidos afirman que el conteo es una estrategia privilegiada para acceder a los conocimientos numéricos; en tal perspectiva se aduce que la comprensión del número evoluciona como resultado de las experiencias de contar.¹⁰ Este hecho ha sido recuperado para construir situaciones didácticas y trayectos de aprendizaje escolar.¹¹

Posicionada en este marco, la nueva propuesta curricular mexicana reconoce los conocimientos numéricos con que los niños ingresan a primer grado y ha incluido situaciones-problema en las que el uso oral o escrito de los números constituye el recurso idóneo de resolución.¹² Específicamente se sugieren actividades que consisten en comparar, igualar, repartir o construir colecciones, a partir de los conocimientos previos y el uso de los recursos intelectuales personales entre los que se considera

⁸ Al respecto pueden verse los numerosos trabajos de K. Fuson y de R. Gelman, o los trabajos de síntesis de A. Baroody, *El pensamiento matemático de los niños*, y de M. Fayol, *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*.

⁹ Véase J. Rieunaud, *L'approche du nombre par le jeune enfant*.

¹⁰ Véase A. Baroody, *El pensamiento matemático de los niños*, pp. 109 y ss.

¹¹ Véanse, por ejemplo, J. Briand, *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, y YERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours préparatoire*.

¹² Véase D. Block y A. Álvarez, «Los números en primer grado, cuatro generaciones de situaciones didácticas».

el contar.¹³ También se propone utilizar la representación simbólica para expresar la medida de colecciones y comunicar cantidades, alejándose con ello de la escritura sin sentido de los símbolos numéricos.

Esta aproximación, aquí sólo esbozada, vino a sustituir a otra elaborada en los años ochenta una vez pasado el ímpetu de la matemática moderna. Cada nuevo número era presentado en relación con el precedente ($n+1$), como apuntara ya Rozán, aunque con algunas diferencias derivadas de las nuevas concepciones sobre el niño y el aprendizaje. Las orientaciones incluidas en el programa en relación con el número uno ponen de relieve la orientación asumida:

Objetivo: *Adquirir la noción de número uno y algunas de sus representaciones.*¹⁴

Actividades: [Que el niño]

Forme colecciones de muchos y pocos objetos.

Separe un objeto de cada colección e indique que es uno.

Dibuje cada uno de los objetos separados, escriba la palabra y el número junto a cada dibujo.

Encierre en un círculo colecciones de un elemento.

Coloree cada una de las colecciones que tienen un elemento.

Forme más colecciones de un elemento, dibuje cada colección y escriba el número 1 y la palabra *uno* junto a cada dibujo.¹⁵

La secuencia, similar para el resto de los primeros números, implicaba una actividad manipulativa realizada bajo estricto control por parte del profesor.¹⁶ A decir de sus autores, una diferencia importante entre la propuesta introducida en 1993 y las que le precedieron es precisamente la concepción de *actividad*: «no se trata ya de dictar al alumno instrucciones que guían su acción, sino de plantearle un problema que lo lleve a decidir las acciones que realizará».¹⁷

Entre las concepciones hasta aquí esbozadas desarrolla su acción didáctica la profesora cuyas clases se analizan enseguida.

¹³ Véase Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*.

¹⁴ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Primer grado*, p. 15.

¹⁵ *Ibidem*, p. 119.

¹⁶ Véanse A. Avila y S. García, *Paradigmas de enseñanza de las matemáticas. El siglo xx en México*, y D. Block y A. Álvarez, op. cit., «Los números en primer grado, cuatro generaciones de situaciones didácticas».

¹⁷ D. Block y A. Álvarez, «Los números en primer grado, cuatro generaciones de situaciones didácticas», p. 71.

LOS PROTAGONISTAS DE LA RELACIÓN DIDÁCTICA

La profesora que protagoniza los episodios de clase que en seguida nos ocupan tenía veinticinco años de servicio cuando aquéllos tuvieron lugar. Por lo general ha trabajado en los primeros grados de la educación primaria y, para ella, uno de los contenidos más importantes en matemáticas es «la lógica matemática». La principal labor del maestro en matemáticas, dice, es promover el razonamiento: «Antes que todo, un maestro dentro de su clase de matemáticas debe hacer que los niños razonen, antes que todo, ¿sí?»

Recientemente, la profesora ha asistido al taller para maestros titulado «La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria», que se ofrece en todas las direcciones de Educación Primaria del país.¹⁸ El curso aborda desde un enfoque afín al constructivismo los distintos contenidos de la educación primaria con el apoyo de materiales preparados para utilizarse de diversas maneras, en función de las preferencias y el tiempo de que se disponga: de forma individual, en grupos organizados con los colegas, mediante asesoría de personal de los centros de actualización. Este curso, según nos dijo la profesora, es el único vinculado a la enseñanza de esta disciplina que se cuenta en su historia de actualización docente.

Los niños a quienes imparte clases la maestra son aproximadamente treinta y van aseados y bien vestidos a la escuela. Se sientan en mesabancos dispuestos en filas y son inquietos y juguetones. La maestra, permanentemente, intenta controlar este ímpetu infantil.

UNA CLASE DEDICADA A LOS PRIMEROS NÚMEROS¹⁹

La sesión de clase se desarrolla teniendo como referente el libro de texto gratuito,²⁰ específicamente la lección «Un domingo en el zócalo» (inserta al final del capítulo), la cual tiene como objetivo de enseñanza la «Cuantificación y comparación de colecciones a partir de la información contenida en ilustraciones».²¹ Como se dijo antes, se trata de que los niños utilicen «sus propios recursos» para resolver las situaciones planteadas; el

¹⁸ D. Block, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*.

¹⁹ En esta clase, al igual que en el resto de las cinco observadas en el grupo, por petición expresa fue utilizado el libro de texto y el material propuesto por la Secretaría de Educación Pública.

²⁰ D. Block e I. Fuenlabrada (coords.), *Matemáticas primer grado*.

²¹ Secretaría de Educación Pública. *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*, p. 18.

conteo es un recurso necesario de resolución. Adicionalmente, los niños deberán utilizar los símbolos numéricos para expresar los resultados de su acción de contar.¹²

Fase introductoria. Control de la atención

Congruente con su formación pedagógica, para iniciar la sesión la maestra busca que los niños concentren la atención mediante ejercicios gimnásticos (suben, bajan o adelantan los brazos siguiendo el ritmo que la profesora marca); luego, se guardan cinco minutos de silencio porque, dice: «No es posible trabajar con niños que tienen la mente ¿en dónde?». Posteriormente, en la primera fase (que se analiza más adelante) se cuentan relatos acerca de parques y quioscos, ya que la lección los incluye. La forma que toma esta fase también revela las ideas previas de la profesora. Pero vayamos antes a lo medular de la sesión.

Segunda fase. Interacción con el objeto de saber a través del texto

Terminados los relatos de los niños, sin hacer ningún comentario sobre ellos, la maestra cambia el curso de la actividad introduciendo una pregunta:

MAESTRA.- A ver, amigos, observen muy bien y miren ahí en ese domingo, van a contar las cosas que hay en el dibujo mientras yo voy a salir un momentito. *¿Cuántas personas tienen sombrero?, cuéntenlas (los niños cuentan en sus libros, lo hacen individualmente; algunos comentan entre ellos: «cuatro», «cinco», «seis». La maestra dibuja en el pizarrón un sombrero de ala ancha, luego sale del salón pues la llama una madre de familia).*

Observación de la investigadora: *Mientras, los niños, que al parecer no ponen atención al dibujo hecho por la maestra en el pizarrón, anotan en su libro diferentes respuestas (4, 5 o 6); algunos comentan o comparan los resultados con los vecinos de banca u otros compañeros cercanos; parece que no les resulta del todo claro quién tiene la respuesta correcta. La maestra regresa.*

MAESTRA.- Vamos a ver... Omar, ¿cuántas personas tienen sombrero, cuántas personas que tienen sombrero contaste ahí en este dibujo?

¹² Conforme a J. Briand (*L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, p. 19), el conteo es el o los métodos efectivos de determinación del «cardinal» de una colección.

NIÑOS (*no sólo Omar contesta, al tiempo que él varios dan la respuesta*).- Cinco.
 MAESTRA (*dirigiéndose a todo el grupo*).- ¿Cuántas?

NIÑOS.- Cinco.

MAESTRA.- Vamos a escribir el número cinco abajo, en el primer enunciado (*se refiere al enunciado que aparece en el libro debajo de la ilustración; anota en el pizarrón, junto al sombrero dibujado*):

¿Cuántas personas tienen sombrero? 5

MAESTRA.- Ahora fíjense ustedes, si yo les digo: ¿Cuántas personas tienen gorrita? (*Dibuja en el pizarrón una gorra de policía*).²³

NIÑO.- ¡Maestra, ese ya se contó! (*Se refiere a que para responder la pregunta anterior ya contaron a la persona que trae una gorrita igual a la que dibujó la maestra en el pizarrón*).

MAESTRA.- No, no, no, ¿qué no saben ustedes lo que es un sombrero y lo que es una gorrita?<

NIÑOS (*varios al mismo tiempo*).- Yo sí, yo sí

MAESTRA.- A ver, ¿cuántas personas tienen gorrita?

NIÑA.- Una.

NIÑOS (*diferentes respuestas al mismo tiempo*).- ¡Seis! ¡Cinco! ¡Cuatro!

MAESTRA.- No oyen lo que estoy diciendo (...) Yo no dije sombrero y gorrita, yo dije: ¿cuántas personas tienen sombrero, sombrero, conocen el sombrero?<

NIÑOS.- Sí.

MAESTRA.- Entonces, ¿por qué contaron al policía que tiene gorrita?< (*el tono es de desaprobación*).²⁴

NIÑO 1.- Yo no lo conté.

NIÑO 2.- Ni yo.

Observación de la investigadora: (*Algunos borran la respuesta que habían anotado, otros ven el texto de su compañero de banca; hay confusión*).

MAESTRA.- A ver, vamos a ver, vamos a encerrar a la persona que está a la izquierda que está abrazando a la señora (*los niños buscan en el libro...*). Ahora hay que escribir el número uno junto (*se refiere a que lo escriban junto a la persona que acaban de encerrar*); pongan el 1 para numerar al señor (*los niños lo hacen*). Ahora busquen a la persona que está vestida de negro.

NIÑA.- ¡Ah, sí!, la que tiene...

²³ La pregunta sobre la gorra no aparece en el libro.

²⁴ En la ilustración en realidad aparece un cilindrero; su gorra, efectivamente, podría ser igual a la de los policías.

MAESTRA (*interrumpe a la niña*).- La que está al lado de una señora que tiene falda de bolitas (*los niños buscan en su libro*). ¿Ya?, a ese le ponen el número... (*el tono indica que deben completar la frase*).

NIÑOS.- Dos.

MAESTRA.- Ahora vamos a ver... uno de camisa de cuadritos. [Ponen] número tres al señor que está con la camisa de cuadritos.

Observación de la investigadora: *El conteo para obtener la respuesta «4 sombreros» continúa de una manera similar, el pizarrón queda así:*



¿Cuántas personas tienen sombrero?

1 2 3 4

Luego se busca la siguiente respuesta demandada en el texto:

MAESTRA.- ¿Cuántos niños están jugando pelota?, uno, dos... (*cuenta en voz alta, para que los niños la escuchen*) enciérrenlos primero [...] y ahorita les paso a revisar. (*Deja que pasen algunos segundos*). Omar, cuántos niños andan jugando pelota?

OMAR.- Dos.

MAESTRA (*cuenta sobre el texto para verificar la respuesta de Omar*).- Está bien, son dos.

Observación de la investigadora: *Algunos niños tienen una respuesta distinta de la de Omar (la ilustración se presta para responder 3), pero cuando la maestra aprueba la de éste, los demás borran y modifican la propia, sin más comentario o discusión.*

Las preguntas del texto se siguen respondiendo de la misma manera, bajo estricta orientación.

LOS TÉRMINOS DEL CONTRATO ESTABLECIDO

De acuerdo con G. Brousseau, «[en todas las situaciones didácticas] se establece una relación que determina —explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente— lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de cuál será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato».²⁵

Los papeles que se desempeñan en esta clase como resultado del contrato establecido son los que corresponden a una enseñanza clásica bastante radical. Conforme a este tipo de enseñanza, la maestra «motiva» (en ello invierte bastante tiempo y energía), luego indica lo que hay que hacer y cómo hacerlo. Las buenas o malas respuestas son definidas por ella, las estrategias e incluso el significado de las palabras también. Es responsabilidad docente indicar y controlar que las indicaciones se cumplan conforme a un cierto ritmo; también sancionar. Es responsabilidad de los alumnos atender, captar las indicaciones y actuar de acuerdo con las sugerencias recibidas, siempre en los tiempos determinados.

Las reglas de disciplina: la atención y el orden

Como hemos visto, las reglas en el grupo se mantienen conforme a la tradición. Las propuestas de las cuales son portadores los nuevos materiales —a pesar de estar presentes en el aula— parecen no perturbar oficialmente la costumbre: se exige atención (como sinónimo de mantener la vista fija en la profesora o en el pizarrón y, después, saber responder); en algún momento la maestra dice: «Te voy a parar, Israel, porque nada más estás viendo para los lados». «Te voy a mandar con la maestra Sonia» es otra frase que se pronuncia cuando algún niño está evidentemente distraído. Esto deriva de una concepción consistente en creer que una condición de posibilidad del aprendizaje es que los niños pongan atención al profesor. Detrás de esta convicción se encuentran otras: que el aprendizaje se sustenta en la transmisión y la ostensión; que el alumno tiene el papel de receptor; que la linearización de los contenidos facilita su adquisición, y, finalmente, que si ésta no se logra es porque los niños no ponen atención.

²⁵ G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, p. 209

Acercamientos libres sólo antes de abordar el contenido matemático

A pesar de la rigidez didáctica hasta aquí observada, al inicio de la clase la profesora intenta establecer un vínculo amigable con el tema, tal como registramos después de su intención de hacer concentrar la atención en la *fase introductora*.

MAESTRA.- Vamos a hacer un ejercicio muy bonito. Levanten la mano los niños que han ido a la Alameda (*los niños hacen ruido pues la pregunta los entusiasma*). Sin hablar, porque les aumento cinco minutos de silencio.

Observación de la investigadora: *Luego de hacer varias preguntas del mismo tipo, la maestra reparte los libros de texto de matemáticas, que tiene guardados en su armario, e indica abrirlo en la lección titulada «Un domingo en el zócalo». Se hace mucho ruido, pues parece que a los niños les gusta recibir su libro; a pesar de la solicitud de la maestra, siguen hablando y comentando cuestiones asociadas a la ilustración incluida en el texto.*

MAESTRA.- Aquí vemos un quiosco, esto es un quiosco, algunos niños que han ido a la alameda ya lo conocen; está muy bonito, hay música, mucha gente, sobre todo en los domingos. [...] A ver... Vamos a oír a Alberto, que Alberto nos cuente qué vio.

Observación de la investigadora: *Alberto, y posteriormente otra niña, relatan cuestiones vinculadas a lo que vieron e hicieron en la Alameda de la ciudad de México y en el zócalo de Toluca, lugares a donde fueron de paseo; los compañeros se ven muy interesados en sus relatos. Hacen algunos comentarios.*

Como se aprecia en el registro, la maestra acepta distintos puntos de vista a partir de lo que se observa en las ilustraciones del texto; incluso solicita que estos puntos de vista se expresen. Dice, por ejemplo: «Vamos ahora a escuchar a Alberto», y con esta frase da paso a una participación bastante libre. Sin embargo, esta forma de interacción está acotada, se permite sólo mientras no se aborda el contenido matemático, y aun en la fase autorizada hay límites: si la libertad de expresión genera lo que la maestra considera indisciplina, entonces la libertad termina: «Sin hablar, porque les aumento cinco minutos de silencio» (inicio de la primera fase).

Valga un desvío para agregar apoyo a la afirmación anterior. En una sesión dedicada a elaborar gráficas de barras, los niños, a petición de la maestra, dicen los nombres de las frutas y verduras que aparecen en una ilustración del texto; se genera mucho ruido porque las frutas no se mencionan en el mismo orden ni al mismo tiempo, luego los niños comienzan a intercambiar impresiones entre ellos. Entonces, la profesora golpea el escritorio en señal de que es necesario guardar silencio y poner aten-

ción; después dice: «¡Todos iguales!», y pone en marcha una estrategia para que los niños identifiquen las frutas y verduras, de manera ordenada. La estrategia consiste en señalar con el dedo la fruta que ella va mencionando.

Éste es un cambio drástico en las reglas definidas para la primera parte de las clases, en la cual la costumbre permite la libre participación. Pero es que los niños no respetaron los límites que a la maestra le resultan tolerables, quizá porque aún los desconocen. Cabe, sin embargo, preguntarse: ¿por qué en un esquema en que la disciplina, el orden y la atención son esenciales, la maestra promueve este tipo de interacción?

El acercamiento libre como motivación

El acercamiento libre propuesto por la profesora tiene un objetivo principalmente motivacional, acorde con las ideas clásicas de que la primera fase de la sesión debe dedicarse a despertar el interés de los alumnos, pues con ello se concentrará la atención.²⁶ En efecto, a la maestra le gusta motivar a los alumnos permitiéndoles contar historias o hacer comentarios sobre las láminas que presenta el libro de texto;²⁷ como antes vimos, se cuentan historias de los parques conocidos (en la lección dedicada a gráficas de barras se platica acerca de lo que a cada uno le gusta comer; en otra relativa al circo se refieren las veces que se ha asistido a una función circense...). En lo que pareciera una respuesta a las máximas de Comenio en su *Didáctica magna*, la maestra promueve lo anterior «para que los niños se interesen» o «para que lo relacionen con la vida real», pues ésta es considerada una buena forma de motivar: así lo predicaban los grandes pedagogos mexicanos que por muchos años se leyeron en las escuelas normales.²⁸ En virtud de lo anterior, este tipo de participaciones se abandona cuando ha sido cumplida su función motivacional.

Lectura dirigida de las ilustraciones

La libre interpretación de los textos y las ilustraciones termina cuando se inicia oficialmente el *vínculo matemático* con el *contenido de saber*.²⁹ A partir de la segunda fase de la sesión presentada, la lectura libre es desauto-

²⁶ Véase, por ejemplo, R. Ramírez, *Técnica de la enseñanza*.

²⁷ En otras sesiones en que se trabaja a partir de las ilustraciones del libro de texto, el esquema se repite.

²⁸ Véase, por ejemplo, R. Ramírez, *Técnica de la enseñanza*.

rizada. El formato de frase que utiliza la docente en el contacto con la ilustración, una vez que se establece formalmente el vínculo matemático previsto, es el siguiente: «Aquí vemos...» (primera fase). Este formato se repite en las otras sesiones: «Hay muchas...» (clase dedicada a la lección «El circo»), «En la parte de abajo vemos...» (clase dedicada a la lección «La papelería»). Con estas frases la profesora pretende dirigir la acción intelectual de los niños sobre el texto y cierra oficialmente el paso a las lecturas y las interpretaciones personales. Se ve en ello una intención más allá de la simple guía. Se trata de controlar las acciones intelectuales sobre la situación.

LA RELACIÓN CON LOS PRIMEROS NÚMEROS

Del conteo con base en estrategias personales a la escritura de series numéricas bajo dirección

El contrato didáctico no sólo regula las interacciones entre el profesor y los alumnos, sino también la relación que éstos mantienen con el saber, y establece derechos y obligaciones de unos y otros en relación con cada contenido escolar.³⁰ En la clase se ha utilizado un nuevo material curricular, promotor de una cierta relación con el saber: cuantificación de colecciones y uso de los símbolos numéricos para expresar los resultados de la acción de contar. Para un niño de seis años, esta tarea no es trivial. Las aportaciones de diversos investigadores han mostrado que su realización exitosa implica la coordinación de distintas competencias regidas por otros tantos principios:

- El principio de correspondencia término a término entre los objetos contados y los nombres de los números.
- El principio de orden estable, según el cual la serie numérica corresponde a una secuencia fija.
- El principio de abstracción, que estipula que la heterogeneidad de elementos de una colección no tiene ninguna incidencia sobre la enumeración.
- El principio de la no pertinencia del orden, que corresponde al hecho

²⁹ Llamo *vínculo matemático con un contenido de saber* al que se da cuando la intención específica es lograr un aprendizaje matemático, ya sea procedimental o conceptual.

³⁰ Véase Y. Chevallard, *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.*

de que el resultado de la enumeración no se ve afectado por el punto en que se inicie el conteo.

- El principio de cardinalidad en virtud del cual, durante la actividad de enumeración, el último término corresponde al cardinal de la colección.³¹

Adicionalmente, durante el conteo, los niños deben saber marcar el límite entre lo ya contado y lo que falta por contar. Pero el trabajo cognitivo puede ir más allá: es posible que se presenten situaciones donde ellos deban determinar la colección por contar.³²

El dominio y la coordinación de todas estas habilidades constituyen para los niños una real conquista intelectual que justifica el interés por promover su desarrollo en primer grado. Sin embargo la profesora, en su interpretación, impone modificaciones y limitaciones severas a las innovaciones didácticas. Durante la realización del conteo define:

- La colección a contar (la persona con gorrita no forma parte de la colección «personas con sombrero»).
- El orden y la estrategia con que han de enumerarse los elementos de los conjuntos («primero el señor que está abrazando a la señora, luego el que está vestido de negro, luego...»).
- La forma de registro del conteo («encerramos en un círculo, le ponemos junto el 1, le ponemos a éste el 2, a éste el 3...»).

Paralelamente, se va anotando en el pizarrón la serie numérica: 1, 2, 3, 4...

Estas acciones no corresponden a la relación con el *saber* oficialmente propuesta. Se hace énfasis en aspectos del objeto de saber en juego distintos de los sugeridos en los materiales oficiales: la escritura de los números y el orden en la serie numérica. A la inversa, se disminuye al menos en la red primaria³³ el acento en la exploración de las colecciones (en el sentido de Briand),³⁴ en las estrategias de conteo que los niños pudiesen elaborar y en la utilización de los símbolos numéricos como recurso para comunicar los resultados del conteo. Se autoriza la libre opinión en cuestiones que no ponen en riesgo la precisión y unicidad del contenido ma-

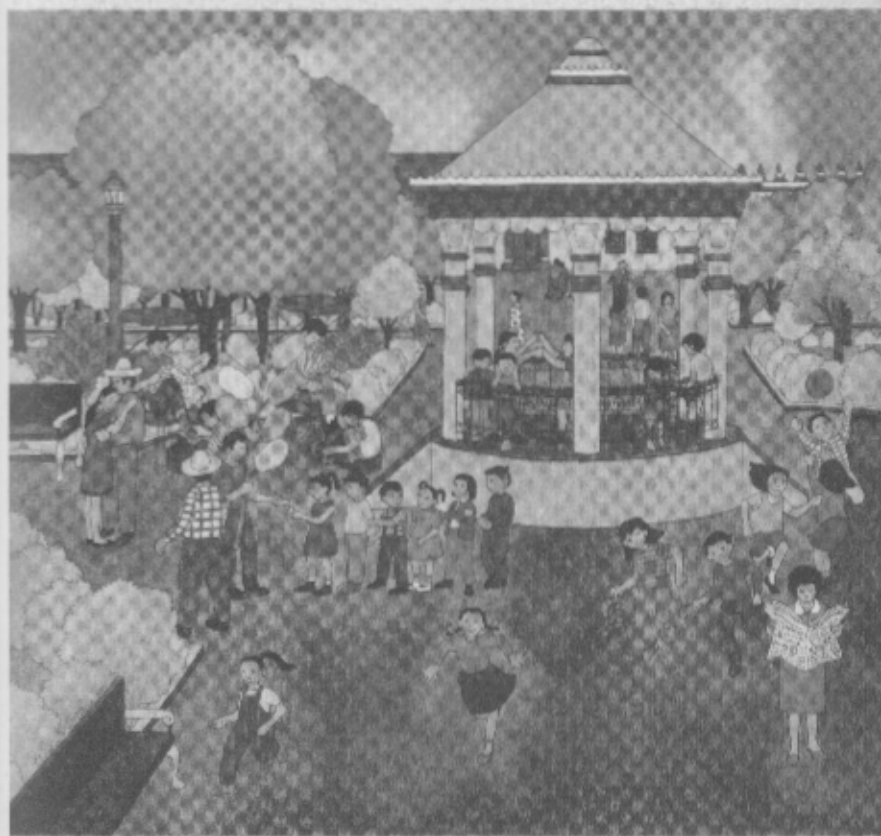
³¹ Gelman, cit. por M. Fayol, *L'enfant et le nombre*, p. 66.

³² Véase J. Briand, *L'énumération dans le mesurage des collections* y «Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques».

³³ Recuerde el lector que, según R. Sirota, la red primaria de comunicación es aquella en la que participa directamente el profesor.

³⁴ J. Briand, *L'énumération dans le mesurage des collections*, pp. 7 y ss.

Un domingo en el zócalo



¿Cuántas personas tienen sombrero?

¿Cuántos niños están jugando a la pelota?

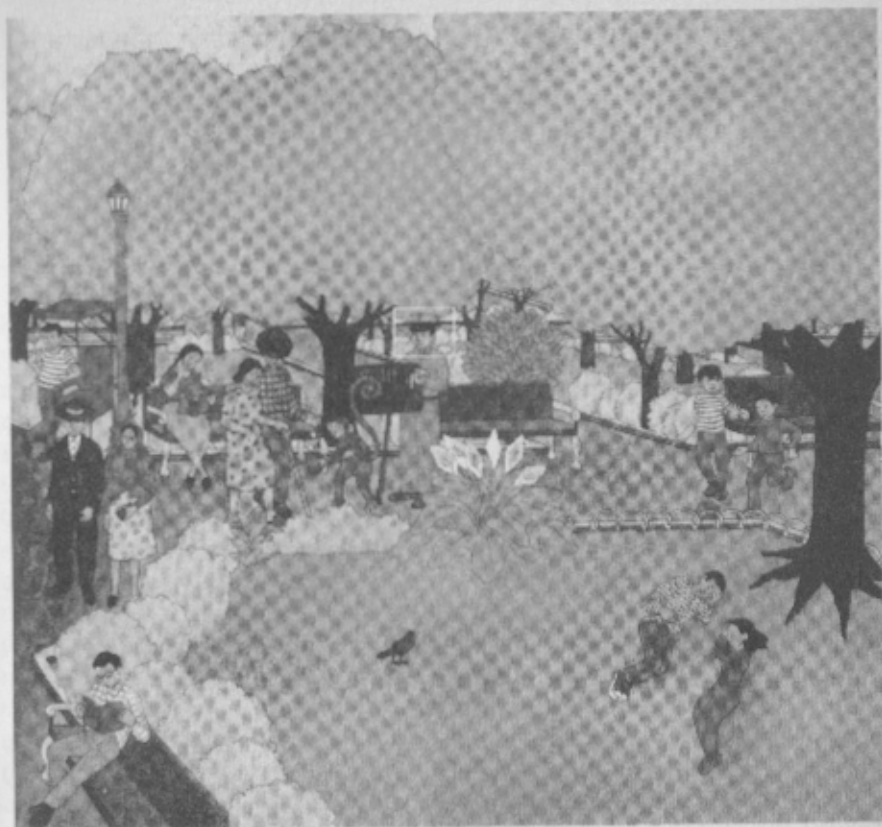
temático. Al vincularse a éste, en cambio, se limita la lectura libre del texto y se definen formas específicas de acercamiento. Así, al iniciar el trabajo de *conteo*, y después de permitirse inicialmente un acercamiento libre que produce distintas respuestas, se plantean varias restricciones a la lectura de la ilustración; la tarea que de la lectura deriva es también severamente acotada.

En otras palabras, con base en cierta perspectiva de enseñanza y de aprendizaje y la costumbre instalada en el salón de clases, se ha convertido en un saber institucionalizado objeto de transmisión, lo que, según el nuevo texto del saber, es un conocimiento personal: la determinación de una colección, así como las estrategias para contar y para controlar la validez de los resultados. La única relación oficialmente permitida con el objeto de saber es la que la docente decidió.

SÓLO UNA RESPUESTA, O LA NECESIDAD DE ASEGURAR EL CUMPLIMIENTO DEL CONTRATO

En los primeros momentos de realización del conteo, y en un acto que parece más un descuido que una voluntad de devolución, la maestra no obstaculiza la exploración y determinación de la colección ni define las estrategias que seguirán los niños para obtener el cardinal correspondiente (el número de personas con sombrero) y quedan libres para obtener la respuesta a la primera pregunta de la lección. Sin embargo, no todos obtienen la misma porque determinaron una distinta colección (algunos consideraron al señor con la gorrita y otros no). La maestra se percató de que el acercamiento libre puede producir diversos resultados y decide hacer patente su presencia. En este momento, las reglas del contrato acostumbrado reaparecen e incluso se endurecen, pues la responsabilidad que asume entonces es definir no sólo la respuesta correcta, sino también la estrategia precisa para obtenerla.

En efecto, los niños podían dar con facilidad las respuestas a las preguntas planteadas en el texto, pues las interacciones en la red paralela alternadas con las exigidas por la profesora dejaban ver sus habilidades de conteo. Pero bajo la suposición de que las respuestas podían ser erróneas, la maestra incorpora un mecanismo para prevenir nuevos desequilibrios didácticos: *definir la estrategia de resolución y la respuesta correcta*. A partir de ese momento, los niños ya no intentan expresar públicamente las respuestas que obtienen mediante el conteo, sólo anotan las que la maestra señala como correctas. Se trata de esperar a escuchar la respuesta que ella da por buena para luego registrarla o corregir la propia. Ahora, muchas respuestas no aparecerán. Los niños, que aprenden matemáticas a la vez que



¿Cuántas personas están leyendo?

¿En dónde hay más niños, arriba del kiosco o abajo?

los términos del contrato, cuidarán bien de escuchar antes de hablar.

La maestra, adelantándose a posibles respuestas incorrectas, creó las condiciones para que la actividad se desplazara al ámbito no intelectual.

LA REGULACIÓN DEL EQUILIBRIO DIDÁCTICO

Conforme a G. Brousseau, la acción del profesor no consiste únicamente en establecer un contrato y mantenerlo «cueste lo que cueste». En la relación didáctica, el profesor se manifiesta también por la elección, la ruptura y la sustitución de contratos siguiendo índices de regulación que condicionan la evolución de la relación y permiten mantenerla en un ámbito de eficacia aceptable.³⁵

Sobre la base de las reglas impuestas en la clase, la pérdida de eficacia y con ella la necesidad de regulación la marca un niño que dice: «La gorrita ya se contó». Tal participación es suficiente para que la profesora considere la existencia de un desequilibrio en la relación y busque resolverlo, y lo hace tomando bajo su control la determinación de la colección y las estrategias de obtención del cardinal correspondiente. A partir de ese momento, las regulaciones ya no serán necesarias porque sobre la base de un contrato notablemente estricto, las respuestas no deseadas no emergerán; la forma de conseguir que sólo aparezcan las esperadas será indicar la manera de obtenerlas. Es un caso extremo de pérdida de libertad.

LAS CONSECUENCIAS DEL CONTRATO EN EL APRENDIZAJE POSIBLE

Las reglas del contrato tienen consecuencias sobre los aprendizajes. Hay momentos en los que como resultado de las reglas establecidas, no aparecen respuestas correctas como tales y se bloquea la posibilidad de nuevos aprendizajes. Es el caso de la pregunta: «¿Cuántas personas con sombrero hay en el dibujo?» Veamos esto con detenimiento.

La expresión más genérica de *sombrero* es, según el diccionario *Larousse*, «prenda de vestir que sirve para cubrir la cabeza». Y en tal diccionario esta misma definición corresponde a la de *gorra*. Si bien la diferenciación puede hacerse por la costumbre (generalmente se habla de sombrero para referirse exclusivamente al de ala ancha), no era inadecuado que muchos niños hayan considerado los términos como equivalentes. De ahí que se

³⁵ Véase G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques».

hubiesen obtenido al menos dos respuestas diferentes en el ejercicio: «4 personas» y «5 personas» con sombrero.

Esta situación podría haber dado pie a una discusión en dos sentidos:

- El significado de las palabras.
- La relatividad de las respuestas obtenidas (según la interpretación que se hubiese hecho del término sombrero).

Un acuerdo final acerca de la validez de una u otra respuesta pudiese haber sido resultado de una discusión que integrara los dos asuntos.

Podría haberse realizado una acción similar en torno a los distintos aspectos del conteo, por ejemplo, la determinación de la colección —¿A quiénes consideramos dentro de la colección?—, de lo ya contado y lo que falta por contar —¿Cómo se aseguraron de que no dejaron nada sin contar, y que no contaron a ninguna persona más de una vez?—, también de las formas eficaces de registro.³⁶ Pero el contrato establecido no acepta significados ni formas de solución diversos. Tampoco la discusión. En este marco, las respuestas diferentes son errores, no interpretaciones posibles o motivo para la discusión. Se ven aquí las consecuencias intelectuales de una cierta forma de entender la relación didáctica, también las matemáticas. Una cuestión que la maestra señala a este último respecto es la siguiente: «Es muy importante para mí la definición, el concepto, ¿no? Para que ellos se centren en un conocimiento, por decir algo, que no divaguen tanto [...] Y sí es importante porque si no en verdad que sí divagan y tarda el niño en comprender, en conceptualizar su aprendizaje, su conocimiento».

Se ven también los límites severos que la profesora, probablemente sin saberlo, impone a la actividad intelectual de los alumnos.

¿SE HA CERRADO EL PASO A LA INNOVACIÓN? O LAS POSIBILIDADES DE RUPTURA DEL CONTRATO

La interpretación que la profesora hace de la propuesta oficial está sustentada en una perspectiva en la cual las matemáticas son un saber preciso que debe traducirse en formalizaciones y simbolizaciones, y su aprendizaje se basa en la atención, la disciplina, la dosificación lineal y la guía devota del profesor. Esta idea la lleva al tema de los números: la importancia de la serie y su escritura, en demérito de la utilización de la enumeración y el conteo. Desde este marco no es posible transferir a los alum-

³⁶ Gelman, cit. por M. Fayol, *L'enfant et le nombre*.

nos la responsabilidad del aprendizaje, conforme lo promueve el currículum oficial.

Pero si bien en la red primaria las estrategias divergentes y la discusión entre compañeros no tienen lugar, en la red paralela ocurren, aunque precariamente, intercambios en torno al contenido matemático. Por ejemplo, cuando había confusión porque la maestra definía y pretendía controlar las estrategias de conteo, la opción natural que encontraban los niños para aclarar la tarea era observar lo que había hecho el compañero y la respuesta a que había llegado para luego compararla con la propia; en algunos casos mediaban nuevos conteos o comentarios sobre los resultados. Y si bien tales intercambios no se dieron de manera oficial, la posibilidad de que esto ocurra queda abierta. Esto último es lo que comprobamos en una clase aún vinculada con los primeros números y el conteo, en la cual los alumnos lograron ganar la partida a la profesora cuando ésta pretendía promover conforme a la costumbre una lectura controlada del texto. Veamos en seguida lo que ocurrió en esa clase.

Una consigna escasamente atendida

MAESTRA.- Bueno, vamos a hacer compras hoy [...] Pero primero vamos a la papelería.

Observación de la investigadora: *Los niños tienen sobre su mesa su libro de texto, la palabra papelería es el indicador de la lección que deben buscar. Unos buscan individualmente, otros en intercambio con los compañeros; todos logran encontrar la lección.³⁷ Una niña, a petición de la maestra, explica a los demás «lo que tienen que hacer», pero hay mucho ruido en el salón, por eso en la grabación no se escucha textualmente la explicación que da la niña a sus compañeros.*

MAESTRA.- A ver, aplauso a su compañera.

NIÑA (que en ese momento pone atención).- ¿Por qué?

MAESTRA.- Porque ya sabe lo que hay que hacer, un aplauso.

Aplausos, luego vuelven a hablar, hay mucho ruido.

MAESTRA.- A ver, a ver (tratando de controlar la atención. Los niños no la atienden) En la parte de abajo vemos... (Continúa el ruido).

Observación de la investigadora: *La maestra solicita a otros niños explicar qué deben hacer sobre el libro, pero responden en medio de un gran barullo; casi nadie pone atención, pues parece que ya todos entendieron lo que hay que hacer en el texto y muchos ya están haciendo el ejercicio.*

³⁷ Véase la lección inserta al final del capítulo.

MAESTRA.- Vamos a ver...

NIÑO.- Yo ya le entendí (y continúa viendo el texto; prácticamente nadie pone atención a la maestra).

La toma de la responsabilidad

MAESTRA.- Ya no les doy indicación porque (incomprensible en la grabación debido al ruido), nada más les voy a pedir un favor, vamos a nombrar todo lo que está arriba y ya (se refiere a los artículos que aparecen con sus correspondientes precios al principio de la página), vamos a contar, una...

Observación de la investigadora: Pero los niños ya están respondiendo el ejercicio del libro y no ponen atención a la petición de la maestra, quien ya no insiste y los deja trabajar.

La actividad consiste en contar y encerrar en un círculo tantas monedas de un peso como hagan falta para comprar cada uno de los artículos de la papelería, que cuestan entre dos y nueve pesos. Durante la actividad, muchos niños trabajan en parejas o con los compañeros cercanos, al menos para intercambiar y comparar sus respuestas. A estas alturas, la actividad de la maestra consiste sólo en acercarse a ellos y hacer preguntas del tipo: «¿Tú qué compraste?» o «¿Te alcanzó para todo eso?»

Según nuestro registro, muchos niños tuvieron dificultades para hacer el ejercicio de acuerdo con las indicaciones del texto, pero otros lo hicieron correctamente, algunos comentan sus respuestas o sus estrategias a los compañeros. Tres de los intercambios registrados son los siguientes:

Niña 1 (a la observadora): Aquí yo ya le entendí, mira, por decir, aquí hay cuatro monedas, esto [el compás] cuesta cuatro, pues lo compro, ¿no? Y, aquí, ésta [la pluma] cuesta tres, pongo uno, dos, tres monedas (va señalando las monedas) y lo compro; si ésta cuesta siete pesos tengo que hacer más dibujo (se refiere a encerrar más monedas).

...

NIÑA.- ¿Qué vas a hacer?

NIÑO.- Las voy a contar, este, las monedas y las encierro.

NIÑA.- ¿Y cuántas vas a encerrar?

NIÑO.- Nueve.

NIÑA.- ¿Por qué?

NIÑO.- Por la mochila.

Observación de la investigadora: La niña comienza a trabajar sobre su libro.

...

NIÑA 1 (*ha dibujado, como respuesta al último ejercicio, el cuaderno y la mochila cuyos precios suman \$14; según el ejercicio sólo hay diez monedas de un peso para encerrar; espontáneamente, dice a la observadora*): Dibujé el cuaderno.

OBSERVADORA.- ¿Cuánto cuesta?

NIÑA 1.- Cinco.

NIÑO (*espontáneamente*).- ¡Y la mochila nueve! (*como indicando que hay error*).

NIÑA 1.- ¡Ay!

Observadora.- ¿Cuánto es lo que gastaste?

NIÑA 1 (*pensativa, no responde*).- A ver (*en actitud de ver el libro de una compañera cercana*).

NIÑO 2.- No, dijo la maestra que no lo tenía que enseñar.

Observación de la investigadora: La niña 1 borra, luego inicia un nuevo intento.

Los intercambios, aunque tal vez modestos, resultan importantes. Muestran que los niños tienen recursos intelectuales para interpretar adecuadamente las situaciones planteadas y resolverlas sin la dirección de su profesora. En efecto, se observan acciones de conteo, de comparación de números, de estimación de faltantes... Los intercambios también revelan la posibilidad de ayuda entre los niños y de un manejo de los errores distinto del acostumbrado por su profesora.

Cuando la maestra advierte que la mayoría terminó el ejercicio, cambia abruptamente de actividad y les solicita iniciar otra con un rompecabezas. Luego salen a recreo. La actividad realizada en «La papelería» no se retoma en la red primaria con fines de validación o de institucionalización. ¿Será que se anticipaba nuevamente una diversidad de respuestas y con ello un nuevo conflicto didáctico? Es probable que sí.

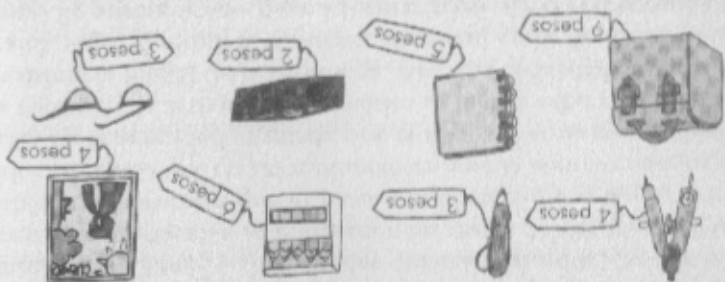
A MANERA DE CONCLUSIÓN

Rozán no inventó la pedagogía del $n+1$, sólo sintetizó, como hicieron otros autores, el sentido pedagógico común propio de su tiempo. Esta pedagogía orienta todavía la acción didáctica de muchos profesores, como la que aquí referimos. Con ello el conteo bajo control, así como la serie numérica y su escritura, elementos emblemáticos de viejas propuestas, prevalecen sobre los acercamientos libres y la exploración.

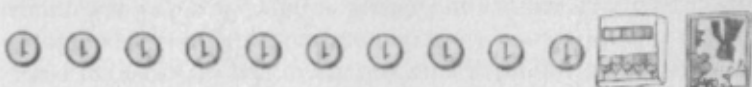
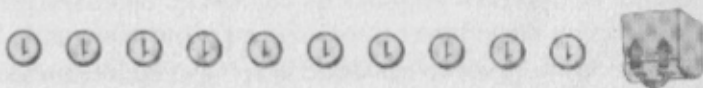
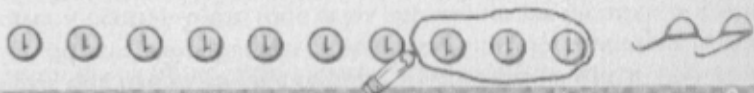
En la maestra observada, quizá como en muchos otros, parece no ha-

ber interés por alterar tal forma de entender los números y su enseñanza; ella nos dice: «Me gustaría más que el libro se centrara en escritura, unidades, decenas y centenas, pues sólo trae *como antecedentes* [para esos conocimientos]». Tampoco se observa motivación por modificar la costumbre establecida, ni aun con la presencia de los materiales portadores de la innovación. Ante las dificultades didácticas producidas por las situaciones en ellos planteadas, se endurecen las reglas del contrato habitualmente establecido. Pareciera que el paso a la innovación está por completo cerrado. Sin embargo, en un momento en que la atención de los niños está puesta en la actividad sugerida por el texto, el contrato establecido sufre una ruptura y la actividad matemática se lleva a cabo libremente, aun con la resistencia inicial de la profesora. Así, una actividad realizada en la red paralela —que fractura la supuesta identidad entre tiempo de enseñanza y tiempo de aprendizaje— pasa a formar parte de la red secundaria debido a *presiones* de los niños motivadas por la situación planteada. Conforme a las reglas que habitualmente regulan la actividad en este grupo, es una situación de excepción. Pero es también una situación que tiene posibilidad de volver a ocurrir, sobre todo si las situaciones problemáticas que se presentan a los niños cumplen con ciertos atributos. Se observa aquí el valor, a veces menospreciado, de la presencia de los libros de texto en la clase.

La papelería de la esquina



¿Cuántas monedas se necesitan? Enciérralas.



¿Qué puedes comprar con estas monedas? Dibuja.



A LA BÚSQUEDA DE NUEVOS CONTRATOS

Capítulo 12

UN CONTRATO DE *DEVOLUCIÓN DOSIFICADA*. EN TORNO A LA DIVISIÓN

INTRODUCCIÓN

Dice Michèle Artigue que la organización didáctica puesta en marcha por muchos profesores, y que parece ser estable en sus clases, se sitúa en las antípodas de las ingenierías didácticas elaboradas en el marco de la teoría de situaciones y luego transferidas al sistema educativo. Dice también esta investigadora: «no nos sorprendemos de verlas tan poco explotadas. La distancia entre las dos organizaciones didácticas es demasiado grande, la asimilación es imposible».¹

Estas afirmaciones, elaboradas sobre la base de estudios en escuelas francesas, se ajustan bien al caso mexicano, al menos para algunos temas del currículum. Muchos de los problemas y situaciones didácticas sugeridos a partir de 1993 contienen elementos demasiado alejados de las concepciones y las posibilidades didácticas de muchos profesores. En las páginas siguientes veremos cómo, mediante una organización didáctica que he llamado *devolución dosificada*, se reduce la distancia entre la enseñanza mediante resolución de problemas y la acción del profesor que la implementa. Esta reducción, derivada de ajustes en los tiempos de libertad otorgados a los niños y acompañada del control de las condiciones de realización de las tareas, se muestra como vía posible de incorporación de la enseñanza mediante resolución de problemas en la escuela. En seguida nos introducimos en el grupo donde tienen lugar los acontecimientos.

¹ M. Artigue, «Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica para afrontarlos?», p. 17.

PREPARACIÓN (EMOCIONAL) PARA LA TAREA

Los niños de tercer grado entran al salón de clases con gran alboroto; una vez que guardan silencio, su joven profesor pide a un niño dirigir lo que parece una rutina diaria. El niño designado pasa al frente y dice a los demás: «Cierren sus ojos —los niños cierran los ojos y se ponen de bruces sobre la mesa—. Vamos a imaginarnos que viene un rayo de algún otro planeta, que entra en nuestra cabeza y que vamos a ser más sabios y más inteligentes —todos permanecen con los ojos cerrados y de bruces durante algunos segundos; se hace un profundo silencio».²

Este ritual cotidiano, momento casi místico en la clase, toca un aspecto raras veces hecho explícito en la escuela: el emocional, y tiene por objetivo generar confianza intelectual en los alumnos. Es un momento al cual el profesor concede mucha importancia porque, dice, «ellos tienen que saber que pueden hacer bien las cosas».

Acto seguido, por indicación del profesor, los niños sacan su libro de matemáticas; lo hojean hasta llegar a la página 152. Al parecer han resuelto una a una las lecciones y todos saben cuál se va a trabajar, pues no se da indicación específica al respecto. Mientras pasan las hojas, los niños comentan las ilustraciones e introducciones de las lecciones; por ejemplo, hablan sobre las estampas, las ferias, el zoológico o el fútbol; el maestro lo permite porque, además de generar confianza intelectual en sus alumnos, le interesa promover un vínculo afectivo con la situación. En entrevista comentó: «Lo que más me gusta del libro [gratuito] es el colorido que tiene y que en todos los ejercicios viene una especie de cuento y actividades realizadas por otros niños, como supuestos ejemplos. Vienen anécdotas, historias, el niño lo comprende porque hasta cierto punto se imagina que está en lugar de esos personajes». Con base en tal perspectiva, el profesor permite que por algunos momentos se dé una interacción libre a partir de las introducciones y las ilustraciones del texto. El objetivo del intercambio no es el contenido matemático sino el establecimiento de un vínculo adecuado entre la situación y los niños. Dicho vínculo, en opinión del profesor, constituye un auxiliar en el aprendizaje. Y la postura no es errónea, en los años recientes se ha constatado que elementos tales como las emociones y las creencias son factores clave en las conductas y los aprendizajes vinculados a las matemáticas.³

² Esta actividad se realizó todos los días que estuvimos presentes después del saludo formal y antes de la clase de matemáticas. En el momento en que la invitación se hacía a los niños, se generaba un ambiente especial en el salón de clases.

³ Véase I. M. Gómez-Chacón, «Affective influences in the knowledge of mathematics», pp. 149 y ss.

EL MARCO DE LA ACTIVIDAD: LA DIVISIÓN EN LOS PROGRAMAS
DE LOS NOVENTA

Hay otra vertiente pedagógica que alimenta la actividad del profesor: la entonces nueva propuesta de enseñanza de las matemáticas, incluida la correspondiente a la división. En ésta se privilegia el acercamiento a los saberes matemáticos mediante la resolución de problemas. La secuencia de lecciones que vimos trabajar corresponde a los siguientes contenidos:

- La resolución de problemas de reparto con números de dos cifras entre números de una cifra.
- El uso de la multiplicación para resolver problemas de división.
- La representación de problemas de reparto mediante expresiones como $9 \times \underline{\hspace{1cm}} = 45$ y $45 \div 9 = 5$.⁴
- La resolución de divisiones asociadas a problemas, con el apoyo de «billetes», «monedas» y el cuadro de la multiplicación.
- El cálculo mental y la estimación de resultados.⁵

Conforme a este nuevo texto del saber, el trayecto didáctico y los aspectos de la división considerados son diferentes de los abordados en proyectos curriculares previos. Ahora se consideran aspectos más diversos de esta operación, como la estimación de cocientes o su relación con la multiplicación; asimismo, se recuperan los procedimientos espontáneos para resolver problemas de división: repartos uno a uno, repartos de n en n , uso de la multiplicación para resolver la división... Llegada la introducción del algoritmo, ésta se apoya en acciones tales como repartir billetes y monedas que responden a los valores del sistema decimal trabajados en el grado: unidades, decenas y centenas. Con tal recurso —se supone— se dará una base para la comprensión de cada uno de los pasos del procedimiento formal. Esto es importante porque el de la división es un algoritmo complejo, en el que cada paso representa, de hecho, una situación de cálculo en la que se combinan diferentes destrezas (de estimación, de multiplicación, de resta...), y es el éxito en cada etapa y la puesta en relación de las diferentes etapas lo que permite llegar a un resultado y una interpretación correctos.⁶

Pues bien, una vez que el terreno ha sido preparado, el profesor inicia la actividad vinculada con la división, siguiendo muy de cerca el *texto*

⁴ Secretaría de Educación Pública, *Avance programático*, p. 27.

⁵ Secretaría de Educación Pública, *Avance programático*, p. 28.

⁶ Véase J. Guét, «Algorithmes et schèmes: cas de la division».

de saber oficial, pero adaptándolo a la vez a dos principios: la libertad intelectual (dosificada) de los alumnos y la economía en la actividad.

LA DIVISIÓN EN LA CLASE DEL PROFESOR ALFREDO

Resolución de problemas de reparto utilizando estrategias personales (fase 1)

- La devolución de la tarea

Después de concluida la preparación «emocional» para la tarea, el maestro continúa:

Bueno, ya, vamos a leer (dice con tono serio. Y lee la introducción de la lección de manera pausada): «Julián nos contó que entre los huicholes lo más importante que aprenden las niñas es a bordar; deben saber unir el hilo y combinar bien los colores».⁷

Los niños leen en voz baja siguiendo al profesor; luego surge un ligero murmullo, pues casi todos comentan acerca del contenido de la lectura con los compañeros de banca.⁸

El maestro plantea entonces, una a una, varias preguntas: «¿De quiénes habla el libro?», «¿Qué es lo que las niñas deben aprender?», «¿Con qué bordan las niñas?». Ante las preguntas vuelve el silencio. En cada pregunta muchos niños levantan la mano indicando que quieren responder. El profesor indica quién lo debe hacer. Luego, él mismo continúa la lectura: Si la mamá de Julián da a cada niña el mismo número de trozos de hilo, ¿cuántos trozos de hilo azul le dará a cada una? Los niños entienden la lectura del problema como indicación para trabajar y comienzan a hacerlo.

- La actividad en la red secundaria⁹

Todos cuentan las doce madejas de hilo azul que aparecen en la ilustración.

⁷ La lección presenta, con base en una ilustración en la que aparecen seis niñas indígenas, una situación en la que deben repartirles doce, dieciocho y seis madejas de hilo de distintos colores; la ilustración puede verse al final de este capítulo.

⁸ En todas las sesiones que observamos, el profesor inicia la actividad de la misma manera: lee la introducción de la lección en tono pausado, los niños lo siguen; generalmente, la lectura se hace después de que los niños han comentado libremente acerca del tema de la lección o las ilustraciones que ahí aparecen.

⁹ Recuerde el lector que red secundaria de comunicación es aquella en la que, estando autorizada, no interviene directamente el maestro.

tración del texto, mientras hacen comentarios con los compañeros de banca. Una pareja de niñas cuyo trabajo es posible registrar realiza el conteo de la manera siguiente:

Utilizan el lápiz para ir marcando con un punto los hilos ya contados, los van enumerando en voz baja. «Doce», dice una a la otra al terminar el conteo; la niña más retrasada termina de contar y asiente. Luego, la niña que terminó primero va encerrando los hilos de dos en dos mientras la otra hace cálculos mentales acompañados con movimiento de labios y de dedos; finalmente se comunican el resultado:

NIÑA 1.- ¡Dos!

NIÑO 2.- ¡Dos!

Como ambas obtienen el mismo resultado, lo dan por bueno sin más discusión.

En general, se advierte que los niños, al contar, marcan con el lápiz los hilos de la ilustración, se ayudan con los dedos y calculan mentalmente. Casi todos comentan con el compañero de banca y algunos incluso se paran para preguntar o ver lo que hacen otros compañeros cercanos.

Las estrategias utilizadas por los niños no son sorprendentes, tienen importante coincidencia con las reportadas en diversos estudios sobre el tema. Véanse, por ejemplo, R. Neyret, «Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division»; A. Avila, *Los niños también cuentan*, o P. Martínez y E. Moreno, «Aprendiendo a dividir». En efecto, en los libros o cuadernos se observa alguna de las siguientes estrategias:

1. Encerrar en círculos los hilos para formar grupos; por ejemplo:



2. Representar las madejas con rayitas y encerrarlas en círculos para formar grupos:



Uno de los principios pedagógicos incorporados con la reforma de 1993 fue precisamente la idea de que sean los mismos niños quienes ponderen la validez de los resultados de su actividad, sin que sea un juicio externo el que la sancione. Para hacerlo se plantean al menos dos posibilidades:

- Que la propia situación-problema ofrezca la retroalimentación requerida.
- Que mediante la argumentación se ofrezcan razones acerca de la validez de una cierta respuesta.¹²

El profesor Alfredo, que sigue de cerca las sugerencias oficiales, ha renunciado a ser él, en solitario, quien defina la corrección de las respuestas. De este modo, cuando percibe que los niños resolvieron el problema planteado, orienta las acciones con el fin de determinar la validez de las respuestas con la participación de todo el grupo. Lo hace del siguiente modo:

MAESTRO.- ¿Cuántos trozos de hilo azul le dará a cada una?... Marina (*el tono indica que Marina debe contestar*).

MARINA.- Seis.

MAESTRO.- Fernando, ¿tú qué respuesta pusiste?

FERNANDO.- Seis.

MAESTRO.- ¿Los demás qué dicen, está bien el seis?

CORO.- ¡No!

MAESTRO.- ¿No?, ¿por qué no?, ¿qué respuesta tienen los que dicen que no? (*La mayoría levantan la mano o gritan «¡Yo!, ¡Yo!», indicando que quieren contestar*). A ver... Hugo.

HUGO.- Es dos, sale a dos.

MAESTRO.- A ver, teníamos seis, pero ahora nos dicen que dos, ¿quién...?

NIÑA (*interrumpe*).- Son dos, eran seis niñas y les toca de a dos.

MAESTRO.- Dice Nayeli que son dos, ¿entonces es seis o es dos?... Ramón.

RAMÓN.- Dos.

MAESTRO.- ¿Y tú qué dices? (*Señala a otro niño*).

NIÑO.- Dos.

MAESTRO.- ¿Y allá, crees que es dos o que es seis? (*Señala a un niño sentado en la última banca*).

¹² Los libros del maestro de los distintos grados hacen referencias a estas formas de ponderar la validez de los resultados, aunque por lo general es la segunda la que se promueve en los materiales para el niño.

NIÑO.- Dos.

MAESTRO.- ¿Está bien dos o seis?

CORO.- Dos.

MAESTRO.- Dos, la mayoría nos dice dos, ¿ya vieron, Marina y Fernando?, tocó de a dos, repartiendo entre las seis niñas los doce hilos. (*Marina y Fernando asienten moviendo la cabeza*). Bueno, entonces continuamos.

Se ve aquí que las representaciones gráficas producidas se prestaron a una doble interpretación: ¿el resultado del problema es dos? (número de elementos en cada agrupamiento) o ¿el resultado es seis? (número de grupos). Pero en lo que centro la atención es en lo siguiente: el episodio ilustra cómo la interacción producida en esta fase, orientada a la *validación*, se da conforme al siguiente esquema:

- Se ofrece una respuesta; si los siguientes participantes la reiteran, entonces aquélla se *valida* y termina la interacción.

En cambio:

- Si durante el interrogatorio se dan respuestas distintas, entonces el profesor solicita a otros niños expresar la suya. La respuesta expresada por la mayoría en esta segunda ronda «se regresa» a la minoría que dio una distinta y, si es aceptada por esta minoría, la respuesta se considera correcta.

Como se ve, es la adhesión unánime la que permite postular la validez de las respuestas, no argumentación ni prueba alguna al respecto. Se apela a un criterio, el consenso, que sin ofrecer *pruebas* de la validez logra que los alumnos se adhieran a una proposición o resultado: «Si todo el mundo admite p como correcto, entonces p es correcto».¹³ Se trata, en los hechos, de una aceptación más que de una validación.

En otros episodios registrados durante la secuencia, al no emerger respuestas incorrectas, el consenso inmediato permite sancionarlas con rapidez.

Éste es un hecho interesante, porque distancia la acción del profesor de las nuevas propuestas curriculares, según las cuales la validación mediante argumentos intelectuales es esencial en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Pero por ahora, en su apropiación de la propuesta,

¹³ T. Miranda, *El juego de la argumentación*, p. 145, siguiendo a D. Walton, *Informal logic*.

darles voz a los alumnos y llegar a acuerdos que tomen en cuenta su opinión le resulta suficiente al profesor.

Después de la validez acordada, una nueva devolución

Terminada esta fase donde el consenso ha fungido como criterio de aceptación, se continúa con la resolución de la siguiente situación planteada en el texto:

MAESTRO.- Bueno, entonces continuamos: ¿Cuántos trozos de hilo rojo (dará la mamá de Julián a cada niña)?

Una vez que el profesor lee la consigna, los niños retoman la actividad en la red secundaria. Todo se sucede como en el episodio anterior, sólo que en esta ocasión las respuestas erróneas (si las hay) no trascienden a la red primaria. La validación se obtiene en una primera ronda, pues al expresarse una única respuesta, no hay que convencer a nadie de modificar su punto de vista.

Algo similar ocurre con el tercer reparto: *seis madejas entre seis niñas*. A la devolución le sigue una situación de *validación* por consenso.

Comparación de resultados y omisión de la comparación de estrategias

Aún en la misma página del texto, el profesor lee la pregunta siguiente: «¿Qué procedimiento utilizaste para resolver las preguntas?» Se genera mucho ruido, pues con la motivación de la pregunta cada uno de los niños habla de sus procedimientos; algunos lo hacen con el compañero de banca o los compañeros cercanos, otros lo hacen como para sí. Pasados algunos momentos, sin haber promovido participaciones en la red primaria, el maestro dice: «Bueno, como aquí cada quien contestó algo distinto, no vamos a dar la respuesta todos juntos, porque no se entendería; éstas [la pregunta de referencia y las dos siguientes, que también refieren a la comparación de estrategias] las voy a revisar yo».

Y no se leen ni se comentan las otras preguntas y respuestas de la página. Luego se pasa a otra fase.

La secuencia continúa: se responde, con una dinámica similar a la anterior, otros bloques de preguntas incluidas en el libro de texto, que llaman al uso de estrategias espontáneas pero que paulatinamente acercan a las formas matemáticas convencionales (véase la lección «Hilos de colo-

res», que se reproduce al final de este capítulo), así como al cálculo mental.

El procedimiento convencional como posibilidad

El texto de saber incorporado en 1993 insiste en la resolución de problemas mediante el uso de estrategias personales: «En un principio se espera que los alumnos resuelvan los problemas que se les planteen, sin imponérseles restricciones, sumando, contando, haciendo rayitas o dibujos, mediante cálculo mental u otros procedimientos que utilicen espontáneamente».¹⁴

Esto es lo que se ha hecho en la clase del profesor Alfredo. Pero el proyecto de enseñanza de las matemáticas propuesto en los documentos oficiales no se limita a la promoción de acercamientos libres a las situaciones de división, también se pretende que el procedimiento formal para dividir sea aprendido por los niños. El planteamiento es el siguiente: «De manera paulatina, a través del diálogo entre los compañeros, con el maestro y el libro de texto, los niños encontrarán estrategias más económicas y cercanas a las convencionales. Mediante este proceso se espera que las expresiones matemáticas y los algoritmos de cálculo convencionales tengan sentido y funcionalidad para los niños».¹⁵

De tales recomendaciones ya se ha ocupado el maestro Alfredo, incluso, como se verá después, ha introducido ya el algoritmo usual de la división, pero en una fase más adelantada de la secuencia recupera la preocupación por el acercamiento a las formas convencionales. A estos episodios se dedican los siguientes párrafos.

Se trabaja en la página 157 del libro. El primer problema planteado implica distribuir 64 pesos entre cuatro niñas. Se solicita hacer el reparto con *billetes* proporcionados a los niños como material recortable y luego anotar el resultado sobre el texto.

La mayoría de los niños no tiene sus «billetes», el paso de los meses ha favorecido que los pierdan. Esto genera algunos intercambios, que el maestro concluye con la siguiente participación: «Bueno, pero aunque no los tengamos, nos los podemos imaginar». Entonces, muchos realizan dibujos como recurso para hacer los repartos. Seguramente el maestro percibe que quienes utilizan esta estrategia tienen dificultad para hacer los dibujos, o que éstos les resultan engorrosos, porque dice:

MAESTRO.- Recuerden que también tenemos una manera particular de re-

¹⁴ Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas tercer grado*, p. 22.

¹⁵ *Idem.*

partir, sin tener que dibujar o tener las moneditas o las cosas que hay que repartir, ¿haciendo qué?<

NIÑOS (a coro).- ¡Una división!

Observación de la investigadora: *No percibimos hasta dónde los niños modifican sus estrategias debido a la sugerencia del profesor; los que están cerca de nosotros no lo hacen. El maestro sigue paseando entre las bancas, por momentos se detiene y hace algún comentario a algún niño en particular. Luego va al pizarrón; aunque ya han pasado algunos minutos desde su anterior intervención, parece que retuvo la idea de que los problemas se pueden resolver con el algoritmo de la división porque sin más preámbulo dice:*

MAESTRO.- Por ejemplo, ¿cuánto [dinero] tiene Rosa?<

NIÑOS.- 64 pesos

MAESTRO.- Bien, para repartirlo podemos dividir 64 ¿entre qué? <

NIÑOS.- Entre cuatro.

MAESTRO (anota en el pizarrón la división $4 \overline{)64}$ y luego dice).- ¡Vamos a hacerla todos juntos!

A coro, siguiendo al profesor, los niños resuelven la división.

Observación de la investigadora: *El maestro propone otras divisiones con base en las cantidades de dinero que se sugieren en el libro de texto y solicita a algunos niños pasar a resolverlas. En este proceso se da el episodio que se comenta a continuación.*

El uso de la metáfora, un cierto desplazamiento en la significación de la actividad

MAESTRO.- María Elena, pasa a hacerlo en el pizarrón.

MARÍA ELENA (pasa al pizarrón y anota la división $4 \overline{)48}$, luego trata de resolverla, pero parece que tampoco sabe cómo y no hace nada).

MAESTRO.- ¿Qué pasa, María Elena, tocan la puerta y quién sale primero?

MARÍA ELENA (y otros que la acompañan a coro sin que el maestro lo indique).- El cuatro (se refieren al cuatro del dividendo).

MAESTRO.- Sale el cuatro, ¿cuántas veces?

MARÍA ELENA.- Una (anota el 1 sobre el cuatro de 48).

MAESTRO.- ¿Y cuánto sobra?

MARÍA ELENA (nuevamente acompañada del coro).- ¡Cero! (anota el 0).

MAESTRO.- Vuelven a tocar, ¿ahora quién sale? (dirigiéndose a María Elena).

MARÍA ELENA.- El ocho.

MAESTRO.- ¿Cuántas veces?

MARÍA ELENA (*piensa un poco y cuenta con movimiento de dedos*).- Dos (*anota el dos y termina de hacer la división correctamente*).

MAESTRO.- Muy bien, pasa a tu lugar; ahora hacemos el ejercicio siguiente: 64 entre 4, ya saben que si quieren con dibujos o rayitas, o más fácil nada más así (*señala la división que acaban de hacer en el pizarrón*).

Y el resto de la clase se dedica a resolver algunas divisiones.

Se ha señalado que el algoritmo de la división es complejo puesto que en él confluyen diversidad de cálculos y relaciones numéricas. La significación es decisiva para llevar a buen término la aplicación del algoritmo. El uso de billetes imaginados o dibujados que se dio durante la clase tenía como objetivo colaborar en tal significación.

Empero, en el momento en que los niños *se atorán*, se introduce la metáfora para restablecer el equilibrio didáctico. Esto, en cierto sentido, implica una ruptura con las actividades previas y las significaciones alcanzadas. La metáfora, en efecto, es una figura retórica por la cual se transporta el sentido de una palabra a otra, mediante una comparación mental.¹⁶ Conforme a la secuencia desarrollada hasta este punto, se esperaría que la explicación del algoritmo se basara en el reparto de billetes (o algún otro material isomorfo con el sistema decimal) para mostrar la lógica de cada uno de los pasos implicados y justificar los cocientes parciales. Pero el profesor no actúa así. En vez de ello, desliza la actividad a una situación en la que se abandona el valor de las decenas, las centenas y los repartos, y en lugar de apelar a las imágenes que éstos podrían haber constituido, se apela a la figura de tocar y abrir la puerta, y salir una y otra vez. Esta idea, sin embargo, parece activar la estimación de los cocientes parciales y refleja en tal sentido la intuición del profesor: es más o menos lo mismo decir «¿cuántas veces salió?» que «¿cuántas veces cabe?». Como hoy sabemos, una de las dificultades importantes que enfrenta quien resuelve una división es estimar el cociente (total o parcial), es decir, ponderar, aproximadamente, las veces que el dividendo contiene al divisor, cuestión que el maestro traduce en las preguntas: «¿cuántas veces sale [el cuatro]?» y «¿cuántas veces sale [el ocho]?» Con ello logra que el tiempo didáctico no se detenga.

El maestro justifica la inserción de la metáfora porque de esta manera «es más ameno, y les ayuda [a resolver]». Tal forma de actuar testimonia también que la acción didáctica del profesor, no obstante seguir de cerca las propuestas oficiales, no se mantiene estrictamente dentro de estos límites.

¹⁶ La definición fue tomada del diccionario *Larousse*.

Los conocimientos adquiridos o contruidos por otras vías, así como su preocupación por una vinculación amigable con las matemáticas, aportan elementos para ajustar, modificar y enriquecer lo que oficialmente se sugiere.

LA TRANSPOSICIÓN DEL PROFESOR ALFREDO

Como se aprecia en el cuadro correspondiente, en su acción el profesor Alfredo toma en cuenta las recomendaciones oficiales y las actividades incluidas en el texto; empero, decanta y reinterpreta lo propuesto para trabajar con sus alumnos y también agrega elementos propios de otras pedagogías, como el uso de la metáfora.

Son varios los aspectos que conviene subrayar acerca de las formas específicas que toma la actividad en la clase. En primer término, al igual que hacen otros,¹⁷ y por lo que parecería un *principio de economía en la actividad*, el profesor selecciona sólo las actividades cuyo beneficio, en su opinión, compensa el esfuerzo invertido en realizarlas. Este principio de economía se pone especialmente de relieve en una sesión donde el tema es *los números ordinales*. En este caso, como última actividad de la lección, se sugiere formar grupos de ocho niños, organizar carreras y después asignar, utilizando los ordinales, los lugares correspondientes de acuerdo con los resultados de las carreras. Ante la petición de un alumno que llamaba repetidamente la atención del maestro sobre la actividad, la respuesta de éste fue: «Esa la vamos a hacer después de recreo», y la actividad nunca se realizó, al menos no en los días en que estuvimos ahí. La cuestión que se aborda en seguida también parece obedecer a este principio de economía.

COMPARACIÓN Y CONFRONTACIÓN DE ESTRATEGIAS: SÓLO EN LA RED SECUNDARIA

En las sesiones dedicadas a la división (y también a los ordinales), las estrategias personales de resolución nunca se pusieron a debate, no se compararon ni discutieron en la red primaria de comunicación. En lo que parece ser una costumbre, su comparación y discusión se realiza sólo en la red secundaria. Por lo tanto, cuando en el texto se lee la frase «Comenta con tus compañeros cómo hiciste para resolver», el maestro dice: «Esa [pre-

¹⁷ Véase A. Avila y J. L. Cortina, «Opiniones, perspectivas y posturas de los profesores ante los textos gratuitos de matemáticas».

Comparativo de contenidos. Transposición oficial y transposición del profesor Alfredo

<i>Contenido</i>	<i>Programas y libro de texto oficial</i>	<i>Clase del profesor Alfredo</i>
Resolución de problemas de reparto con números de dos cifras entre una cifra	✓	✓
Uso de estrategias espontáneas para resolver problemas de división	✓	✓
Uso de la multiplicación para resolver problemas de división	✓	✓
Representación de problemas de reparto mediante expresiones del tipo: $9 \times __ = 45$ y $45 \div 9 = __$.	✓	✓
Resolución de divisiones asociadas a problemas con el apoyo de billetes y monedas.	✓	
Resolución de divisiones asociadas a problemas mediante el algoritmo convencional y con el apoyo de billetes y monedas	✓	
Resolución de divisiones asociadas a problemas con el apoyo de imágenes mentales asociadas a billetes y monedas.		✓
Resolución de divisiones mediante el algoritmo convencional y con el apoyo de la metáfora		✓
Estimación de resultados de divisiones hasta con números de dos cifras entre una cifra	✓	✓

gunta] ya saben que la voy a revisar yo, porque cada quien respondió una cosa distinta y no se entendería».

Esto es, la diversidad de estrategias no constituye materia de trabajo en la red primaria, tal diversidad se mantiene para los momentos adidácticos, en la red secundaria. La materia prima para el trabajo cuando participa el profesor parece constituida por los procedimientos más formales, cuya relativa unicidad facilita la comunicación.

Es probable que la discusión y confrontación de estrategias personales no sean consideradas suficientemente útiles en función del esfuerzo que implica ponerlas en marcha, y el principio de economía las deja al margen de la actividad. El beneficio importante que puedan acarrear es precisamente dejar a los alumnos utilizarlas, y a esto sí se compromete el profesor.

LA DEVOLUCIÓN DOSIFICADA, NOCIÓN QUE ARTICULA EL CONTRATO CELEBRADO

El contrato que regula las acciones en la clase se anuda alrededor de una idea: los niños pueden hacerse responsables de su aprendizaje en tiempos *adidácticos* relativamente breves. Es decir, el profesor realiza una *devolución dosificada*, y para generar los tiempos adidácticos se apoya en las preguntas y los problemas incluidos en el libro de texto. En ocasiones indica «cada quien resuelve como quiera», en ocasiones no lo hace; la forma de trabajar o bien está definida en el libro («Resuélvelo como quieras») o por la costumbre (en el sentido de Balacheff).¹⁸ Cualquiera que sea el caso, los tiempos adidácticos otorgados permiten un trabajo autónomo en la red secundaria, pero dosificado en periodos breves correspondientes a cada uno de los ejercicios o problemas del texto. De tal suerte que la clase transcurre en la alternancia entre tiempos en que se establece una relación personal con la situación y los episodios estrictamente didácticos en los que el profesor participa en función de los resultados de la actividad precedente. Pareciera que el éxito en una etapa condiciona el paso a la siguiente.¹⁹

¹⁸ Pueden verse breves notas sobre este concepto en el primer capítulo.

¹⁹ E. Roditi, en su artículo «Regularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement», afirma que es un «principio de necesidad de éxito de etapa» el que lleva a los profesores a segmentar la enseñanza de manera que los alumnos puedan aplicar regularmente lo que se les acaba de enseñar.

TIEMPO DE APRENDIZAJE Y RELACIÓN OFICIAL CON LA DIVISIÓN: UN APARENTE DESAJUSTE TEMPORAL

En la primera fase de la progresión didáctica observada, el profesor promueve que los niños se relacionen con la división mediante acercamientos libres, luego aborda expresiones de la forma $a \times _ = c$ e introduce el cálculo mental. Empero, según nos dimos cuenta, el procedimiento convencional ya había sido motivo de actividad en la clase. Esto obedece a una razón: en el transcurso de las observaciones —realizadas ya avanzado el año escolar— el profesor nos dijo: «Estamos trabajando sólo con el libro, muchos temas ya los vimos y es una forma de repaso». Tal proceso lleva a repetir la secuencia para tratar la división. Llegado el momento, el profesor pone a los niños en relación con el procedimiento convencional, el cual propone por su utilidad para resolver más fácilmente los problemas motivo de la interacción. «Acuérdense que también podemos resolver así (con el procedimiento usual de la división)», dice.

Pero ni aun en este retrabajar la división el procedimiento formal es considerado vía única de solución. La vinculación con tal procedimiento es sólo posibilidad, no obligación. Y en los hechos así ocurre: a la mayoría parece resultarles más cómodas las estrategias personales de resolución que el algoritmo convencional. De acuerdo con las reglas del contrato establecido se acepta la permanencia de tales formas de resolución. El profesor acepta —en acto— que el tiempo de la enseñanza no es el tiempo del aprendizaje. Y la activación de recursos personales aun con el conocimiento del algoritmo formal sin duda agrega significado a la noción de división. Se logra de este modo un equilibrio didáctico, no previsto en el texto del saber oficial, que en los hechos resulta eficaz.

EL TEXTO COMO AUXILIAR EN LA DEVOLUCIÓN

El texto gratuito de tercer grado se elaboró con la idea de incluir actividades suficientes para lograr los aprendizajes previstos en el programa del grado. También se consideró el hecho de que para organizar la clase basta con realizar las actividades ahí incluidas, en el orden en que son presentadas. En general, los problemas y preguntas no tienen respuestas inmediatas, sino que obligan a construir soluciones de cierta complejidad; el supuesto es que los niños no cuentan con un modelo preestablecido para obtenerlas.²⁰ Pero las preguntas y los problemas pueden ser respondidos en tiempos relativamente cortos.

²⁰ Véase A. Avila y H. Balbuena (coords.), *Matemáticas tercer grado*.

En la secuencia de clases aquí analizada el texto toma su papel de organizador de la actividad acorde con el espíritu con que fue concebido. El hecho de que los problemas incluidos impliquen tiempos cortos de resolución significa, en otro sentido, que aquéllos son de complejidad moderada. Tal característica puede sin duda limitar las acciones intelectuales de los niños,²¹ pero en el contexto de la escuela parece de una importancia fundamental. En efecto, nuestras observaciones muestran que el profesor —a pesar de su apertura— nunca solicitó resolver una lección, ni siquiera una página completa, sin que mediara su intervención en los términos antes descritos. En general, ésta consistía en plantear la pregunta, asegurarse de que los niños la hubiesen entendido y dejarlos trabajar. Después de validar por consenso la respuesta obtenida, el ciclo recomienza.

Es decir, parecería que el profesor ha tomado la decisión de permitir a sus alumnos actuar con autonomía sólo que dentro de ciertos límites, de manera que él pueda seguir de cerca sus procesos. Es un contrato de *devolución dosificada*, mediante el cual se disminuye la distancia entre la innovación y las ideas previas del profesor. El texto resulta útil para cumplir el contrato, pero para que sea posible la interacción libre con las situaciones que plantea, el profesor toma muchas otras decisiones: motivar a los alumnos, dejarlos acercarse libremente a las ilustraciones y hacer comentarios sobre las historias que se cuentan en las introducciones; se asegura de que se han comprendido las consignas. Se asegura también, antes de un tiempo adidáctico, de que el precedente fue utilizado productivamente y en la dirección deseada; para ello incorpora tiempos didácticos (de comparación, de validación y, si es necesario, de comunicación y explicación).

Tomando prestadas las palabras de M. Artigue: es una forma en la que, al acortarse la distancia con lo viejo, se vuelve posible la asimilación de lo nuevo.

¿POR QUÉ EL PROFESOR DEVUELVE LA RESPONSABILIDAD?, O LA CONFIANZA EN LOS ALUMNOS Y EN EL TEXTO

En los hechos, el profesor Alfredo sólo está dispuesto a transferir la responsabilidad en tiempos adidácticos cortos. No obstante, la manera en que inicia diariamente su clase muestra la confianza intelectual que tiene en sus alumnos. La misma confianza tiene en relación con el libro de texto;

²¹ De hecho, esta observación fue planteada en un estudio desarrollado por S. Alatorre y otros: *Propósitos y contenidos de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de educación primaria en México*.

en algún momento nos dijo: «Otra cosa que me ha gustado es lo fáciles que hasta cierto punto están los ejercicios, creo que no tienen demasiada complejidad, sino que están al nivel de los niños». Esta doble confianza está lejos de ser trivial. Muchos profesores —acordes con sus ideas sobre el aprendizaje y la enseñanza— consideran que los libros de matemáticas que dieron cuerpo a la reforma son sumamente complejos para sus alumnos y, por ello mismo, establecen estrategias «vigilantes» y de control intelectual durante su utilización.²²

La confianza en el texto y en los saberes previos de los niños es un elemento que posibilita la flexibilidad docente, pero también contribuye a ésta una concepción más profunda vinculada al respeto. Para ilustrar esto último tomaré un fragmento de la entrevista sostenida con el profesor: «Mire [dice extendiendo una hoja mimeografiada que saca de su armario], así es como creo que son los niños». La hoja contiene un breve escrito titulado «Un niño pequeño» que hace referencia, de manera metafórica, a las consecuencias de inhibir a los niños durante su estancia en la escuela. Trata de un niño a quien se sugirió dibujar una flor; al principio el niño dibuja la flor entusiasmado pero la maestra lo corrige: «No, de ese color no son esas flores». Entonces el niño corrige su flor y se la muestra nuevamente a la maestra, pero entonces ella dice: «No, las flores no son de ese tamaño»; el niño la corrige nuevamente... Ocurre después que un día se le solicita al niño hacer un dibujo «como él quiera». Para entonces el niño, que ha aprendido bien las reglas del contrato, dice: «¿Me puede decir cómo hacerlo?, porque yo no sé».

Ésta es la postura que le permite al profesor Alfredo hacer, aunque en sus propios términos, la *devolución* a sus alumnos. Es una postura que no proviene del conocimiento de nuevas corrientes educativas ni tiene fundamentos científicos; proviene de saberes y creencias que circulan entre los maestros y que tocan fibras emocionales más que intelectuales. Es un ámbito al que el profesor parece proclive. Dicha postura, si bien no resuelve todo, porque devolver la responsabilidad implica el desarrollo y puesta en marcha de muchas destrezas didácticas,²³ sí es condición indispensable para la acción libre de los alumnos y para que dichas destrezas sean desarrolladas. Es también condición de posibilidad de la reforma constructivista en las aulas.

²² Véanse A. Avila y J. L. Cortina, «Opiniones, perspectivas y posturas de los profesores ante los textos gratuitos de matemáticas», y M. E. Saucedo y A. Hermosillo, «Los libros de texto en la clase de matemáticas».

²³ Véase A. Avila (dir.), *Evaluación cualitativa de las repercusiones de la reforma a las matemáticas en la educación primaria*.

Rasgos de la actividad matemática desarrollada en las clases del profesor Alfredo

	Primera clase	Segunda clase	Tercera clase	Cuarta clase
Contenido	Números ordinales	Situaciones de reparto y resolución de expresiones de la forma $a \times b = c$	Situaciones de reparto y algoritmo de la división	Ejercicios de división utilizando el procedimiento convencional
Preparación para la tarea	Promoción de la autoestima	Promoción de la autoestima	Promoción de la autoestima	Promoción de la autoestima
Presentación formal de nociones	Búsqueda de vínculo afectivo con la situación	Búsqueda de vínculo afectivo con la situación	Búsqueda de vínculo afectivo con la situación	Búsqueda de vínculo afectivo con la situación
Ostenión de nociones	No	No	No	No
Preguntas abiertas	Si	Si	Si	No
Preguntas anticipatorias	No	No	No	No
Problemas como vía del aprendizaje	No	Si	Si	No
Problemas de aplicación	Si	Si	Si	No
Ejercicios rutinarios	No	No	No	Si
Trabajo en pequeños grupos	Si	Si	Si	Si
Uso de material manipulable	No	No, los niños habían perdido el que resultaba pertinente.	No	No
Justificación y argumentación de respuestas	No públicamente	No públicamente	No públicamente	No
Confrontación de resultados	Si	Si	Si	Si
Confrontación de estrategias	No públicamente	No públicamente	No públicamente	No
Mecanismos de regulación	Transferir la pregunta a otro niño; validar las respuestas por consenso	Transferir la pregunta a otro niño; validar las respuestas por consenso	Transferir la pregunta a otro niño; validar la respuesta por consenso; uso de la metáfora	Uso de la metáfora

Capítulo 13

HACIA UN CONTRATO BASADO EN LA ARGUMENTACIÓN¹

A MANERA DE INTRODUCCIÓN

Se está discutiendo —en el contexto del reparto de galletas entre niños— si a los amigos de Raúl les tocó más galleta o menos galleta que a otros; algunos dicen «sí», pero luego cambian su respuesta por un «no» al percatarse de que es ésta la que han dado muchos niños. Entonces la maestra interviene:

MAESTRA.- [Digo] *no* porque es lo que yo creo. Yo creo que a Raúl le toca más galleta, no porque todos los demás digan que a nadie le toca más yo voy a tener que cambiar mi forma de pensar, *yo creo, y creo por algo*. Entonces no se vale que me cambien los resultados, porque estamos hablando de algo que yo creo, si yo creo que a Raúl le toca más, no porque todo el grupo diga que le toca menos [voy a cambiar mi respuesta]. Lo hemos visto, ¿cuántas veces [sólo] uno cree algo y es el que tiene la respuesta, y todos los demás estamos equivocados? ¿No nos ha pasado?

Niños.- ¡Sííí!

Con su participación —que pareciera una llamada de atención a quienes usan el consenso como forma de validación— la profesora expresa la necesidad de argumentar con buenas razones y previene contra un riesgo ya señalado por algunos investigadores, por ejemplo Balacheff, para quien

¹ Los datos en que se basa este apartado fueron tomados de la tesis que elaboró Margarita Alvarado, bajo mi dirección, para obtener el grado de maestra en desarrollo educativo en la Universidad Pedagógica Nacional. El análisis aquí presentado difiere del original.

la argumentación —en su afán de conseguir adhesiones— puede derivar en prácticas donde las reglas son de una naturaleza muy distinta de las requeridas en la producción del conocimiento matemático válido. En el límite, como la profesora hace notar, pueden aceptarse como válidas afirmaciones erróneas sólo porque la mayoría las acepta. Pero llegar a este punto no le fue simple a la maestra, acaso tampoco a sus alumnos; en lo que sigue se da cuenta de esto.

EVALUACIÓN Y VALIDACIÓN DEL SABER

En virtud de la asimetría propia de la relación didáctica, que vincula a quien domina un saber con quien debe aprenderlo, el maestro es responsable de la validez del saber que se genera en la clase.² Esto no significa, sin embargo, que en la fase dedicada a valorar los resultados de la actividad el docente tenga que emitir un juicio directo sobre la validez del trabajo de los estudiantes. Si bien haciendo uso de su lugar privilegiado en la relación él puede juzgar sin derecho de réplica, también puede poner en marcha otros mecanismos para hacer saber la veracidad (o validez) del fruto de la actividad matemática a sus alumnos.

Claire Margolinas ha llamado *fase de conclusión* a la que sigue a la resolución de un problema o tarea³ y considera que esta fase puede desarrollarse en dos vías: como una fase de *evaluación* o como una fase de *validación*. La fase de evaluación⁴ implica el conocimiento de los logros, e idealmente una valoración del significado de los mismos por parte del docente, pero aquí ni las justificaciones ni el convencimiento de los otros (los alumnos) son necesarios. Mediante la validación, en cambio, se otorga a los alumnos el lugar de sujetos epistémicos, y participan —sobre la base de la exposición de «pruebas»— en la decisión acerca de la validez de los resultados obtenidos mediante la actividad.

En el capítulo anterior vimos una especie de *seudovalidación* en la que la única «prueba» de la validez es el consenso. Esta forma de decidir acerca de la veracidad de las respuestas da voz a los alumnos y, por lo mismo, entraña un relativo avance en relación con la costumbre instalada en las escuelas, ya que conforme a ésta el profesor puede en solitario, mediante un juicio sumario, decidir al respecto. Pero la que se realiza por consenso no es sino una *seudovalidación*, porque las razones matemáticas de la de-

² Véase C. Margolinas, *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*.

³ *Ibidem*, pp. 27 y ss.

⁴ *Ibidem*, pp. 30 y 31.

cisión no están de por medio. Una real situación de validación implica, como anoté antes, la producción de pruebas.

Conforme a Balacheff, las pruebas pueden ser de distinto tipo:

- *pruebas pragmáticas*, que no implican sino la ejecución de una anticipación y que, sobre la evidencia de los hechos, indican al propio alumno la corrección de su anticipación. La prueba de la validez es simplemente «esto funciona», «así es».

- *pruebas intelectuales*, mediante las cuales el conocimiento se vuelve objeto de reflexión y debate. Estas pruebas, que algunos traductores de Balacheff han llamado conceptuales, requieren que el o los participantes se expresen lingüísticamente sobre el objeto de conocimiento y las relaciones implicadas.⁵

Las pruebas intelectuales rebasan la simple descripción de las acciones y operaciones que produjeron un resultado o aserción; se refieren a propiedades y relaciones de la situación problemática e implican también pasar del lenguaje familiar a otro descontextualizado y despersonalizado.

El sentido de la prueba intelectual recién expuesto coincide con las ideas de Guy Brousseau, para quien una situación de validación (o prueba) testimonia una comprensión racional del conocimiento que se expresa mediante el lenguaje.⁶

Las siguientes afirmaciones, tomadas de un escrito de Balacheff, permitirán precisar un poco más el sentido que daremos a la prueba en las páginas subsecuentes. Para este investigador, la *explicación* es un discurso tendiente a hacer inteligible el carácter de verdad de una proposición o de un resultado. Pero la explicación no se convierte en prueba de manera automática, las razones expuestas durante aquélla pueden ser aceptadas o refutadas. Sólo la explicación aceptada por una comunidad toma el carácter de *prueba*.⁷

Balacheff distingue también entre argumento y explicación, porque en su opinión el argumento se caracteriza por la intención del hablante de conseguir la adhesión del auditorio y, por lo mismo, tal intención se traduce en prácticas «donde las reglas son con frecuencia de una naturaleza profundamente diferente de la que requieren las matemáticas».⁸ No obstante esta objeción, que bien vale para la vertiente retórica de la argumen-

⁵ Véase N. Balacheff, «Processus de preuve et situations de validation», pp. 155 y ss.

⁶ Véase G. Brousseau, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*.

⁷ Véase N. Balacheff, «Processus de preuve et situations de validation» pp. 147-148.

⁸ N. Balacheff, «¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate», p. 2, cit. por I. de Olaizola y L. M. Santos, «Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases», p. 9.

tación,⁹ aquí conservaremos el significado primigenio del término —razonamiento que se emplea para demostrar una proposición— y denominaremos *argumento* a lo que Balacheff llama *explicación*. Consideraremos, con Vega,¹⁰ que los argumentos son maneras de dar cuenta y razón de algo ante alguien y su evaluación supone ciertos estándares cognoscitivos y metodológicos. En síntesis, con el término *argumento* nos referiremos al discurso de los alumnos o del profesor que se orienta a mostrar la validez de una proposición o un resultado en una situación en la que se discute su veracidad. Llamaremos *prueba* a los argumentos que son aceptados por el conjunto de los interlocutores. Esto último nos lleva a otra cuestión: el carácter social de la argumentación, la cual tiene lugar en un marco discursivo durante la fase de validación.

A este respecto conviene señalar que el punto de vista aquí adoptado no se refiere a las situaciones de validación en el sentido de la teoría brouseaniana, sino a lo que Margolinas llama *fase de validación*. Según esta investigadora, en el ámbito de la didáctica una *fase* es «un momento del desarrollo efectivo de las acciones del maestro o del alumno»,¹¹ y la *fase de validación* se refiere al momento en que se trata de saber si el resultado obtenido es adecuado conforme al problema planteado. Como el debate puede darse también alrededor de la construcción de nociones, aplicación de procedimientos u otras tareas, y no únicamente en torno a la resolución de problemas, nuestra mirada se extenderá sobre estas otras opciones.

Es común que los profesores desarrollen acciones de evaluación y no de validación. La idea de dar a los alumnos participación en este ámbito es relativamente reciente, fue introducida con la reforma de 1993 al sugerirse que los niños no deben esperar un juicio externo (es decir, del profesor) para saber de la corrección de los resultados de su actividad.¹² Esta sugerencia se retoma en el grupo cuya actividad matemática da sustancia a este capítulo.

En efecto, el tema de las siguientes páginas es la actividad didáctica realizada por la profesora Azucena y sus alumnos de cuarto grado, a lo largo de la cual se incluyen procesos de validación. Se trata de procesos que se dan en un contexto de debate alrededor de nociones vinculadas con las fracciones. Nuestra atención se centra precisamente en aquellos momentos que prosiguen a la obtención de afirmaciones producto de la actividad.

⁹ Véase L. Vega, «Argumentación».

¹⁰ *Ibidem*, p. 4.

¹¹ C. Margolinas, *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, p. 75.

¹² Véase Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*.

Se verá que la inclusión de una fase de validación no es cosa fácil, sino que la creciente experiencia de la joven profesora y los alumnos con el nuevo enfoque educativo, así como una aserción que en el libro se sugiere someter a aceptación o rechazo, constituyen condiciones que favorecen dicha inclusión.

Al corresponder la actividad a un periodo prolongado (dieciséis sesiones de clase), fue posible ver tanto las modificaciones en el contrato didáctico inicial como los avances cognitivos de los niños. La entrevista con la profesora autoriza, además, algunas reflexiones sobre el sentido de las modificaciones observadas y sobre las condiciones de posibilidad de tal modificación. Antes de entrar al tema medular del apartado conviene hacer algunas aclaraciones sobre el contenido matemático que genera la actividad.

LA FRACCIÓN, OBJETO QUE MOTIVA LA ACTIVIDAD EN CLASE

Mencioné en otro capítulo que con la reforma de 1993 se introdujeron en la educación primaria significados de la fracción no incluidos hasta entonces en los programas del nivel educativo, al menos no explícita ni sistemáticamente. Con las innovaciones se intentó promover el abandono de un aprendizaje centrado en la noción de partición de la unidad, así como en la simbolización y los procedimientos formales para operar con las fracciones. Tal centramiento, se afirma, había empobrecido la significación de los números fraccionarios como conocimiento escolar. Con el fin de enriquecer este aprendizaje se puso el acento en la presentación de situaciones problemáticas variadas que dotaran de significados diversos a la fracción. Conforme a esta intención, ya en el tercer grado se introduce la noción en casos sencillos (por ejemplo medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes. La cercanía con las experiencias del niño y el apoyo del material manipulable son elementos esenciales en las sugerencias didácticas ofrecidas.¹³

En el programa de cuarto grado continúa el interés por que los niños aprendan nociones «con significado». Con ese ánimo se recomienda realizar el trabajo con material manipulable, utilizando procedimientos informales (personales) y obteniendo las nociones previstas como resultado de ese trabajo.¹⁴

¹³ Véanse Secretaría de Educación Pública, *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*, y *Libro para el maestro. Matemáticas cuarto grado*.

¹⁴ Véase Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Matemáticas cuarto grado*.

Estas orientaciones enmarcan la secuencia de clases que se analiza a continuación, poniendo el acento en las fases de validación que tienen lugar durante su desarrollo.

EL CONTRATO PRETENDIDO, DE DEVOLUCIÓN

Con excepción de una clase dedicada a repasar las fracciones desde la noción de partición de la unidad, la actividad en el grupo se articuló mediante los problemas y ejercicios del libro de texto oficial. En general, se hacía de la siguiente manera: la maestra solicitaba a los niños que abrieran el texto en la lección que se iba a trabajar. Después, algún niño o niña o la propia maestra leían el primer ejercicio o actividad. Si lo creía necesario, la profesora agregaba alguna explicación o interrogaba para asegurarse de la comprensión, luego los niños resolvían el ejercicio. El siguiente episodio muestra la dinámica:

SELENE (leyendo en la página 14, inserta al final del apartado).- En la tienda del pueblo hay de todo un poco, así, las personas no tienen que ir tan lejos para comprar lo que necesitan. Don Rodolfo encargó unos clavos a su sobrino Juan, le dio dinero para comprarlos y una tira de papel para medirlos. La tira era de este tamaño [...]

MAESTRA.- ¿Ya vimos el tamaño? (se refiere a la tira que aparece en el libro).

NIÑOS.- ¡Sí!

MAESTRA.- ¿Ya vieron todos los clavos? (los niños observan y la maestra pide que encierren los clavos de acuerdo con las instrucciones que aparecen en el libro): En la tienda Juan pidió clavos de tres tamaños: de una tira; de media tira; de una tira más un medio de tira. El dueño de la tienda le mostró clavos de varios tamaños para que Juan escogiera. Marca los clavos que debió escoger Juan. Encierren en un círculo los clavos que escogió.

Con el planteamiento de la situación, la profesora buscaba transferir a sus alumnos la responsabilidad de su aprendizaje. En principio parece que así ocurre: todos tratan de medir los clavos; algunos lo hacen con sus dedos, otros utilizan el lápiz como instrumento de medición, hay también quien usa la regla convirtiendo el centímetro en unidad de comparación. Empero, ninguno sigue el razonamiento previsto en el texto: utilizar la tira que ahí aparece y compararla con cada uno de los clavos (mediante un intermediario o recortando una igual y sobreponiéndola) para encontrar los que miden media tira, una tira y tira y media, respectivamente. Hay dificultades para resolver el ejercicio y la *devolución*, en los hechos, no tiene lugar. El tiempo didáctico se detiene.

UN INTENTO FALLIDO POR RECOBRAR EL EQUILIBRIO DIDÁCTICO:
PUESTA EN COMÚN DE RESPUESTAS Y ESTRATEGIAS

Ante el estancamiento, la maestra busca recuperar las respuestas de sus alumnos y trabajarlas en la red primaria:

MAESTRA.- Oye, Miriam, ¿cuántos [clavos] escogiste?

MIRIAM.- Tres, maestra.

MAESTRA.- Oye, Mayolo, ¿cuántos escogiste?

MAYOLO.- Cuatro.

MAESTRA.- ¿Por qué tuvimos que haber escogido tres?... Anaid, ¿cuántos escogiste?

ANAID.- Dos.

MAESTRA.- ¿Por qué escogiste cuatro, Mayolo? (*no se escucha la respuesta de Mayolo*)... ¿Tú cuántos escogiste, Julieta? (*tampoco se escucha*)... Levante la mano quien escogió cuatro (*algunos levantan la mano*). ¿Quién escogió tres? (*la mayoría levantan la mano*).

MAESTRA.- Valencia, ¿cuántos escogiste?

VALENCIA.- Cuatro.

MAESTRA.- ¿Por qué cuatro?

VALENCIA.- Porque son del mismo tamaño.

MAESTRA.- Selene, ¿cuántos señalaste?

SELENE.- Tres.

MAESTRA.- ¿Por qué no cuatro, o por qué no dos, por qué tres a fuerzas?

LORENA.- Porque pienso que tres son de la misma medida que la tira [...]

Por ahora, las preguntas y respuestas no se orientan hacia lo esperado en el libro: considerar la tira dibujada como unidad para medir los clavos. Un elemento que influye en este hecho es sin duda que la medida de los clavos —tomada la tira como unidad— corresponde a fracciones de ésta. Y aunque la profesora hace intentos por provocar la reflexión, las preguntas que formula, al no ser pertinentes, provocan respuestas triviales desde el punto de vista matemático. Por ejemplo, a la pregunta: «¿Por qué escogieron cuatro clavos?», se responde con un «Porque son del mismo tamaño» y a la interrogante «¿Por qué no cuatro, o por qué no dos, por qué tres a fuerzas?» le sigue el enunciado «Porque pienso que tres son de la misma medida que la tira». Ni en uno ni en otro caso se ofrecen argumentos útiles para evaluar la pertinencia de la respuesta producida, ni aun en el nivel empírico, que consistiría en describir el procedimiento que condujo al resultado. Al no emerger la respuesta esperada, la puesta en común resultó fallida como mecanismo para recobrar el equilibrio didáctico.

En este punto la maestra parece percatarse de que debe cambiar el rumbo de la clase y pasa a la comunicación de estrategias de resolución: «Vamos a ver qué métodos utilizaron», dice. La interacción ahora genera da lleva a enumerar varios procedimientos:

- Medir los clavos con la abertura de los dedos.
- Utilizar el lápiz como unidad de medida.
- Utilizar la regla graduada.

La enumeración termina sin ningún colofón. Para nadie quedó claro si el método utilizado era correcto o más eficiente que otro. Así, sin sacar provecho explícito de la interacción, se pasa a leer el siguiente problema planteado en el libro de texto.

UN CAMINO SEGURO: RECUPERAR LA RESPONSABILIDAD

Los niños tratan de responder el ejercicio 3 de la página 15 del libro (véase la lección al final del apartado). El ejercicio plantea un problema que implica identificar de entre varias tiras aquella con la que se midió un clavo que aparece dibujado y cuya medida, según se indica en el texto, es « $1\frac{1}{4}$ de tira». Nuevamente, el problema parece resultar excesivamente difícil a los niños, pues las participaciones registradas en la red secundaria se orientan a concluir que la tira con que se midió el clavo es la que mide lo mismo que éste. Entonces la maestra dice:

Miren, vamos a volver a leer el enunciado, porque se están confundiendo con la tira. Miren, dice el libro: «El dueño de la tienda dice que el clavo dibujado abajo mide una tira más un cuarto de tira. Utiliza el procedimiento de Rosa para encontrar la tira...», es decir (el procedimiento de Rosa es) hacer las tiras para encontrar la tira con la que se midió el clavo y tacharla [...] ¿Sí entienden eso? (los niños están distraídos trazando o cortando pero la maestra continúa). La medida (del clavo dibujado en el libro) no es de la tira hecha sino es de una tira más un cuarto. Fíjense ahí lo que dice el enunciado, vean todos el enunciado de arriba, [...] dice el dueño de la tienda que el clavo dibujado abajo mide una tira, ya sea A, B o C, ¿sí?, pero mide una tira más un cuarto de tira [...] es decir, tenemos la tira más un cuarto de tira, ¿sí se entiende?, es como si éste fuera mi clavo (dibuja un clavo en el pizarrón), ¿sí? Entonces, fíjense bien, muchachos... Fíjense bien: mi clavo mide una tira, supongamos que ésta es mi tira (dibuja una tira sobre el clavo), mi clavo mide hasta aquí, una tira (señala en el clavo dibujado en el pizarrón el punto a donde llega la tira), pero además mide $\frac{1}{4}$ de tira más (señala la parte del clavo que sobresale a la tira dibujada y que corresponde a $\frac{1}{4}$ de ésta). Es decir, la tira

con la que estoy midiendo no es la que se acerca más a la longitud de mi clavo, sino aquella con la que yo voy a marcar 1 tira y $\frac{1}{4}$ de tira más (para igualar el largo del clavo).

Como se ve, los niños están anclados a la idea de que la *tira-unidad* es del tamaño del clavo; la maestra hace esfuerzos (inútiles) por que modifiquen este punto de vista. Se observa en ello la dificultad para introducirse al campo de las fracciones, incluso en el contexto de medición en que, se supone, estos números surgen con naturalidad. Se ve también que la maestra decide recuperar la responsabilidad que había trasladado a los niños para ostentar el procedimiento que por sí solos no pudieron elaborar. En las primeras sesiones observadas, muchas de las participaciones docentes —ante la falta de respuesta—, tienen este formato, como la siguiente, que deriva de la tarea de dibujar $\frac{1}{4}$ de un rectángulo:

Se ha dibujado en el pizarrón un rectángulo dividido en cuartos, se ha coloreado un cuarto y se ha anotado la expresión $\frac{1}{4}$ junto al rectángulo.

MAESTRA.- ¿Ya le entendiste, Yadira?

YADIRA.- No.

MAESTRA.- ¿No?, no le ha entendido Yadira. ¡Ay, Yadira!, ¿en cuántas partes dividió Miriam esto? (*señala el rectángulo*), en cuatro, en cuatro partes (*señala el denominador, como indicando que éste expresa las cuatro partes*) ¿y cuántas iluminó?, una (*señala el numerador, como indicando que éste expresa la parte iluminada*). Aquí te está diciendo una parte de cuatro que había (*señala alternadamente el numerador y el denominador*), ella tomó una parte de cuatro que había (*enfática, señala de nuevo los términos de la fracción*)

Otra participación de este tipo tiene lugar cuando la docente se percata de que algunos niños no saben utilizar las tiras para medir los clavos:

MAESTRA.- ¿Ya la marcaste? Márcala bien. A ver, voy a repetir (*aquí al frente*), porque no puedo estar pasando lugar por lugar. Voy a agarrar mi tira B, y hasta donde llegue mi tira B la voy a marcar, después mi tira B la voy a dividir en cuatro, y voy a checar que el pedacito que me sobra (*del clavo*) sea la medida de $\frac{1}{4}$, ¿sí?, aquí me tienen que poner en su clavo la marca de hasta dónde llega la tira B y tienen que dividir en cuartos ¿Ya, Ángel?

Pero quizá la más llamativa de las participaciones de la maestra en el sentido ostensivo antes expuesto es la que, recuperando la responsabilidad

del aprendizaje de sus alumnos, la llevó a ostentar las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, ..., $\frac{1}{8}$, $\frac{8}{8}$ utilizando rectángulos y círculos de papel, porque supuso, a partir de la resolución de un ejercicio, que los niños no tenían claro el significado de $\frac{1}{8}$. A tal ostensión se dedicó toda una sesión.¹⁵

En síntesis, puede verse que la maestra tiene como intención inicial devolver la responsabilidad del aprendizaje a los alumnos, pues los deja resolver las situaciones planteadas en el texto sin indicaciones que orienten su acción. Y en ocasiones la participación que pretende promover tiene lugar, aunque de manera incipiente.

Pero hasta aquí, lo más frecuente ante las dificultades, la falta de respuestas o una puesta en común improductiva, es que la maestra recupere su papel protagónico para ostentar o explicar. Y ella lo dice con franqueza: «Antes de iniciar esto (la secuencia observada), a pesar de que ya había manejado el libro, pues lo manejé pero de una forma más tradicional, o sea, no hacía tanto que el alumno razonara... o sea, sí los hacía pensar, pero no tanto hasta que ellos llegaran a la respuesta, o sea, al final les planteaba yo algunas cosas, al final yo los ayudaba...»

La maestra se refiere al pasado, pero su acción se deja ver en el presente. Es una forma de actuar que, ante el desequilibrio didáctico, recupera la responsabilidad del aprendizaje y busca que éste se logre mediante la ostensión de los conceptos. La razón de base, en palabras de la maestra, es que «veía que muchos podían pero otros se quedaban atrás [...] es muy difícil, cuesta trabajo, porque es muchísimo tiempo».

TRANSFORMACIÓN DE LOS TÉRMINOS CONTRACTUALES MEDIANTE LA VALIDACIÓN

La maestra ha intentado una relación didáctica basada en una suerte de devolución que se orienta por los ejercicios del texto; lo ha hecho desde el primer vínculo con las fracciones y lo hará con más éxito en las sesiones restantes. Es una *devolución dosificada* según la cual el trabajo mediante estrategias personales y sin la participación del profesor se realiza en tiempos relativamente cortos. Otro rasgo de esta forma de devolución es que a la resolución de un problema matemático le sigue un tiempo estrictamente didáctico, en el que se constatan los resultados de la actividad antes de iniciar el que corresponde al siguiente problema o ejercicio. El princi-

¹⁵ Conviene señalar que en este recuperar la responsabilidad existe una paradoja bien caracterizada por G. Brousseau: «Entre más ocupa el maestro el lugar del alumno, menos logra que éste aprenda».

pio que orienta la acción docente es la corroboración del éxito en una etapa como condición para acceder a la siguiente.

Pero no es sino a partir de la quinta sesión dedicada a las fracciones cuando la maestra comienza a promover de manera efectiva una nueva relación con los objetos de saber, en el marco de la cual los niños se harán cargo de la validez de sus respuestas.

Un episodio crucial

En la transformación efectiva del contrato resulta crucial un momento en el que, durante la fase de conclusión correspondiente a la lección titulada «El día de la ONU» (inserta al final del apartado), la maestra lleva a la red primaria el siguiente fragmento del texto: «Sonia (la niña que aparece en el texto) dice que todas las banderas divididas en tres partes están divididas en tercios. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Sonia? Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu maestro».¹⁶

La afirmación de Sonia (el personaje del texto) es incorrecta, ya que algunas banderas están efectivamente divididas en tres partes iguales pero, por ejemplo, las tres partes en que está parcelada la bandera de Chile son desiguales entre sí. Esto da pie a un episodio centrado en la emisión de argumentos acerca de la validez (o no) de la postura de Sonia. Se genera entonces un debate en el que se expresan y confrontan racionalidades y se ofrecen evidencias sobre la validez sustentadas en conocimientos adquiridos previamente. Veamos el pasaje de referencia:

MAESTRA.- ¿Están de acuerdo en lo que dice Sonia?, ¿todas las banderas divididas en tres partes están divididas en tercios?<

NIÑOS (*algunos*).- ¡Sííí!

MAESTRA.- Tú, Tania, ¿qué dices, que sí?, explícanos por qué sí.

TANIA.- Porque las tres partes son iguales y se convierten en tercios.

MAESTRA.- ¡Ah!... ya dijiste algo muy importante, si dice Sonia: «Todas las banderas divididas en tres partes están divididas en tercios», ¿es cierto eso?<

NIÑOS (*algunos*).- Sí

MAESTRA.- A ver, Fernando, explícanos por qué sí [son tercios].

FERNANDO.- Porque son tres partes iguales.

¹⁶ La afirmación de Sonia, aquí motivo de validación, no es correcta, ya que si bien la bandera de Chile está dividida en tres partes, no está dividida en tercios.

Con la incorporación del *por qué* y *por qué sí* se intenta que los niños reflexionen en la incorrección de la respuesta de Sonia, ya que, aunque es válida para algunos casos, no lo es para el de la bandera de Chile. Sin embargo, la intención no se logra; el argumento que ofrecen los niños (incorrecto) se repite: «Son tercios porque son tres partes iguales» y la discusión parece cerrada. Este argumento, correcto matemáticamente, no incluye sin embargo todos los casos presentados en la situación específica del texto. Hasta que Adriana y luego una niña de nombre Valencia introducen una respuesta divergente diciendo «no», surgen elementos mediante los cuales avanza la reflexión en términos matemáticos:

MAESTRA.- [...] ¿Eh, Valencia?, acuérdate que cuando digamos que sí o que no, es porque pensamos algo, ¿no sabes por qué no?

VALENCIA (*no responde*).

MAESTRA.- A ver, Adriana, dinos por qué dices que no.

ADRIANA.- Porque la de Chile no está dividida en tres partes iguales.

MAESTRA.- ¿Dónde está [la bandera de] Chile? [...] Dice Adriana que Chile está dividida en tres partes, pero que esas partes no son tercios, ¿será cierto eso, Suri? ¿Tú qué dices, Suri, son tercios o no son tercios?

SURI.- No.

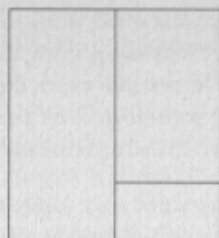
MAESTRA.- ¿Por qué no?

SURI.- Porque unos están más grandes [que otros].

Valencia no está en capacidad de expresar los elementos que sustentan su negación; en cambio, impulsada por el «¿Será cierto eso?» de la profesora, Suri construye un argumento basado en el tamaño de las partes: «No son tercios porque unos están más grandes que otros». Con ello, ha introducido como criterio de validez una condición esencial de las fracciones: la igualdad de las partes.¹⁷ A la profesora parece resultarle fundamental el criterio introducido, ya que busca destacarlo incorporando una situación en la que la desigualdad se convierte en inequidad:

MAESTRA.- [...] Ahora en lugar de bandera es chocolate, y lo voy a dividir entre Alejandra, Cintia y yo, ¿sí? Este pedacito (*el más pequeño*) se lo voy a dar a Alejandra, éste se lo voy a dar a Cintia y lo demás me lo voy a quedar yo (*al hablar va dibujando y señalando, el trozo mayor es supuestamente para ella*):

¹⁷ C. Margolinas llama criterio de validez a «un conocimiento dado cuando éste sirve al alumno para validar un resultado durante la fase de conclusión», en su texto *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, p. 131.



NIÑOS.- ¡Ah, eso no! (*muchas voces al mismo tiempo*)

MAESTRA.- ¡Ah, les estoy dando un tercio!

NIÑOS.- ¡Nooo!

MAESTRA.- Está dividido en tres partes.

NIÑOS.- ¡Nooo!

CINTIA.- Es como si estuviéramos viendo la bandera de Chile, que a uno le dan más espacio, a otro menos espacio [...]

MAESTRA.- [...] Entonces, ¿cuál sería lo que necesitamos para que sean tercios?

Varias respuestas al mismo tiempo, no se entienden.

ANAID.- [...] Dividirlo en tres partes iguales.

Se ha rechazado la postura de Sonia (el personaje del texto) mediante un criterio que se puede reformular del siguiente modo: *para ser tercios, las tres partes en que se divide el entero deben ser de igual tamaño*. La maestra ha aprovechado la cuestión planteada en el libro para promover la producción de pruebas que permitan aceptar o rechazar las afirmaciones. En vez de conformarse con pedir adhesión o rechazo a la afirmación en cuestión, solicita la producción de argumentos a favor de una u otra postura. De hecho, en lo que como antes dije pareciera una llamada de atención a quien utiliza el consenso como forma de validación, ella señala a sus alumnos la inconveniencia de actuar de esa manera. Lo hace en más de una ocasión; la siguiente participación —que antecede al episodio anotado en la introducción— corresponde a una de ellas:

MAESTRA.- A ver, muchachos, no íbamos a ganar nada ni a perder nada, simplemente era saber cuál es su posición, *no pueden cambiar un yo creo porque los demás digan que está bien...* si yo creo que robar es malo y voy a una casa donde todos creen que robar es bueno, ¿tengo que cambiar de opinión acerca del robo?

NIÑOS.- ¡Nooo!

Apartándose de las matemáticas, la maestra incorpora argumentos que

permiten justificar su importancia en el ámbito de esta disciplina. Y es que la cuestión —en el nivel de reflexión que ha alcanzado sobre la necesidad de justificar las respuestas— le resulta esencial. Como en la introducción se anotó: de no probarse las soluciones, es posible aceptar (y luego institucionalizar) respuestas equívocas simplemente porque el error es compartido por todos.

Producción de pruebas más complejas

Ciertamente, en el episodio relacionado con la bandera de Chile, los argumentos sobre la igualdad de las partes tardan en emerger y son modestos, pero suficientes como prueba de validez de la afirmación que se debate. La simplicidad, por otro lado, es natural, tiene que ver con la forma en que los niños (de nueve años) conciben la fracción y con el hecho de que es la primera ocasión en que la profesora no recupera la responsabilidad (para ofrecer ostensiones) cuando faltan las respuestas esperadas.

Más adelantada la progresión didáctica, aparecen argumentos más complejos. Nuevamente, sobre la base del libro de texto:

MAESTRA.- «Es cierto que la parte blanca en la bandera de Pakistán es $\frac{1}{4}$? ¿Por qué?»

(La bandera es como el esquema que se ve al final de esta página):

NINOS.- ¡Sí! ¡No! (sobresalen los «no»).

MAESTRA.- ¿No es $\frac{1}{4}$, entonces qué es? (no hay respuesta) ¿Es $\frac{1}{4}$, sí o no? ¿Quién me lo va a fundamentar?»

NiNA.- ¡Sí [es un cuarto]!

MAESTRA.- ¿Sí es $\frac{1}{4}$, por qué es $\frac{1}{4}$?

NiNA.- Sí, yo.

MAESTRA.- Quiero que me digan por qué sí o por qué no, ya ven por qué es muy importante fundamentar, no se vale sólo decir sí y no, sino decir sí por esto o no por esto. A ver, vamos a ver... Pablo.

Pablo.- No es un cuarto, porque no está dividida en cuatro partes iguales

MAESTRA.- ¿Y por eso no es un cuarto?»

PABLO.- No.

blanco	verde
--------	-------

Pablo sustenta su argumento en un criterio válido para definir los cuartos según su experiencia escolar: para que una parte de un entero sea un cuarto, el entero debe estar dividido en cuatro partes iguales. Este razonamiento, basado en la partición exhaustiva del entero, podría haberse reformulado: *para que una parte de un entero sea un cuarto, éste debe ser una de las cuatro partes iguales en que el entero podría dividirse*. Por supuesto, el matiz no es simple, pues implica una anticipación del resultado de dividir exhaustivamente el entero. Es probable que en su experiencia escolar previa los niños no hayan enfrentado este tipo de situaciones.

Ahora bien, tal como la interacción refleja, el argumento de Pablo no resulta convincente matemáticamente; entonces otros niños y niñas ofrecen los propios:

CINTIA.- Yo digo que sí, porque si usted mide esa parte (*se refiere a la parte blanca*) y lo vuelve a dividir (*se refiere al resto de la bandera*), es decir que toda la bandera sea dividida en cuartos, sí se puede dividir en cuatro partes iguales.

MAESTRA.- ¿Sí entendieron lo que dijo Cintia?

NIÑOS.- ¡Síiii! | ¡Noooo!

MAESTRA.- A ver, vamos a ver otra vez, vamos a ver, le tenemos que entender todos para ver si es cierto; a ver, otra vez, Cintia.

CINTIA.- Tenemos que medir la parte blanca y luego medir la otra (*la verde*) y ver si se puede repartirla en tercios (*se refiere a dividir la parte verde en tres partes iguales a la blanca*), ¿para qué?, para que la dividamos y ver si la parte blanca es un cuarto.

La bandera se divide entonces de la manera que Cintia propone:

blanco	verde	verde	verde
--------	-------	-------	-------

La conclusión que se deriva es la siguiente:

MAESTRA.- La parte blanca entonces es...

NIÑOS.- $\frac{1}{4}$! [...]

En este segundo episodio, la cuestión que se discute me parece más compleja que la discutida antes: definir si una parte de un *todo* es $\frac{1}{4}$ sin que el *todo* esté dividido exhaustivamente. Una niña, en una acción anti-

patoria, argumentó adecuadamente la validez de la afirmación en juego proponiendo una forma de verificarla: dividir en cuartos toda la bandera. La maestra la acepta y con base en ello se logra un acuerdo basado en razones matemáticas: la igualdad de las partes y la exhaustividad en la partición del todo.

LA ARGUMENTACIÓN SE HACE FRECUENTE EN LA CLASE

En las siguientes sesiones, la recuperación de la responsabilidad ante los desequilibrios didácticos (para ostentar) habrá disminuido notablemente. Por lo general, las participaciones de la profesora serán más breves, más interrogativas, y el espacio dedicado a la puesta en común y validación de las respuestas se ampliará de manera importante. Su promoción mediante la interrogación —aprovechando las situaciones del texto— se convierte en una actividad frecuente.

De entre los muchos episodios de exposición de pruebas (intelectuales) que tuvieron lugar en el transcurso de subsiguientes sesiones, me referiré sólo a uno, en el que la actividad de referencia consiste en repartos de galletas entre niños, y un niño ha introducido un problema de comparación entre las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$. Aquí, la elaboración y presentación de las pruebas no resulta tan fácil:

MAESTRA (*a manera de conclusión de la actividad*).- Si reparto cinco galletas entre cuatro niños les toca a $\frac{5}{4}$; si reparto cuatro galletas entre cinco niños les toca $\frac{4}{5}$ (*va señalando los repartos dibujados en el pizarrón*) [...]

DANIEL: Maestra, es igual.

MAESTRA.- ¿Cómo que es igual?

DANIEL: Pero al revés (*se refiere a las fracciones $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{5}$*).

MAESTRA (*lo interrumpe*).- ¿Pero es igual? A ver, qué prefieres que te dé: $\frac{5}{4}$ o $\frac{4}{5}$, a ver, vamos a hacerle *transa* a Daniel, ¿qué prefieres que te dé $\frac{5}{4}$ o $\frac{4}{5}$? (*algunos levantan la mano para indicar que quieren contestar*), ya le hice *transa*, ella dice que es lo mismo (*los niños se ríen*).

CINTIA.- ¡No, maestra!

MAESTRA.- $\frac{4}{5}$.

CINTIA.- No maestra, porque... (*la maestra la interrumpe*).

MAESTRA.- ¿Tú que dices, Yadira, qué prefieres: $\frac{5}{4}$ o $\frac{4}{5}$?

YADIRA.- $\frac{5}{4}$.

MAESTRA.- Yadira prefiere $\frac{5}{4}$ que $\frac{4}{5}$, ¿alguien prefiere $\frac{4}{5}$?

NIÑOS: ¡Nooo!

TANIA.- Sí.

MAESTRA.- Tania sí, ¿por qué, Tania, estás a dieta? (risas).

TANIA.- No, porque es lo mismo, maestra.

MAESTRA.- ¿Es lo mismo, *por qué?*

CINTIA.- No es cierto.

MAESTRA.- Ya le hice *transa* también a Tania. A ver, vamos a ver por qué no, si quieres ven y dime por qué no.

TANIA.- Si son $\frac{5}{4}$ nos da una galleta entera y luego otro cuarto.

MAESTRA.- En el primero, ahora fíjate en el segundo [reparto].

TANIA.- $\frac{4}{5}$.

MAESTRA.- A ver, dibújalos

(la niña dibuja $\frac{4}{4}$).

MAESTRA.- No, 4 de 5, Tania [no 4 de 4].

TANIA.- Sí, por eso (Tania parece estar confundida).

MAESTRA.- Cuatro de cinco, Tania, $\frac{4}{5}$, tomar cuatro de cinco partes, ésos no son $\frac{4}{5}$, ésos son $\frac{5}{4}$, ahora $\frac{4}{5}$, mira: 1, 2, 3, 4 (cuenta sobre una partición ya hecha en el pizarrón), ¿en dónde me están dando más?

TANIA (señala los $\frac{5}{4}$).

MAESTRA.- Ay, ¿ya ves?... Fíjense que no es lo mismo $\frac{5}{4}$ que $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$ es una galleta completa y $\frac{1}{4}$ es más que $\frac{4}{5}$, que ni siquiera es...

MAESTRA Y NIÑOS.- ¡Una galleta completa!

MAESTRA.- ¿Ya ven que no es lo mismo?, bueno ya, ¿en dónde nos quedamos?

Las dudas expresadas y los argumentos ofrecidos por los niños reflejan la mayor dificultad implicada en esta situación: la comparación de dos fracciones expresadas numéricamente. Se entiende que en este punto del aún incipiente proceso de comprensión de las fracciones se confunda el significado del numerador y del denominador, tal como se ve en la participación de Daniel. Se observan otras cuestiones: a) los argumentos centrados en sólo una de las dos fracciones implicadas; b) el carácter local de los argumentos matemáticos ofrecidos: $\frac{5}{4}$ es más grande porque toca a más de una galleta, mientras que $\frac{4}{5}$ ni siquiera es una galleta completa; c) la emergencia del segundo argumento por el impulso de la profesora.

Como quiera que sea, es un acercamiento incipiente a la comparación de dos fracciones traducido en la aceptación de una respuesta correcta: $\frac{5}{4} > \frac{4}{5}$. Por supuesto, no surge ni en ésta ni en sesiones posteriores una argumentación que incluya espontánea y explícitamente las dos fracciones implicadas. Sería una exigencia excesiva para quienes tienen apenas nueve años. Hasta el final de la secuencia, los argumentos se centrarán —como en este caso— en una de las fracciones sujetas a comparación, y el resto de la argumentación quedará implícito.

Cabe entonces destacar que los argumentos planteados a lo largo de la secuencia no mejorarían de una manera lineal. Ante la mayor complejidad de ciertas situaciones, aquéllos serían totalmente locales e incluso incompletos. Otras veces reaparecería su carácter más genérico y formal. Pero lo que se corrobora es la intención docente de no clausurar el trabajo intelectual sobre las situaciones y problemas mediante un acto de evaluación unilateral. La interacción más frecuente es muy diferente de la que resultó del hecho de no encontrar la relación entre el clavo y las tiras con las que se podría haber medido.

En este último caso, la respuesta de la profesora fue recuperar la responsabilidad para ostentar el conocimiento que no veía aparecer. Unas sesiones más adelante, su participación consiste principalmente en interrogar. Busca con ello que sus alumnos produzcan con recursos personales los conocimientos previstos y luego que ofrezcan evidencias de la validez de sus respuestas. Ella expresa de diferentes modos la preocupación por no bloquear la acción cognitiva. Uno es el siguiente:

MAESTRA.- Frecuentemente les preguntaba a los que no sabían, [pues] los que sabían construían muy rápido sus conocimientos, es más, algunas veces ni necesitaban usar el material, y el hecho de que te dieran la respuesta frenaba a los demás, o sea, como el alumno está acostumbrado a la palomita y al tache, entonces de repente ya te dieron la respuesta correcta, ¡ah!, pues yo ya no pienso [...] ya dieron la respuesta correcta, por decirlo así, «ya perdí», ya no hago nada; entonces me gusta preguntarle mucho al alumno que no sabe, conflictuarlo.

LA MAESTRA Y SU INTERPRETACIÓN DE LA ACCIÓN DE VALIDAR

Hemos dicho que, conforme a la disimetría propia de la relación didáctica, el profesor está en posibilidad de determinar unilateralmente lo que es correcto o incorrecto en las afirmaciones y producciones de sus alumnos. También puede apelar a argumentos que, sin ofrecer pruebas de la validez, logren que éstos se adhieran a una proposición o resultado, como si éste fuera válido. Por ejemplo cuando se usa la aprobación mayoritaria como medio de lograr aceptación de una respuesta: «Si todo el mundo admite p como correcto, entonces p es correcto»¹⁸ observada en el capítulo precedente. Sin embargo, el interés de la profesora por la validación de

¹⁸ D. Walton, *Informal Logic*, cit. por T. Miranda, *El juego de la argumentación*, p. 145.

los resultados basada en razones matemáticas crece progresivamente. A partir de cierto momento dice con frecuencia a los niños: «¿Por qué sí o por qué no?, no se vale nada más decir que sí o que no, hay que decir por qué», «Quiero que alguien me fundamente la respuesta». O utiliza otras expresiones que tienen la misma intención.

Sin embargo, la interpretación y la intención docente que subyacen a la acción de validar difieren de las consignadas en las propuestas oficiales. Conforme a éstas, la validación tiene sentido como elemento de autonomía intelectual, como posibilidad de ponderar —sobre la base de la elaboración de criterios personales y sin la mediación de «juicios externos»— los resultados de la propia acción. No es ése el sentido que la profesora otorga a la producción de argumentos. Para ella, el valor se ubica en otra parte:

Ya después, cuando de plano el grupo no responde, le preguntas al que sí sabe para que te dé su razonamiento y los demás lo empiecen a asimilar, ¿no?, yo creo que en algunas clases te has de haber dado cuenta de que fue así, que después de agotar a los que no saben, a los intermedios, de plano me iba con los que ya tenían la respuesta y «Explícame por qué», para que al alumno que no sabía y al que iba más o menos *les cayera el veinte* y supieran qué hacer y cómo hacerle, ¿no?

Es una interpretación y un uso que se apartan de las previsiones de la reforma. Tal interpretación —amalgama de nuevas y viejas ideas— no parece perturbar la puesta en marcha de la innovación, puesto que ha permitido sustituir la evaluación por la validación. Y si tal actividad efectivamente se mantiene mientras haya alumnos rezagados (que requieran observar los razonamientos de sus compañeros para avanzar), hay entonces garantía de su permanencia en la clase.

RESULTADOS DEL CONTRATO

Un resultado del contrato paulatinamente definido es el nivel de comprensión observado en las participaciones de los niños. En efecto, conforme se avanza en la progresión didáctica se aprecia una mayor comprensión de las fracciones. Muchos pasajes en nuestros registros autorizan tal afirmación; he seleccionado uno que en mi opinión valida la afirmación.

Los niños tratan de determinar, dada una fracción ($\frac{5}{4}$) y una suma de fracciones ($\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$), cuál de ellas es mayor. En el texto se propone averiguarlo «como ellos quieran»:

MAESTRA.- Bueno, esa niña (*que aparece en el texto*) dice «Me tocaron $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{4}$,» y el otro niño dice que le tocaron $\frac{3}{4}$, ¿tú cómo le harías, Jazmín, para averiguar a quién le tocó más o le tocó menos?

JAZMÍN.- Sumándolos (*probablemente se refiere a sumar $\frac{1}{2}$ más $\frac{1}{4}$ para luego compararlo con $\frac{3}{4}$*).

MAESTRA.- ¿Y cómo los vamos a sumar, sabemos sumar así? (*se refiere a que las fracciones que tendrían que sumar tienen distinto denominador*).

CINTIA.- Así no se puede.

MAESTRA.- ¡Ah!, entonces no sabemos sumar así, pero sabemos hacerlo de otra forma, ¿o no sabemos hacerlo de otra forma?<

MAYOLO.- Lo podemos hacer con dibujos.

MAESTRA.- Mayolo dice que lo podemos hacer con dibujos, ¿creen que lo podamos hacer con dibujos?, ¿tú qué piensas, Anaid?

ANAID.- Sí.

MAESTRA.- ¿Sí?, ¿cómo le haríamos? Tú, Daniel, ¿cómo le harías para saber a quién le tocó más?

DANIEL.- Con las galletas.¹⁹

MAESTRA.- Con las galletas, ¿también los podríamos hacer con las galletas?, ¿sí o no?<

NIÑOS.- Sí.

MAESTRA.- ¿Tú cómo le hiciste, Julio? Fíjense cómo le hizo Julio, (*él*) ni siquiera dibujó.

JULIO.- Yo lo saqué porque $\frac{1}{2}$ tiene $\frac{2}{4}$ y más otro cuarto son $\frac{3}{4}$, y aquí eran $\frac{3}{4}$.

Julio es, de entre los niños que participan en el episodio, quien expresa un pensamiento más avanzado en torno a la suma, la comparación y la equivalencia de fracciones implicada. Como dice la profesora «Ni siquiera dibujó» para encontrar la respuesta. Pero la participación de Cintia también refleja la comprensión del tema «Así (con denominadores distintos) no se puede», dice, y en seguida otros compañeros complementan su postura. La expresión, que al lector puede parecerle trivial, toma relevancia si se recuerda que es posible encontrar, al final de la primaria, niños y niñas cuya forma de sumar fracciones consiste aún en adicionar los numeradores y luego los denominadores.

¹⁹ Algunas lecciones del texto oficial dedicadas a fracciones, en particular las referidas al tema de equivalencia, se desarrollan con base en el reparto de galletas; seguramente la participación de Daniel hace alusión a dichas acciones.

CONDICIONES QUE POSIBILITARON EL CAMBIO DE REGLAS

La modificación en las representaciones docentes

Con base en sus concepciones, a su propio decir modificadas durante la experiencia de enseñar conforme al nuevo enfoque curricular, la maestra ha permitido que entren oficialmente en la clase las estrategias espontáneas, los conocimientos no enseñados, las respuestas diversas. Asimismo, paulatinamente ha dejado de considerar la ostensión o la explicación como condición de producción de aprendizajes. Aquéllas han sido sustituidas por la devolución (dosificada), la interrogación y la argumentación como medio de validación.

Pero las formas de creer y conocer no se modifican por un acto de simple voluntad. Hoy sabemos que las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son bastante resistentes a los cambios.²⁰ En este caso, para que tal modificación ocurriera y ello derivara en un cambio del contrato habitualmente celebrado, debieron cumplirse ciertas condiciones.

La presión externa

La maestra expresa con franqueza que de no ser por el compromiso contraído para poner en práctica la propuesta curricular, la incorporación de los principios de enseñanza oficialmente impulsados no hubiese ocurrido en su clase:

La solicitud que se me hizo de llevar a la práctica la propuesta me sirvió muchísimo, pues anteriormente había hecho a un lado esta forma de trabajo debido a la lentitud del proceso [...] Cuando empecé a trabajar sistemáticamente me di cuenta de que a pesar de que se lleva mucho tiempo sí se puede llevar a cabo y sirve para sacar el conocimiento al final [...] Pero debe haber un seguimiento para conseguir resultados, no hacerlo sólo una lección y a la otra volver al mecanicismo [...] Si no se hubieran llevado a cabo las observaciones de clase, hubiera adoptado la actitud de «no entendiste, lo siento, o sea, yo ya expliqué».

²⁰ Véanse, por ejemplo, A. Robert y J. Robinet, *Representations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, y M.-L. Peltier, «Representaciones de los profesores de escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza».

Hay otra cuestión que también favoreció la aceptación de la propuesta y que está vinculada a los alumnos.

Los resultados comprobados como producto de la actividad

Por razones de un compromiso externo, la profesora aceptó jugar el juego, pero durante éste se percató de capacidades que antes no había identificado en sus alumnos. «La verdad, tú los viste, tenían unos razonamientos increíbles», afirma. Estas capacidades corroboradas posibilitaron el avance del tiempo didáctico desde otro contrato. El equilibrio didáctico logrado permitió a su vez continuar en el juego.

...

En lo que sigue, y volviendo al punto en el que comienza el escrito, el periodo orientado por la matemática moderna, se analiza la actividad de un grupo escolar cuya profesora se iniciaba como tal. La experiencia que ella vive en su primer año de servicio, y la que ofrece a sus alumnos, permitirá profundizar, desde otra perspectiva, en la cuestión arriba mencionada.

4. LA TIENDA DEL PUEBLO

En la tienda del pueblo hay de todo un poco, así, las personas no tienen que ir tan lejos para comprar lo que necesitan.



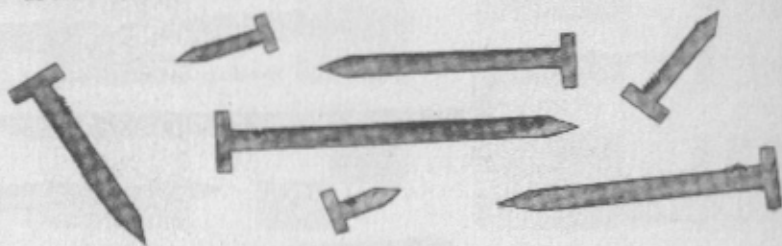
- 1 Don Rodolfo encargó unos clavos a su sobrino Juan, le dio dinero para comprarlos y una tira de papel para medirlos.

La tira era de este tamaño:



En la tienda Juan pidió clavos de tres tamaños:
de una tira
de media tira
de una tira y tres cuartos

El dueño de la tienda le mostró clavos de varios tamaños para que Juan escogiera.



Marca los clavos que debió escoger Juan.

- 2 Observa cómo algunos niños encontraron los clavos que debió escoger Juan.

Yo marqué la longitud de la tira en la orilla de una hoja de papel y así pude medir los clavos.



Yo construí una tira igual a la que está dibujada y con ella medí los clavos.



Yo nada más al tanteo vi cuáles eran.



Y tú, ¿cómo supiste cuáles clavos debió escoger Juan?
Comenta tu respuesta con otros compañeros y con tu maestro.

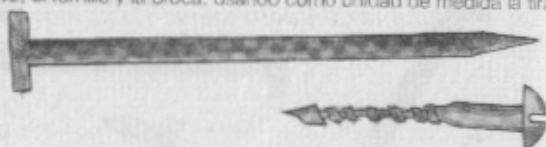
- 3 El dueño de la tienda dice que el clavo dibujado abajo mide $1 + \frac{1}{4}$ tiras. Utiliza el procedimiento de Rosa para encontrar la tira con la que se midió el clavo y téchala.



- 4 Según el dueño de la tienda, la broca mide $1 + \frac{1}{8}$ de largo. ¿Con cuál de las tres tiras se midió?



- 5 Averigua cuánto miden el clavo, el tornillo y la broca, usando como unidad de medida la tira dibujada.



UNIDAD DE MEDIDA

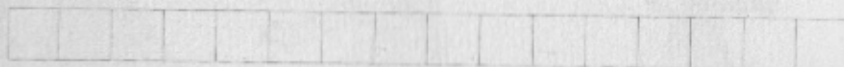


- ¿Cuánto mide el clavo?
 ¿Cuánto mide el tornillo?
 ¿Cuánto mide la broca?

- 6 El dibujo de abajo es una tira dividida en partes iguales.

¿En cuántas partes está dividida?

Colorea de rojo $\frac{1}{2}$ de la tira, de azul $\frac{1}{4}$ de la tira, de verde $\frac{1}{8}$ de la tira y de amarillo $\frac{1}{16}$ de la tira.



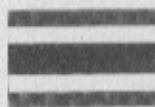
¿Qué parte de la tira quedó sin colorear?

1. EL DÍA DE LA ONU

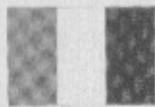
Para festejar el día de la ONU se realizó un festival en la escuela. Al grupo de Jaime le tocó hacer banderas de algunos países.



Puerto Rico



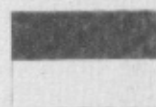
Tailandia



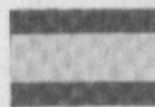
México



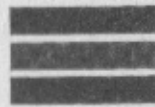
Uganda



Indonesia



España



Costa Rica



Chile



Kuwait



Paquistán



Nicaragua



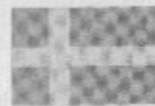
Jordania



Colombia



Panamá



Suecia



Congo

Todas las banderas aparecen sin escudo porque no las han terminado.

Comenta con tus compañeros y tu maestro lo que es el escudo de una bandera.

- 1** Los niños compraron varios pliegos de papel blanco, trazaron una bandera en cada pliego y después las colorearon.

¿Cuántos colores diferentes utilizaron?

¿Cuáles banderas están divididas en partes del mismo tamaño?

¿Cuáles están divididas en tres partes iguales?

- 2** Sonia dice que todas las banderas divididas en tres partes, estén divididas en tercios.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Sonia? Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu maestro

¿Es cierto que la bandera de Chile está dividida en tercios?

¿Por qué?

3 Completa la siguiente tabla.

País	Todas sus partes son:				
	mitades	tercios	cuartos	quintos	sextos
Puerto Rico	no	no	no	no	no
Tailandia					
México					
Uganda					
Indonesia					
España					
Costa Rica					
Chile					
Kuwait					
Pakistán					
Nicaragua					
Jordania					
Colombia					
Panamá					
Suecia					
Congo					

- 4** ¿Es cierto que la parte blanca en la bandera de Pakistán es $\frac{1}{4}$?
- ¿Por qué?
- ¿Qué fracción de la bandera de Chile está coloreada de rojo?
- ¿Qué fracción de la misma bandera tiene color blanco?
- ¿Y qué fracción tiene color azul?

- 5** Observa las banderas de la página anterior y escribe:
- el nombre de un país que tiene una bandera con franjas horizontales
- el nombre de un país que tiene una bandera con franjas verticales
- el nombre de un país que tiene una bandera con dos franjas perpendiculares
- el nombre de un país que tiene una bandera con una franja inclinada

Recuerda:

Para que una parte sea $\frac{1}{4}$ es necesario que la unidad esté dividida en cuatro partes iguales, o bien, que la parte quepa exactamente cuatro veces en la unidad.

Por ejemplo, en la bandera de Pakistán, la parte blanca es $\frac{1}{4}$.



HILOS DE COLORES

Juliana contó que «entre los huicholes, lo más importante que aprenden las niñas es a bordar: deben saber unir el hilo y combinar bien los colores».



- 1** La mamá de Julián les enseñó a las niñas a bordar y, para ello, les repartió los hilos que necesitan. Estos son los hilos que les va a dar para hacer bordados como los de la ilustración de arriba.



Si la mamá de Julián le da a cada niña el mismo número de trozos de hilo, ¿cuántos trozos de hilo azul le dará a cada una?

¿Cuántos trozos de hilo rojo?

¿Cuántos trozos de hilo amarillo?

¿Qué procedimiento utilizaste para resolver las preguntas?

¿Hiciste dibujos? ¿Buscaste el número perdido en la tabla de multiplicar?

¿Utilizaste otro procedimiento? Discútelo con tus compañeros.

- 2** Reparte los siguientes hilos entre 10 niñas; puedes hacer dibujos o buscar el número perdido en la tabla de multiplicar.



Completa las siguientes expresiones; observa el ejemplo:

Si se reparten 20 hilos naranja entre 10 niñas, le tocan 2 hilos a cada niña.

Si se reparten 30 hilos verdes entre 10 niñas, le tocan 3 hilos a cada niña.

Si se reparten 10 hilos cafés entre 10 niñas, le toca 1 hilo a cada niña.

- 3** Observa los repartos de la página anterior; luego, completa las expresiones que siguen:

Cuando repartiste 12 hilos azules entre 6 niñas, ¿le tocaron 2 hilos a cada niña? _____

Este reparto también lo puedes anotar así: $12 \div 6 = \square$

La multiplicación que corresponde a este reparto es: $6 \times \square = 12$

Cuando repartiste 18 hilos rojos entre 6 niñas, ¿cuántos hilos le tocaron a cada niña? _____

Este reparto también lo puedes anotar así: $18 \div 6 = \square$

La multiplicación que corresponde a este reparto es $6 \times \square = 18$

- 4** Haz los siguientes repartos; luego, completa las expresiones:

4 hilos entre 4 niñas:

$$4 \times \square = 4 \quad 4 \div 4 = \square$$

3 hilos entre 3 niñas:

$$3 \times \square = 3 \quad 3 \div 3 = \square$$

30 hilos entre 3 niñas:

$$3 \times \square = 30 \quad 30 \div 3 = \square$$

50 hilos entre 10 niñas:

$$10 \times \square = 50 \quad 50 \div 10 = \square$$

CUARTA PARTE

UN BREVE RETORNO A LA MATEMÁTICA MODERNA

Capítulo 14

LAS PRÁCTICAS INICIALES, O AL CONTRATO DIDÁCTICO UNA DOBLE SENSIBILIDAD

INTRODUCCIÓN

Estamos próximos a finalizar el recorrido que se propuso como tema de este libro. Por lo hasta aquí expuesto, puede verse que las formas de apropiación de las que en un momento constituyeran novedades curriculares fueron y han sido diversas. En algunas de ellas, los objetos de saber oficialmente propuestos son por completo transformados; en otras, hay una franca marginación. También es posible ver, aunque con menos frecuencia, una relativa cercanía con las proposiciones oficiales. Afortunadamente pudimos testimoniar transposiciones que no son versiones degradadas de las propuestas oficiales.

Observamos la incorporación de tiempos adidácticos en el periodo definido por la matemática moderna o, a la inversa, su escasa presencia en la época en que aquéllos se postulan como el camino óptimo para el aprendizaje. El análisis del trabajo realizado por una profesora de cuarto grado aporta luces sobre la posibilidad de aceptación de esta forma de enseñar. Una de las condiciones que parecen importantes es la presión de agentes externos, en este caso el compromiso contraído con una observadora para «enseñar sin controlar», y, sobre todo, el logro de un equilibrio didáctico bajo un nuevo contrato. Empero, la lección que de esto pudimos extraer dejó sin responder algunas preguntas, por ejemplo, ¿por qué un profesor decide optar por la enseñanza *lineal*? A continuación (haciendo un breve retorno al periodo de la matemática moderna), a partir de la acción de una profesora novel se recogen elementos para responder esta interrogación.

LA PROFESORA Y EL GRUPO

Lamaré María a la docente que protagoniza los episodios motivo de este capítulo. El grupo a su cargo es de quinto grado y está conformado por treinta alumnos. Son niños y niñas de un bajo nivel socioeconómico que, sin embargo, se presentan a la escuela sumamente aseados y bien uniformados. La maestra María desarrollaba su primer año de ejercicio profesional cuando observamos sus clases de matemáticas. Es egresada de la primera generación de profesores que cursaron la carrera de profesor de educación primaria con nivel de licenciatura. Supuestamente, la modificación de la carrera implicaba no sólo el prerrequisito del bachillerato, sino una enseñanza más moderna, acorde con las teorías psicológicas y pedagógicas de la época, entre las que destacaba la psicogenética de Jean Piaget. Entre los atributos de la maestra está la dedicación que muestra en la preparación y el desarrollo de sus clases, así como su interés por instrumentar una pedagogía ostensiva. Como dije antes, su actuación proporciona elementos para comprender las decisiones que llevan a adoptar una cierta forma de ejercer el oficio de profesor.

UNA LECCIÓN SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

Objeto de enseñanza: la suma de enteros en la recta numérica

La recta numérica es un modelo que permite representar el orden en el conjunto de los números naturales y enteros. Se introdujo en las escuelas primarias del mundo con las reformas signadas por la matemática moderna, bajo la idea de que facilita la comprensión del orden entre los números enteros y sus operaciones.¹ En México, la introducción se hacía desde el primer grado mediante un recurso didáctico bastante interesante: una rana que se desplazaba mediante saltos, hacia la izquierda o la derecha sobre la recta, según se tratase de sumar un número positivo o uno negativo. Al maestro de primer grado se le explicaba: «el concepto de suma se presenta en primera instancia por medio de la idea de juntar colecciones. Sin embargo, más adelante se presenta la idea de recta numérica, idea que es central en matemáticas. Utilizando la recta numérica, la operación de suma puede describirse por medio de corrimientos, esto es lo que se persigue con el juego de la rana».²

¹ Véase P. Ernest, «The number line as a teaching aid».

² C. Ímaz (coord.), *Matemáticas primer grado. Libro del maestro*, p. 7.

El trabajo sobre la recta numérica continuaba con diversos niveles de complejidad y formalización a lo largo de la educación primaria; en los últimos grados, el desplazamiento a la derecha o a la izquierda correspondía explícitamente a los números positivos o negativos. Las operaciones se formalizaban utilizando expresiones del tipo: $8 + \bar{4} = 4$. También, en algún momento, se incorporaban problemas que implicaban un manejo intuitivo de los números enteros. Por ejemplo, se calculaban temperaturas o alturas en relación con el nivel del mar.

Acorde con todo esto se desarrolla la actividad matemática en el grupo de la maestra María.

Acercamiento inicial a la recta numérica: construcción de una definición

MAESTRA.- Hoy vamos a hablar sobre la recta numérica. Esto ya lo han visto en otros años... A ver, díganme... ¿qué es una recta?<

NIÑO.- Es una línea partida en pedacitos.

MAESTRA.- Es una línea partida en pedacitos... *(el tono indica que la respuesta no es satisfactoria)*

NIÑO.- Es una varilla que tiene números.

MAESTRA.- Es una línea que tiene números... *(recalca la palabra línea, con el tono indica que aún no le satisface la respuesta).*

NIÑO.- ¿Está dividida en centímetros?

MAESTRA.- Pues no, no necesariamente en centímetros [...] pero vamos a ver que esa línea puede ser horizontal, o sea acostadita, o vertical, o sea paradita [...] Ahora, esta línea, como nos estaba diciendo Óscar, ¿verdad?, que estaba partida en pedazos; bueno, pues sí, [...] y cada uno de esos pedacitos se va a llamar segmento, ¿sí?, cuando dividimos una línea en partes iguales, a cada uno de esos pedacitos lo vamos a llamar segmento, ¿sí? Escribimos en nuestro cuaderno *(los niños sacan el cuaderno, la maestra continúa)*: Recta numérica *(enfática, con el tono indica que deben escribir)*. Recta numérica, punto y aparte [...] Recta, escribimos recta, dos puntos y seguido: ¿Qué será?, qué dijimos que era recta? [...] <

NIÑO.- ¿Un segmento? *(dudoso)*.

MAESTRA.- ¿Un segmento? No, ¿qué dijimos que era recta?<

NIÑO.- Una línea que está dividida en segmentos.

MAESTRA.- Bueno, *¡parecido, parecido!*, pero nada más lo que es recta, *ahorita no digan nada de segmentos, ¿quién se acuerda?, es algo de línea...*

NIÑO.- ¿Una línea que podía ser horizontal o vertical? *(dudoso)*.

MAESTRA.- ¡Ajá! Entonces vamos a escribir que una recta es una línea que puede ser horizontal o vertical *(espera a que los niños escriban; los*

niños anotan en su cuaderno). Ahora escribimos segmento [...] ¿Quién podría recordar qué es segmento?

NIÑO.- Son los pedacitos en que está dividida.

MAESTRA.- Ajá, son los pedacitos en que está dividida, entonces vamos a apuntar que los segmentos son partes de la recta que tienen igual tamaño (*los niños escriben*). Ahora, *si juntamos lo que es la recta y lo que es segmento*, las dos cosas que acabamos de escribir ahorita, entonces, *podríamos decir lo que es la recta numérica* [...] A ver, ¿quién se imagina lo que es una recta numérica?<

(*ningún niño responde*). ¿Qué será una recta numérica, Luis Miguel?

NIÑO.- ¿Una recta que sirve para hacer operaciones?

MAESTRA.- Bueno, nos va a servir para hacer operaciones, pero leyendo [lo que acabamos de escribir], fíjense: dice que recta es una línea que puede ser vertical u horizontal, y que los segmentos son partes de igual tamaño ¿qué creen que será una recta numérica?

NIÑOS.- (*silencio*).

MAESTRA.- *Leyendo esas dos definiciones, si las juntamos, ¿cómo podríamos hacer una única definición?*, a ver, Julio.

JULIO.- ¿Una línea con números? (*dudoso*).

MAESTRA.- Una línea con números, pues *por ahí va, por ahí va*, ¿quién me quiere completar lo que acaba de decir Julio? [...]

IGNACIO.- ¿Es una línea con varios segmentos?

MAESTRA.- ¡Ahí está! (*el tono indica aprobación*) A ver, Alma Lilia, tú querías decir algo.

ALMA.- Lo que dijo Ignacio.

MAESTRA.- ¿Sí?, entonces una recta numérica va a ser una línea horizontal o vertical que va a estar dividida en partes iguales que se llaman segmentos [...] y sobre cada partecita nosotros podemos representar números.

La relación con el objeto de saber: la preeminencia de formalizaciones y procedimientos

Como se puede apreciar en el episodio, la relación inicial con el objeto de saber (la recta numérica) se realiza a través de una definición. El interés de la maestra por las formalizaciones matemáticas se muestra no sólo por su introducción en el primer momento de la progresión didáctica, sino también en que incorpora una no solicitada en los programas o los textos oficiales y que resulta incluso innecesaria para cubrir las demandas de éstos. En efecto, en el quinto grado, el *contenido de saber* vinculado con la recta

y expresado en términos de objetivos era el siguiente: *Efectuar adiciones de números de una cifra utilizando la recta numérica.*

Este objetivo a su vez se desglosaba en dos más específicos: «Representar los números enteros positivos en la recta numérica» e «Ilustrar la suma de dígitos sobre la recta numérica».³

Para lograr lo anterior no se hacía necesario introducir definición alguna sobre la recta numérica. Ésta, conforme al texto oficial, era sólo un instrumento para la realización de las sumas y no un objeto de reflexión conceptual.⁴ La realización correcta de tales ejercicios (así como la esporádica inserción de algunos problemas) constituiría índice suficiente para suponer que el *objeto de enseñanza* se había convertido en un *saber aprendido*.

Por supuesto, la realización de los ejercicios derivados de los objetivos antes citados —y que se plantearían más adelantada la clase— implicaba que los niños tuvieran conocimientos acerca de la recta numérica y de la manera en que ésta puede utilizarse tanto para representar el orden de los números como para modelar la suma de enteros; ellos deberían saber que:

- A cada uno de los puntos equidistantes que determinan los segmentos sobre la recta corresponde un número entero.
- La suma y la resta pueden representarse en la recta mediante desplazamientos.
- Sumar un número positivo implica un desplazamiento a la derecha.
- Sumar un número negativo implica un desplazamiento a la izquierda.
- El desplazamiento correspondiente al primer sumando debe iniciarse a partir del punto correspondiente al cero.
- El desplazamiento correspondiente al segundo sumando se inicia en el punto en que finalizó el primero; es decir, los sumandos se representan mediante desplazamientos sucesivos a partir del cero, donde el punto de partida para el segundo es el punto de llegada del primero.
- La suma buscada corresponderá al punto en que se haya finalizado el último desplazamiento, ya que geométricamente corresponde a la suma de la longitud de los dos desplazamientos.

³ Secretaría de Educación Pública, *Libro del maestro. Quinto grado*, pp. 65 y ss.

⁴ El doble papel de los conceptos matemáticos: *instrumento* y *objeto*, ha sido analizado por R. Douady; el primero se refiere al uso o la creación de herramientas para resolver problemas; como se ha mencionado ya en otro apartado, el segundo designa al concepto en tanto objeto cultural que encuentra un lugar en el edificio del saber reconocido socialmente en un cierto momento (véase R. Douady, «Jeux de cadres et dialectique outil-objet»).

Pero como ya se ha dicho, lo anterior no hacía necesaria ninguna definición de recta numérica ni de segmento, y sin embargo la maestra las incorpora. Este patrón institucionalizante se repite en las clases observadas (véase cuadro al final del capítulo). Tal relación con los objetos de saber implica unas ciertas marcas de que el saber ha sido adquirido y una cierta forma de interacción que permite que tales marcas aparezcan. Es decir, se sustenta sobre un cierto contrato didáctico.

El contrato celebrado, orientado a descubrir

El primer contacto con la recta numérica se regula mediante un contrato tendiente a hacer descubrir, pues se busca la construcción colectiva de un saber: la definición de recta numérica. Conforme a tal contrato, la maestra se atribuye a sí misma un buen número de responsabilidades:

- Dirigir un interrogatorio de preguntas cerradas para que los alumnos obtengan la definición sin que ella tenga que enunciarla.
- Obtener índices (mediante las respuestas dadas durante el interrogatorio) de la eficacia del proceso promovido.
- Incorporar, cuando el tiempo didáctico se detiene, índices comunicativos tales como el tono de voz para hacer que los alumnos se encaminen hacia la definición esperada.

A los niños, por su parte, les corresponde:

- Seguir los interrogatorios que la maestra promueve y responder a las preguntas que plantea.
- Interpretar los códigos didácticos de la profesora para evaluar ya sea la corrección de sus respuestas o la distancia con las esperadas.

Pero es pertinente preguntarse si, devenidos necesarios los índices comunicativos, la actividad realmente se ubicaba en el ámbito intelectual.

¿La interrogación promovía realmente el razonamiento?, o la detención del tiempo didáctico

El aprendizaje por descubrimiento preconizado en los documentos de la época, descansa en la confianza de que el interrogatorio orientará a los niños hacia las nociones matemáticas previstas refinando las nociones

intuitivas que ya tienen al respecto.⁵ En el caso de la clase que nos ocupa tal intención encuentra dificultades; una de orden lógico: de refinar y conjuntar «lo que es recta» y «lo que es segmento» (ambas, nociones geométricas introducidas por la maestra) no era posible derivar una formulación que incluyera cuestiones numéricas, tal como la maestra pretendía. Así, por más que se afanan, los niños no ofrecen la definición esperada.

A la anterior dificultad se agrega otra de orden distinto. Cuando en algún momento un niño responde «Es una recta que sirve para hacer operaciones», tal formulación —no derivada de los elementos proporcionados por la maestra pero correspondiente a lo que según su experiencia previa los niños podrían entender como recta numérica— es rechazada. Y el rechazo obedece no a la falta de validez sino a que la maestra tiene prevista otra formulación. La respuesta se rechaza, pues, por razones didácticas, no intelectuales. Entonces, los alumnos comienzan a dudar del éxito que tendrán sus respuestas y toman una actitud cautelosa en la búsqueda de la definición que la profesora desea. El tiempo didáctico se detiene.

Ante la detención del tiempo didáctico: cerrar las preguntas, agregar información, introducir índices comunicativos, repetir

Enfrentados a la responsabilidad de obtener la definición de recta numérica, los niños no daban las respuestas que la profesora deseaba. Respuestas como «segmento», «línea que está dividida en segmentos», «línea que puede ser vertical u horizontal», habían sido rechazadas. El interrogatorio orientado a construir la definición no iba por buen camino, ¿cómo responde la maestra a este desequilibrio? Utiliza diversos mecanismos buscando restablecer el equilibrio perdido:

Incorporar índices no intelectuales (o el deslizamiento del registro). «Por ahí va, por ahí va» o «Parecido, parecido» son frases que buscan indicar el camino. El tono de voz de la maestra y su aprobación (no argumentada) a algunas respuestas se convierten finalmente en elementos que permiten llegar a una formulación inicial de recta numérica que logra aprobación: «Una línea con varios segmentos».

Tal aprobación tiene consecuencias: cuando el niño que expresa la formulación es aprobado —¡Ahí está!, dice la maestra— la niña interrogada en el siguiente turno responde: «Eso es lo que yo quería decir, lo que dijo Ignacio». Me parece que es la aceptación por parte de la profesora y no

⁵ Véase Secretaría de Educación Pública, *Matemáticas. Cuarto grado. Libro del maestro*, p. 8.

una coincidencia real con la respuesta del compañero la que constituye el criterio para ofrecer (confirmando o modificando) la propia respuesta.

Y la definición finalmente aprobada es incompleta pues no incluye la componente numérica indispensable en la formulación buscada, y cuando aquélla se elabora, el registro de la actividad se ha desplazado. La actividad que ahora se despliega ya no consiste en razonar en términos del contenido matemático (a partir de las ideas intuitivas) sino de encontrar (si es necesario adivinando) la respuesta que la profesora quiere escuchar; también, en dar respuestas que han sido previamente aprobadas, aun desconociéndose el motivo de la aprobación. Ha tenido lugar el efecto Topaze.⁶

La negociación de las respuestas se ha hecho a la baja, tanto por la forma de obtenerlas como porque son incompletas. La maestra acepta la formulación parcial producida por un niño: «[Una recta numérica es] una línea con varios segmentos». Es finalmente ella quien, al institucionalizar la formulación, agrega el componente numérico: «Y sobre cada partecita [de la línea] podemos representar números», dice. Al serle indispensable empujar el tiempo didáctico ya largamente estancado necesita también agregar la información que, sabe, no vendrá de los alumnos. De esta manera, la actividad puede transitar a una siguiente fase.⁷

Segunda fase: trazo de rectas numéricas siguiendo instrucciones de la maestra

La repetición es una actividad frecuente en este grupo, es una forma de empujar el tiempo didáctico. Tal actividad toma forma en la segunda fase de la clase, desplegada después de elaborar la frágil conclusión sobre la recta.

La maestra solicita a los niños trazar una recta en el cuaderno. Con base en su orientación ostensiva, va mostrando cómo y de qué medida trazar la «recta» y delimitar los segmentos. Se observa que algunos, a pesar de las indicaciones, tienen dificultades para realizar la actividad: preguntan reiteradamente a la maestra cuestiones como: «¿Le marcamos con lápiz o con color?», «¿Le ponemos números?», «¿De un centímetro o de dos?», «¿Pasamos dos renglones?». Cada vez, la maestra responde dando indicaciones precisas. También, en varias ocasiones, dice a los niños que guarden silencio y «pongan atención» al hacer el trabajo. Con esta dinámica se trazan varias rectas numéricas.

⁶ Este efecto, identificado por G. Brousseau, es comentado en el primer capítulo de este libro.

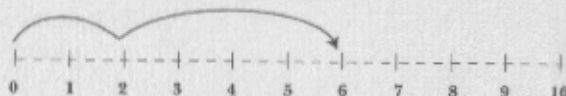
⁷ En el resto de las clases en que estuvimos presentes en este grupo observamos un patrón similar al analizado en estos incisos.

A mi parecer, con esta actividad la profesora busca que los niños aclaren para sí la noción de recta numérica; la claridad conceptual antes no lograda tiene posibilidad de ser alcanzada mediante la repetición.

Y a pesar de que no se ofrecen a los alumnos las condiciones necesarias para formular la noción de recta numérica, a algunos de ellos las experiencias previas les han permitido tener ciertos conocimientos sobre el tema. De esto da cuenta el siguiente episodio que, veremos, resulta en un desencuentro didáctico.

Tercera fase: ostensión de la suma de enteros sobre la recta: un episodio solapadamente crítico

MAESTRA.- [...] Ahora vamos a repasar lo que ya hemos visto desde cuartito año, vamos a ver cómo en esta recta (*señala en el pizarrón*) podemos ir sumando los números... por ejemplo... ¡Andrés, si yo estoy aquí! (*Andrés está viendo hacia el patio*). Empiezo desde el cero, y doy dos saltitos, aquí ya recorrí esta distancia, ¿verdad? (*al hablar marca una flecha sobre la recta, del cero al dos*). Pero si a mí se me ocurre, a partir de este punto (*señala el dos*), dar otro salto hasta este número (*marca con una flecha hasta el seis*), en total ¿qué distancia recorrí sobre la recta?< (*la recta queda como se ve en la figura*).



NIÑO.- ¡Seis!

MAESTRA.- ¿Seguro que seis? (*el tono indica desaprobación*).

NIÑOS (*pocos*).- Ocho.

MAESTRA.- ¡Ocho!, ¿y por qué ocho?, a ver Andrés (*Andrés es de los que contestó ocho*).

ANDRÉS.- Se hace una suma: dos, seis... cuatro... seis... (*se confunde, no continúa*).

MAESTRA.- ¡Bueno!, dices que son seis. Alce la mano el que cree que sí es seis, que avancé seis (*el tono de la maestra parece indicar a los niños que no deben contestar seis*).

Observación de la investigadora: *Se ve desconcierto en la cara de los niños, sólo unos pocos levantan la mano indicando que quieren responder.*

MAESTRA.- (...) ¿Cuánto habremos avanzado de aquí acá? < (Señala en la recta del 0 al 6).

NIÑO.- Ocho (luego dos o tres más también dicen ocho, siguiendo al compañero).

MAESTRA.- Ocho (el tono de la maestra parece aprobar la respuesta). Ocho, ¿por qué ocho?

NIÑO.- Se suman dos más seis. (se genera un murmullo, muchos niños comentan con el compañero en voz baja).

MAESTRA.- ¡Exactamente!, porque primero di dos saltitos, avancé dos segmentos; y después di otro salto con seis pedacitos más... si yo sumo los dos primeros más seis que salté después, voy a tener en total //

NIÑO.- ¡Maestra!

MAESTRA.- Ocho espacios (no atiende al niño).

NIÑO (interrumpe a la maestra).- ¡Maestra!, en tercero me la enseñaron, pero me decían que si tenía que sumar dos más seis, pusiéramos dos y luego contábamos seis hasta... la cantidad que fuera.

MAESTRA.- Pero ahorita lo vamos a hacer de otra manera, ¿sí? (en tono enérgico)... Muy bien (se dirige nuevamente al grupo).

(El niño expresa en su cara cierta confusión pero ya no dice nada).

MAESTRA.- Entonces tenemos ahí ya nuestra suma (señala el pizarrón): Dos saltitos que dio primero, más seis, ¿verdad, Andrés? (repite nuevamente los movimientos sobre la recta, en realidad modela $2 + 4$). Lo copiamos en su cuaderno, ¡rapidito! (a la vez que habla anota la suma $2 + 6 = 8$).

La prohibición del ingreso al registro epididáctico

Aunque los programas y textos oficiales vigentes tenían ya quince años en las escuelas cuando se realizó esta observación y en las escuelas normales había cursos dedicados a analizar los materiales oficiales para la educación primaria, algunos niños se mostraban más aptos que la profesora para modelar sumas en la recta numérica. Uno de esos niños intenta señalar a la maestra la confusión en que ha incurrido diciéndole cómo lo había aprendido en tercer grado. Pero la maestra no acepta la participación de sus alumnos en el registro epididáctico,⁸ éste sólo le corresponde a ella. Así, la

⁸ Recuérdese que Chevallard, en su escrito *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*, utiliza este término para delimitar las referencias explícitas

clase continúa con base en una confusión pues no había coherencia entre las sumas planteadas y su modelación en la recta.

Quienes ya conocían el tema se encuentran entonces ante un dilema: responder de la manera que como sujetos cognoscentes les parece coherente o hacerlo de la manera en que la maestra lo solicita. Finalmente, la duda se silencia durante la realización de una serie de ejercicios que les son propuestos.

Cuarta fase: ejercitación de la suma de enteros sobre la recta numérica

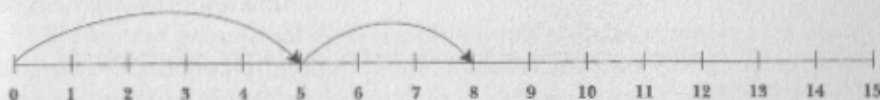
La maestra solicita trazar seis «rectas iguales» en el cuaderno (...). En cada una de ellas se realiza la suma con dígitos que la profesora va anotando en el pizarrón; los cálculos correspondientes a las tres primeras se hacen bajo su dirección, pues muestra en el pizarrón la manera de hacerlo utilizando para ello las respuestas que los alumnos dan a sus preguntas.

En todos los casos, si bien la suma aritmética se realiza correctamente, la modelación sobre la recta que la docente propone es como en el siguiente ejemplo, en el que supuestamente se modelan cinco y ocho saltos respectivamente:

MAESTRA.- Cinco, y llegamos hasta aquí (*dibuja la flecha hasta el cinco*) [...] de aquí saltamos hasta el ocho... no podemos empezar desde el cero, porque ya llegamos hasta aquí (*señala el cinco*) y de aquí nos vamos a trasladar hasta el ocho (*y dibuja la flecha hasta el ocho*). Entonces, en total, ¿cuántos saltitos di?<

Niños.- Trece

$$5 + 8 = 13$$



Como puede verse, en realidad no se modelan los cálculos realizados. El problema reside en que los conjuntos correspondientes a una suma son

de los participantes a los términos del contrato didáctico; en este caso la referencia sería a la validez del saber introducido.

disjuntos y la maestra —en su modelación— no lo considera así. Ha cometido un error no de cálculo, sino de modelación sobre la recta.⁹ Los resultados, por lo mismo, se obtienen en medio del desconcierto, pero en esta fase ya nadie expresa su sentimiento a la maestra, todos permanecen callados, y ella (aparentemente) no presta atención al hecho. Las siguientes respuestas orales muestran que al menos públicamente, y por ahora, los niños terminan aceptando las reglas de la profesora:

MAESTRA.- ¿Qué números voy a sumar aquí?

Niños.- Tres y seis!

MAESTRA.- ¿A dónde llego primero?

Niños.- Al tres.

MAESTRA.- Ya llegué aquí (*al tres, dice dibujando una flecha*), ¿ahora hasta dónde voy a saltar?

Niños.- Al seis | Al nueve.

MAESTRA.- ¿Hasta dónde? (*enérgica*).

Niños: Hasta el seis.

Durante la realización de las siguientes sumas, que ya no se resuelven en el pizarrón, la maestra pasea por entre las bancas y en más de una ocasión dice: «¡Como no pones atención luego no sabes!» u otras cosas parecidas.

Lo que prima al final del ejercicio, en mi opinión, es la aceptación de un contrato absolutamente desigual: responder de la manera que la maestra solicita, aun cuando las respuestas no tengan justificación racional. En este punto la interpretación de los errores ha sufrido una transformación sustancial: en vez de ser considerados resultado de la falta de coherencia en la presentación del contenido —que únicamente un niño se atrevió a señalar— son considerados resultado de la falta de atención. Pero al continuar la actividad la profesora se percató de su error.

Quinta frase: resolver «conforme al libro de texto», resolución encubierta del episodio crítico

Mientras los niños terminan el ejercicio anterior, la maestra lee en silencio la página 79 del libro de texto (véase inserción al final del apartado);

⁹ P. Ernest, en «The number line as a teaching aid», llama la atención sobre la diferencia entre una y otra cosa, también sobre el hecho de que por lo general no se tiene conciencia de esta diferencia.

luego, solicita a los niños sacar el libro y da la siguiente indicación: «Ahora vamos a ver cómo dice el libro que resolvamos este ejercicio. Vamos a resolver como ahí dice, nada más la página 79» (y los niños proceden a resolver conforme se indica en el texto). Luego, la maestra anota en el pizarrón otros ejercicios similares; los niños los realizan mientras ella atiende a algunas madres de familia que vienen a tratar asuntos relacionados con el aprovechamiento escolar de sus hijos. Los niños que van terminando sacan algún libro y lo hojean, o platican en voz baja con su compañero de banca. No hay una fase de conclusión.

Según las reglas del contrato celebrado, lo que la profesora considere error no puede permanecer circulando en el grupo. Para ello los ejercicios propuestos en el libro de texto resultaron oportunos. Al decir: *Vamos a resolver como ahí dice*, se da solución a un episodio crítico y la docente recupera el dominio del contenido, tomándolo del texto. Porque como el texto indica, además de ser correcto, es congruente con la manera en que los niños aprendieron a modelar sumas en grados anteriores. Pero es importante resaltar que en la fase anterior a los niños «les ganó» la sensibilidad al contrato y no las buenas razones que como sujetos cognoscentes pudiesen haber ofrecido; las reglas impuestas por su profesora tal vez no les dejaron otra opción.

Una relación de eficacia vulnerable

La relación didáctica establecida entre la maestra María y sus alumnos es regulada por distintos contratos: de ostensión o de descubrimiento en el primer contacto con los objetos de saber; de condicionamiento más avanzada la progresión didáctica, pues se trata siempre de repetir (ver cuadro al final del apartado). Su actualización o abandono obedece a requerimientos de la progresión didáctica, así como a necesidades de restablecimiento del equilibrio didáctico.

El objetivo primordial de la relación establecida es vincular a los alumnos con dos aspectos de los objetos matemáticos: las definiciones y los procedimientos; el reto de la docente (y de los alumnos) es la obtención de respuestas que muestren su dominio. Y las respuestas finalmente lleguen. Empero, acaba por no ser importante el medio por el cual se obtienen y el registro de la actividad es generalmente desplazado a la interpretación de códigos comunicativos. Este desplazamiento se debe al menos parcialmente a que —por falta de destreza didáctica— la maestra no cumple adecuadamente los términos de los contratos que establece. Por ejemplo, cuando promueve el descubrimiento, no plantea interrogatorios mediante los cuales los alumnos puedan, «refinando sus nociones intuitivas»

obtener las definiciones que ella se abstiene de enunciar.

En términos de la progresión didáctica: si el (los) contrato(s) estable- cido(s) fracas(a)n el tiempo didáctico se detiene. Pero el fracaso no es algo que se pueda sostener. Y como la profesora no modifica de fondo los tér- minos de la relación establecida—aun cuando repetidamente ésta no ge- nera las respuestas previstas—, crea mecanismos de regulación que le per- miten mantenerla, aunque las respuestas no se produzcan ya por razones intelectuales. Es entonces cuando orienta sus acciones a obtener respos- tas (no necesariamente aprendizajes), y éstas finalmente llegan, aunque no las suscite ninguna significación. Tal desplazamiento, según vimos, ocu- rre en todas las clases de la profesora. El contrato que finalmente predo- mina es el que busca conseguir respuestas no importando los medios para obtenerlas; es finalmente un contrato «de reproducción formal».¹⁰ Los mecanismos equilibrantes incorporados, todos, tienden a ello. Es una for- ma de distraer el fracaso.

Los resultados del contrato: un aprendizaje intrasferrible y fugaz

La eficacia relativa de la relación establecida muestra su vulnerabilidad en distintos momentos y en el corto plazo. Los aprendizajes supuestos (expre- sados en respuestas que repiten un saber sin haber pasado por el conoci- miento) son sumamente frágiles. Para apoyar mi afirmación mostraré un pasaje más allá de la clase antes presentada: la sesión dedicada al volumen de prismas. En esa sesión, a pesar de las preguntas cada vez más cerradas de la profesora y sus índices comunicativos cada vez más transparentes, ningún niño logró anticipar cómo calcular el volumen del prisma triangu- lar; esto aunque la actividad previa se había centrado en el área del trián- gulo y el volumen del prisma cuadrangular:

MAESTRA (después de varias preguntas acerca de las características del pris- ma triangular que no reciben las respuestas esperadas).—¿Nadie sabe, ver- dad?, ¿y saben por qué? Porque no están poniendo atención (bastante irritada).
Observación de la investigación: La maestra termina enunciando las ca- racterísticas que solicitaba a sus alumnos expresar: «tiene base triangular», «tiene tres caras laterales»... Luego pasa a la cuestión del volumen:
MAESTRA.—Ahora, ¿cómo vamos a obtener el volumen de un prisma triangular... Omar?

¹⁰ Véase C. Brousseau, «L'enseignement dans la théorie des situations didactiques».

OMAR.- (*silencio*).

MAESTRA.- Fíjate bien cómo hicimos el del rectángulo; ahora, ¿cómo haremos el del triángulo?

OMAR.- (*continúa callado*).

MAESTRA.- ¡Pedro!, ¿cómo se te ocurre que sea?

PEDRO.- (*silencio*).

MAESTRA.- ¿Cómo podemos obtener el volumen de éste (*con su dedo señala los lados de la base, es decir, del triángulo*)?

PEDRO.- ¿Tres por lado?

MAESTRA.- ¿¡Tres por lado!?, ¡Eso es para perímetro! (*irritada*).

El interrogatorio —que se prolonga en el mismo sentido los siguientes minutos— muestra que los niños no están preparados para transferir un supuesto conocimiento sobre la fórmula del volumen del prisma cuadrangular al cálculo del volumen de otro prisma en el que la única diferencia es la forma de la base. La falta de significación del conocimiento es evidente.

A partir de resultados como éstos es pertinente preguntarse: ¿Por qué la maestra sostiene esta forma de relación, a pesar de las dificultades que en la progresión didáctica se observan? En mi opinión, la respuesta se encuentra (al menos parcialmente) en el hecho que planteo a continuación.

Una responsabilidad (no asumida) que permite la supervivencia del proyecto didáctico

En general, los niños resuelven los ejercicios que se les proponen con una baja tasa de éxito hecha evidente de varias maneras: en los regaños de la profesora al evaluar las tareas; en los errores cometidos por quienes pasan al pizarrón; en el escaso número de quienes responden a las preguntas planteadas oralmente; en el frecuente decir: «Y ponen atención, porque si no, a la hora de los ejercicios ya no sabemos».

No obstante lo anterior, ella, cuando logra las respuestas —aun incompletas, provenientes de unos cuantos niños y con un escaso respaldo de significación—, introduce un nuevo objeto de saber; continúa su proyecto. ¿Es un descuido, es inexperiencia? No lo sé, pero el hecho permite que el contrato habitualmente celebrado permanezca.

Dicho de otro modo, una de las responsabilidades que, según el pacto social con la escuela, es transferida al profesor —la de asegurar que todos los niños o al menos un número importante de ellos adquieran los aprendizajes previstos—¹¹ no es cumplida por la profesora. Pero es precisamen-

¹¹ Véase Y. Chevallard, *La transposition didactique*.

te la aceptación de este déficit la que permite que su proyecto continúe vivo.

Un mecanismo de equilibrio hipodidáctico

No obstante su precario equilibrio, la profesora no modifica los términos básicos del contrato establecido. Y como último recurso para sostenerlo utiliza otro mecanismo, no de restablecimiento del equilibrio didáctico sino acaso sólo de su propio equilibrio profesional. Este mecanismo consiste en señalar que el aprendizaje no se logra porque los niños no la atienden. Efectivamente, en repetidas ocasiones se le escucha decir: «Y ponen atención, porque si no, a la hora de hacer los ejercicios resulta que ya no se acuerdan». Este mecanismo no restablece el equilibrio didáctico (las respuestas no llegan cuando se introduce) pero sí autoriza a mantener la relación didáctica sin una modificación radical (que llevaría a buscar contratos con sustentos diferentes) y sin aceptar la responsabilidad unilateral del fracaso. Y es que reconocer el fracaso de su acción obligaría a la maestra a celebrar nuevos contratos; por su inexperiencia no está en posibilidades de hacerlo. La solución que por ahora le resulta factible es abandonar la lógica del aprendizaje y centrarse en la lógica de las respuestas. Cuando los efectos de tal desplazamiento dejan de funcionar (hecho frecuente por la escasa significación que respalda a las respuestas), entonces se responsabiliza a los alumnos del fracaso. Tomando prestada una expresión de Guy Brousseau: ¡es un recurso desesperado!

¿INEXPERIENCIA O RIGIDEZ EN LA RELACIÓN CON EL SABER?

Las dificultades enfrentadas en su primer año como docente pueden percibirse en la propia voz de la profesora María:¹²

El programa de matemáticas es un poco extenso, hay cosas que la verdad yo no las abarqué porque son cosas que tratan como de dar a entender a los alumnos el porqué de cierta operación, de ciertas fracciones, qué sé yo, pero siento que complica más a los niños, como que no se van a lo específico, a lo práctico. Quizá el objetivo es hacer que con estas actividades los niños se den cuenta de dónde salen las cosas [...] pero a veces siento que son muy complicados,

¹² Algunas partes de las respuestas de la profesora que son anotadas en este párrafo fueron reelaboradas con el fin de «corregir el estilo». Se conservan íntegras las ideas.

como que enredan más a los niños. Todo lo de fracciones [está en este caso]. Yo por eso no manéje el libro porque me empecé a dar cuenta que los niños no, no, no, como que se enredaban más, no entendían ese desenvolvimiento que dan en cada tema.

Según su propio decir, los despliegues explicativos presentados en los textos finalmente no fueron acogidos por la profesora. Estas explicaciones, tendientes a hacer comprender a los alumnos las propiedades, los mecanismos en que se sustentan los algoritmos, los procedimientos, fueron finalmente eliminados de su *texto de saber*. Pero es que en la sucesión de contratos que celebra hay una dosis de inexperiencia en una doble vía: la didáctica y la vinculada al contenido matemático.

F. Tochon afirma que es la dinámica del enfrentamiento a las situaciones la que de una manera heurística sugiere al profesor la cuestión a plantear, la actividad a derivar, el trabajo a llevar a cabo. Según este autor, el profesor concreta sus ideas «aplicándolas sobre el terreno, luego las evalúa; los resultados son guardados en la memoria y a partir de entonces pueden ser reutilizados».¹³ Es así como el docente desarrolla con el paso del tiempo una serie de representaciones que permiten leer rápidamente una situación pedagógica y responder a ella. Seguramente con el tiempo la profesora María elaborará el conjunto de representaciones que sustenten un hacer didáctico más eficaz. También desarrollará un cierto sentido de prioridad; por ejemplo, sabrá cuáles definiciones vale la pena incorporar (y consumir tiempo didáctico en ellas) y cuáles no. No todas son útiles en el marco de las exigencias del proyecto que va delineando.

La inexperiencia didáctica se observa también en otra dirección: como vimos, los profesores avezados saben qué información introducir y cómo interrogar para lograr de sus alumnos —sin decírselas— las respuestas que desean ver aparecer, aun cuando eventualmente éstas no sean muestra de ningún aprendizaje. También saben hacerlo a tiempo. En la clase aquí analizada, en cambio, de la información introducida (*línea recta y segmento*) y las preguntas formuladas no era posible derivar la definición pretendida; no había intuiciones ni conocimientos previos que, refinados, permitiesen obtenerla. Era, para empezar, un problema de lógica vinculado al escaso dominio del concepto. Por ello el estancamiento didáctico. Su inexperiencia no permite a la maestra cumplir con los términos del contrato que ella misma establece, más bien se traduce en una falta de destreza y flexibilidad en el manejo de los contenidos matemáticos.

Dicha condición se evidencia, por ejemplo, cuando un niño dice: «(La

¹³ F. Tochon, *L'enseignant expert*, p. 93.

recta numérica) es una recta que sirve para hacer operaciones» y la respuesta es rechazada. Efectivamente, la recta numérica es un modelo al cual se le asocian los números reales (entre ellos los naturales) y sobre ella pueden modelarse las operaciones. Y en la experiencia escolar de los niños eso es la recta numérica: una recta sobre la cual se anotan números y se hacen operaciones (lo habían hecho, al menos en teoría, desde el primer grado de primaria a través de *los saltos de la rana*). Pero la maestra tiene una idea personal, rígida e incompleta de la recta numérica. Acaso de esto deriva su inflexibilidad al manejar las distancias entre las respuestas de los alumnos y las formulaciones que ha previsto. Las respuestas que los niños ofrecen, si no van exactamente por el camino que ella anticipó, son descartadas. Muchos profesores hacen esto. En este caso, sin embargo, tal acción lleva a que el tiempo didáctico se detenga y a un desgaste importante derivado de dicho estancamiento. Pero la rigidez en la relación con el saber establecida tiene otras consecuencias.

ENVEJECIMIENTO SÓLO APARENTE DE LOS OBJETOS DE SABER

Guy Brousseau define el *contrato de reproducción formal* como aquel en el que:

El profesor se compromete a hacer que el alumno haga, *por un medio cualquiera*, una tarea que es reconocida por la cultura como la marca de adquisición de un saber; por ejemplo el alumno dirá el texto de un teorema, escribirá la solución de un problema, reproducirá a solicitud una actividad determinada. *El medio por el cual la producción de la tarea se logra no es relevante, puesto que es la actividad en sí misma que se supone es la fuente y la prueba del aprendizaje. La traducción de las órdenes del profesor en actos no exige el pasaje por el conocimiento previsto. Esos medios de reproducción, por imitación, no exigen formulaciones de razones o explicaciones.*¹⁴

El contrato que, a pesar de celebrarse otros, parece predominar en esta clase es el que busca conseguir respuestas no importando los medios para obtenerlas: es finalmente un contrato de reproducción formal en el que los alumnos quedan como sujetos pendientes de las reglas del contrato. Durante la modelación de las sumas en las rectas dibujadas en el cuaderno (*fase 3*) llegan al límite las reglas de este contrato: *Si no comprendo, y aun*

¹⁴ G. Brousseau, «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques», p. 24. Las cursivas son mías.

¹ J. Piaget. «El mito del origen sensorial de los conocimientos científicos».

si lo encuentro contradictorio, debo obtener la respuesta demandada por la profesora y no otra parece ser la norma implícita que rige la participación de los niños durante el episodio.

Las reglas con base en las cuales transcurren estas clases, solidarias con la postura de la maestra y acentuadas por su inexperiencia docente, constituyen un terreno de fácil deslizamiento a registros no intelectuales. Así, resulta falso el aparente envejecimiento de los objetos de saber: la maestra recibe las respuestas pero éstas no son muestra de que los objetos de saber hayan pasado a formar parte de los conocidos por los alumnos y de los cuales dispondrán para enfrentar nuevas situaciones de aprendizaje. Es una ficción que se mostrará recurrentemente ante la introducción de nuevos objetos.

A MANERA DE CONCLUSIÓN: AL CONTRATO DIDÁCTICO UNA DOBLE SENSIBILIDAD

La relación didáctica establecida tiene efectos intelectuales, algunos ya señalados. A lo largo de las clases, además, los niños prefieren que la maestra apruebe por adelantado sus acciones, aun las más elementales. Por ejemplo, en la sesión aquí analizada, los niños preguntan: «¿Con color o nomás con lápiz?», «¿Vamos a numerar?», etcétera (*fase 2*). En otra clase en que se construye un cubo, las indicaciones esperadas por los niños (expresadas en las preguntas que plantean) incluyen desde las medidas de las líneas hasta la forma de colocar el papel sobre la mesa. La sensibilidad al contrato se muestra aun en decisiones irrelevantes, que los niños podrían tomar con libertad. ¿Será que ellos han aprendido que de lo que se trata en la escuela es de responder lo que el profesor espera, independientemente de que las respuestas sean respaldadas por conocimientos, e incluso independientemente de que contradigan su lógica cognoscitiva? Aun más allá, ¿será que ellos se han vuelto dependientes de los índices de la maestra para poder arribar a las repuestas porque la falta de comprensión acumulada no les deja ya sino ese camino?

Es justo decir que éstas son las prácticas iniciales de la maestra María. Sus representaciones son aún una amalgama en la que destaca una interpretación sensualista del aprendizaje mezclada con una idea menos precisa de que los niños deben razonar. La postura epistemológica y pedagógica que va conformando al entretejer sus ideas previas con los resultados de su práctica ha comenzado a definir el horizonte de experiencias que ofrece y ofrecerá a sus alumnos. Así interpreto su decisión de no incorporar el libro de texto oficial para el tratamiento de muchos contenidos. Según nos dijo, resulta muy complicado. Hemos visto en los hechos la com-

plicación, las dificultades para gestionar las acciones que de él se desprenden. Acaso, de repetirse el fracaso en sus interrogatorios, éstos también dejen de formularse. Ante la dificultad de utilizar la memoria didáctica para celebrar contratos fuertemente didácticos, la ostensión y la repetición serán las vías más seguras. La sensibilidad al contrato didáctico no es algo que sólo sus alumnos han desarrollado, en ella los resultados de su acción también van dejando huella.

Síntesis de la actividad desarrollada en el grupo de la profesora María

	Contenido	Se introduce definición	Se plantean preguntas cerradas	Se plantean preguntas abiertas o alternativas	Se resuelven problemas como uso de aprendizaje	Se resuelven problemas para aplicar conocimientos	Se producen justificaciones o argumentaciones	Se realizan ejercicios rutinarios	Registro de la actividad
Clase 1	La recta numérica y suma de enteros en la recta	Si, la maestra busca que se construya	Si	No	No	No	Solo una, en un momento crítico	Si	Se produce efecto Topaze
Clase 2	Coordenadas de un punto en el plano	Si	Si	Solo una	No	No	No	Si	Se produce efecto Topaze
Clase 2	Repaso de áreas de figuras planas de lados rectos	Si	Si	No	No	Si	No	Si	Se produce efecto Topaze
Clase 3	Noción de volumen y volumen del cubo	Si, con algunas preguntas que buscan razonamiento	Si	No	No	No	No	Construcción bajo estricta dirección	Se produce efecto Topaze
Clase 4	Volumen del prisma cuadrangular	Si, la maestra la explica	Si	No	No	No	Solo una, procedimental	Construcción bajo estricta dirección	Se produce efecto Topaze
Clase 5	Volumen del prisma triangular	Si, aunque inicialmente busca que los niños la obtengan como conclusión	Si	Si (una)	No	No	Solo una, procedimental	Si	Se produce efecto Topaze
Clase 6	Porcentajes	Si no observamos la introducción)*	Si	No	No es posible responder	Si	No	Si	

* No observamos la sesión en la cual se introdujo por primera vez la noción de porcentaje.

EPÍLOGO

LAS COSTUMBRES Y LAS TRANSFORMACIONES

Epílogo

LAS COSTUMBRES Y LAS TRANSFORMACIONES

LA HUELLA DE LAS REFORMAS

La matemática moderna como saber a enseñar

Los programas y documentos oficiales que orientaban la enseñanza de las matemáticas en los años sesenta tenían en la base al sensual-empirismo. *Grosso modo*, la actividad matemática sugerida consistía en mostrar, ejemplificar, ejercitar, aplicar. Tales ideas parecían ajustar perfectamente con las de los profesores, acaso también satisfacían las expectativas de los padres de familia. Pero al iniciar los años setenta se asumió una creencia internacional consistente en considerar que la enseñanza vigente no conducía sino al verbalismo hueco y a la repetición memorística de ideas. Era una exageración y una simplificación de la realidad educativa, pero fue a partir de tal creencia como la matemática moderna entró a los salones de clases en México. Dicha matemática pretendió desplazar la forma de pensar la enseñanza de esta disciplina instalada en las escuelas. Buscó sustituir el contacto con la matemática utilitaria y sus formas ostensivas por la vinculación con la *verdadera matemática*; fueron dos las vías del intento: la inclusión de nuevos contenidos y el aprendizaje por descubrimiento.

La incorporación de tales ideas no fue uniforme en la práctica, acaso tampoco relevante. En virtud de las innovaciones promovidas, en las escuelas se enseñaban las propiedades de las operaciones, la suma sobre la recta numérica o la idea de variación, pero a la vez permanecían las fracciones propias y las impropias, la historia de las unidades de medida, los sistemas decimales de medición e incluso la raíz cuadrada, temas todos que habían sido eliminados (o minimizados) como objetos de enseñanza en los programas oficiales. Es decir, una vez que los profesores hicieron su par-

te en la transposición, se yuxtapusieron nuevos y viejos contenidos de saber y se eliminaron otros que sobresalían como novedad. De entre éstos, fue frecuente que se seleccionaran los «ligados a la vida real». El criterio de selección era precisamente el que la nueva matemática buscaba trascender. Pero los profesores lo mantuvieron.

En la transposición operada sobre la concepción de aprendizaje oficialmente promovida —que los niños aprendan descubriendo— se observó una fuerte dosis de creencias personales. Hubo quien, ignorando la propuesta, conservó la ostensión como estrategia de enseñanza, así como la idea de que los niños aprenden si se les explica bien; también fue posible observar a quien, en coincidencia con las sugerencias oficiales, articuló la actividad con la intención de que los niños descubrieran los conceptos. El interés de quienes así actuaban era que los niños razonaran. Quizá el razonamiento como objetivo del proceso educativo no derivó de las nuevas formas de enseñanza introducidas. Tradicionalmente, el razonamiento ha estado en boca de los profesores; «¡Que los niños razonen!», se oye decir a los viejos maestros. La frase también se lee en antiguos materiales elaborados para orientar la enseñanza de las matemáticas. Pero cualquiera que sea su origen, tal idea pareció haberse revitalizado con la entrada de las nuevas matemáticas.

Más llamativa resultaba la acción de quien al contar con elementos de futuros horizontes pedagógicos —incorporados de manera voluntaria— potenciaría notablemente las posibilidades del texto de saber oficialmente propuesto, sustituyendo el «descubrir» por el «construir».

En fin, con la irrupción de la matemática moderna las relaciones didácticas tomaron múltiples formas; la promovida por los reformadores no constituyó sino una manera más de enseñar. Así pues, no todo sucedió conforme lo esperaban los impulsores de la matemática moderna.

Pero incorporar los nuevos objetos de enseñanza no significó mejorar las relaciones didácticas establecidas; a la inversa, mantener los viejos temas no implicó la celebración de contratos empobrecidos y de escasas responsabilidades para el profesor. Y si bien no todas las que tuvieron lugar fueron versiones degradadas de las propuestas oficiales, tanto el vínculo con las *verdaderas matemáticas* como la capacidad de abstraer relaciones, generalizarlas y formalizarlas quedaron como deseos escasamente cumplidos. Tal hecho se reconoció veinte años después, cuando se introdujo la resolución de problemas como vía del aprendizaje en las escuelas. Nuevamente, con un afán justificatorio, se simplificarían y exagerarían las realidades sobre las que la nueva reforma se instalaría.

La resolución de problemas como texto del saber

Durante los años ochenta se generó una nueva postura internacional, en esta ocasión consistente en señalar que la lógica y los conjuntos habían mostrado su ineficacia como contenidos de la educación básica. Muchos señalaron los graves daños que esta forma de enseñar había provocado en las jóvenes generaciones, pero fueron menos los que mostraron con datos específicos el escaso avance en la capacidad de razonar de los alumnos. La persistente insatisfacción por los resultados llevó de nuevo a magnificar las bondades que pudiese traer una nueva forma de enseñar. En México, en un acto de olvido sobre la reforma que impulsara la interrogación, a partir de los años noventa se revivió la crítica a la exposición como estrategia de enseñanza; se postularía la resolución de problemas como vía de acceso al conocimiento significativo y tal forma de aprendizaje (y enseñanza) se impulsaría con un programa de actualización de profesores sustentado también en el «aprender resolviendo problemas».

La propuesta tenía en la base la siguiente idea: los alumnos pueden aprender, en la interacción con las situaciones problemáticas propuestas, sin que sus profesores les transmitan directamente los conocimientos. El papel central otorgado al profesor sería el de diseñador de situaciones y problemas, así como el de promotor de acciones e interacciones. También, pero con menos énfasis, se señaló que el docente debería formalizar los conocimientos y dar información a los alumnos cuando la necesitaran. En el momento captado en este estudio, la enseñanza que se buscaba impulsar no tenía sino presencia eventual en las escuelas. En los salones de clases permanecían la ostensión, la interrogación o la explicación como ejes de la actividad. A tales formas se agregó otra, resultante de la negociación entre las viejas y las nuevas ideas que algunos profesores parecen haber librado consigo mismos: la *devolución dosificada*, consistente en conceder sólo breves tiempos adidácticos a los alumnos.

Las tareas que se resuelven en el marco de la devolución dosificada son de complejidad moderada y es posible hacerlo en tiempos relativamente cortos. Los profesores que instrumentan la devolución dosificada pueden controlar en intervalos de tiempo que les parecen razonables los resultados de la acción libre de los alumnos. En ocasiones, la devolución dosificada se entremezcla con la ostensión o el uso de la metáfora; otras veces se acompaña de un interés especial por la argumentación. Tal modalidad constituye sólo una entre varias formas de enseñanza y es distinta de la aspiración oficial que buscaba amplios tiempos adidácticos durante los cuales los niños resolverían tareas complejas sin la dirección de su profesor. No obstante las diferencias, esta forma de organización didáctica acorta la

distancia entre las propuestas oficiales y la acción habitual de los profesores; al tiempo que distancia la actividad en el aula de la imaginada por los reformadores, posibilita la permanencia de «la resolución de problemas como vía del aprendizaje» en las aulas.

Pero la enseñanza mediante resolución de problemas, al igual que la matemática moderna, no se libró de la crítica. Hoy en día, y cada vez con más frecuencia, se señala que los niños han avanzado muy poco en su capacidad de resolver problemas. Muchos comienzan a decir que la *matemática-instrumento* devino *matemática borrosa* y que hoy los alumnos han sido privados incluso de las definiciones y conceptos que, aunque memorísticamente, antes sí aprendían.

Reformas curriculares: ¿nuevos objetos de saber, nuevos contratos?

Con todo, las dos últimas reformas curriculares del siglo xx incorporaron elementos novedosos en las prácticas de enseñanza. También revitalizaron y reconstituyeron viejas ideas. No lograron sustituir todo lo que buscaban, tampoco incorporar todo lo que intentaban; muchos contenidos de saber permanecen y conviven o desplazan a los que portan novedades. Las justificaciones que sustentan tales elecciones son diversas: «porque constituyen un reto profesional», «porque hacen razonar», «porque se asocian a la vida real», «porque los niños pueden aprenderlas». Todos estos argumentos son más o menos ficticios, pero con base en tales creencias los profesores los mantienen como objetos de enseñanza. Los contenidos novedosos también tienen lugar en la clase, pero con frecuencia sufren reducciones y reinterpretaciones radicales. Quizá las menos de las veces éstos son incorporados con relativa fidelidad.

En el periodo orientado por la matemática moderna, los contratos de interrogación no siempre articularon las relaciones didácticas. La ostensión y la explicación se utilizaron cotidianamente, permaneciendo como ideas rectoras de la actividad en clase. En cambio, la emergencia precoz de la *devolución* —posible gracias a ideas incorporadas por medios no oficiales al sistema educativo— promovió nuevas relaciones didácticas. Habiendo sido introducida en un periodo en el que dominaban otras costumbres, provocó desajustes con la *noósfera*.

Durante el periodo en que la resolución de problemas ha constituido el marco de la actividad matemática escolar, tales formas de enseñanza han permanecido. Lo mismo se observa al profesor ostensista que al que busca comunicar explicando o al que interroga como medio para lograr que sus alumnos aprendan. En cambio, la *devolución franca*, que se postularía como acción cotidiana en las escuelas, tiene presencia muy eventual, y los

datos recabados en otro estudio reciente agregan evidencia sobre la afirmación. En su lugar se hace presente la devolución dosificada.

¿Por qué muchos profesores no modifican sus concepciones y creencias? ¿Por qué no aceptan que los alumnos pueden llegar al saber mediante caminos distintos de la ostensión, la interrogación o la explicación? Sabemos hace tiempo que las representaciones son sumamente estables, que por simples razones de equilibrio personal no es posible modificarlas fácilmente. Con base en nuestros datos es posible agregar algunos elementos explicativos a la cuestión.

La presión externa, acompañada de resultados positivos, *parece favorecer* la adopción de una pedagogía compleja, como lo es la enseñanza mediante resolución de problemas. En sentido inverso, los resultados no exitosos tienen un peso decisivo en el retorno a la ostensión. Ante la dificultad, siempre estará el refugio constituido por la linealidad del sensual-empirismo.

Empero, la permanencia de contratos que se apartan de los promovidos mediante las reformas no significa que el profesor que los celebra asuma pocas responsabilidades frente a sus alumnos. Es particularmente ilustrativo en tal sentido el de *explicación a la medida*, cuyos mecanismos de regulación tienden a acrecentar el significado de los conocimientos. Se trata de un contrato cuyo equilibrio se mantiene mediante la memoria didáctica. Esta memoria se revela como elemento sustancial de los *buenos contratos*.

MÁS ALLÁ DE LAS REFORMAS: NUESTROS APRENDIZAJES SOBRE LA ENSEÑANZA

La relatividad del término enseñanza tradicional

La enseñanza llamada *tradicional*, considerada por muchos como la que describe lo que acontece en las aulas, es en realidad un mito en el sentido piagetano, que se refiere a «aquellas opiniones a las que una adhesión colectiva demasiado obligatoria ha privado del beneficio de verificaciones precisas».¹ Conforme a esta creencia, se supone que el profesor tradicional acepta escasas responsabilidades: transmitir u ostentar las nociones, repetir, ejercitar; que no asume la responsabilidad *efectiva* de que sus alumnos aprendan. El profesor tradicional es el que monologa y responsabiliza a sus alumnos de que el aprendizaje ocurra. Según la creencia generalizada, el profesor tradicional establece sólo contratos *no didácticos*. Pero el

profesor promotor de contratos de este tipo no es necesariamente el que escatima los tiempos adidácticos. Entre los profesores que mantienen para sí el control de la relación con el saber se cuentan quienes *comunican* o quienes ofrecen *explicaciones a la medida* y que, dentro de ciertos límites, promueven aprendizajes con significación. ¿Cómo es esto posible?

Porque a unas ciertas reglas contractuales, que en principio delimitarían experiencias similares, pueden seguirle formas de regulación que diferencian los términos efectivos de la relación didáctica. De este modo, en el seno de contratos de ostensión pueden instrumentarse acciones de regulación que orientan hacia la pérdida de significación o, por el contrario, hacia su acrecentamiento. La diferencia la hace la memoria didáctica del profesor, cuya activación puede determinar o bien *contratos no didácticos*, o bien *contratos fuertemente didácticos*. El análisis de los mecanismos de regulación, puestos en marcha ante los desequilibrios de la relación didáctica, revela que las formas contingentes con que los profesores enfrentaron la ausencia de respuestas esperadas resultaba fundamental para el rumbo que toma la actividad didáctica y los efectos que produce en los aprendizajes de los alumnos. El hecho más notable en tal sentido es el prestigio que acarrea la *explicación a la medida* a quien cotidianamente la utilizaba.

La utilidad de otras categorías analíticas: contrato y equilibrio didácticos

Más que las clasificaciones poco justas, la noción de contrato didáctico se muestra provechosa para recuperar la complejidad, la diversidad y la especificidad de la relación didáctica que profesores y alumnos establecen alrededor de los objetos de saber. Empero, una progresión didáctica no transcurre linealmente, conforme a una intención inicial derivada de una determinada posición pedagógica del profesor. Si bien es el profesor quien en principio define sus términos, la participación de los alumnos define la viabilidad, la ineficacia e incluso la obsolescencia de un contrato. Ante la contingencia y ante los desequilibrios, el profesor se ve obligado a actuar, a incorporar mecanismos para regular el equilibrio didáctico y, en el límite, a cambiar de contrato. Estos mecanismos equilibrantes determinan de manera importante la actividad matemática escolar, ya que permiten conservar y acrecentar el significado o, por el contrario, despojar de él a los conocimientos matemáticos.

Otros factores determinan la forma específica de la actividad didáctica, por ejemplo el espacio del cual provienen los índices necesarios para ponderar su eficacia. «¿Ya todos entendieron?», «¿Hay alguna duda?» son preguntas que no todos los profesores se plantean, algunos tienen entre sus compromisos no incorporar la ejercitación sino hasta que todos los

niños hayan comprendido; para otros profesores, en cambio, la respuesta de un solo alumno basta.

En ocasiones es evidente que los alumnos no han obtenido ningún conocimiento. Las respuestas no llegan y se hacen largos y tensos silencios. Finalmente, producto de una negociación «a la baja», algún niño ofrece la frase o la palabra requerida como marca del saber, y ésta es aceptada como marca del saber de todo el grupo. ¿Y los demás?, resulta fácil preguntarse. Pero el profesor no se lo pregunta. ¿Será que sabe que no puede poner atención al hecho porque tampoco tiene herramientas para remediarlo? ¿Será simplemente que prefiere la comodidad? Cualquiera que sea la respuesta, lo que sí es cierto es que aceptar el reconocimiento de una alta tasa de fracaso implicaría en principio incorporar acciones para acrecentar el significado de los conocimientos o celebrar un nuevo contrato. Pero, aunque no exclusivamente, la construcción de un proyecto nuevo corresponde también a la conciencia del fracaso del vigente, y el fracaso es algo difícil de aceptar. Por ello, resulta más conveniente recurrir a Topaze o, en el límite, responsabilizar a los alumnos de la falta de respuestas. El «No saben porque no ponen atención» es un mecanismo hipodidáctico que evita a algunos profesores reconocer que el fracaso se debe a su proyecto, no a sus alumnos. De este modo pueden mantenerse en las aulas contratos realmente improductivos.

¿SE NECESITA OTRA REFORMA?

La motivación de la investigación que sustentó este libro fue dar cuenta de las relaciones didácticas establecidas a la luz de los contratos celebrados en dos periodos cruzados por igual número de reformas educativas, así como de los mecanismos que permiten que ciertos proyectos didácticos permanezcan. Todo lo anterior buscaba contribuir a la comprensión de la actividad matemática que se desarrolla en las escuelas y de la cultura escolar que en buena medida la determina.

Hoy creo que comprender lo que ahí ocurre permitirá también, a la larga, generar acciones de mejora de la enseñanza más eficaces que las implementadas a fines del siglo xx. Porque hasta hoy, la mejora de la enseñanza se ha impulsado a través de reformas que han puesto el acento en la construcción de nuevos currículos y nuevos materiales. Creo, porque la he comprobado, en la utilidad de buenos textos, de buenos materiales, en la necesidad de introducir ideas que desestabilicen el sistema didáctico, puesto que este desequilibrio promoverá eventualmente equilibrios mejorantes: la devolución dosificada o los contratos basados en la argumentación son muestra de ello.

Sin embargo, estudios que en los últimos años se multiplicaron comprueban una y otra vez que los niños y niñas que pueblan las escuelas siguen sin saber sumar, como el Juanito de Morris Kline. Tal vez, como ha señalado Michèle Artigue, esto se deba a que las distancias —reveladas enormes— que separan las propuestas de reforma y las costumbres en la clase han hecho inasimilables las propuestas.

Se pone aquí de manifiesto el protagonismo de los docentes y la necesidad de repensar su acción y sus posibilidades reales de cambio. No resulta productivo volver sobre la crítica simplista que los señala como los principales oponentes a las reformas. Tampoco se trata de enfocarse únicamente al cambio, porque hacerlo, dicen atinadamente Tyack y Cuban, es desconocer la continuidad que hay en las prácticas fundamentales de la escuela y correr el riesgo de echar al vacío los esfuerzos reformadores.

Otros analistas señalan hoy que las mejoras a la enseñanza sólo pueden venir «desde dentro» del sistema. No estoy segura de que esto sea posible. Aunque considero importante conservar lo mejor de las prácticas instaladas, hasta hoy ignoradas, también creo necesario encontrar un punto de equilibrio «mejorante» entre las reformas, los profesores y el aprendizaje de los estudiantes. Tal vez se trate más bien, como ya se ha dicho, de que las innovaciones no sean tan distantes de los profesores.

Encontrar las distancias que permitan un equilibrio mejorante pasaría por conocer a los profesores: sus acciones (buenas o no tan buenas), sus destrezas y sus torpezas, sus aciertos y desaciertos... así como las costumbres que a la vez los impulsan y los limitan. Los datos universales y atemporales deben sustituirse por otros específicos y contextualizados.

En suma, creo que comprender lo que ocurre en la clase de matemáticas ayudará a la larga, si no a lograr que los maestros actúen como utópicamente los reformadores hemos imaginado, sí a romper la perennidad de contratos cuya supervivencia se sustenta en que los maestros, utilizando mecanismos de regulación hipodidácticos, responsabilicen a sus alumnos del fracaso.

BIBLIOGRAFÍA

- ABRIC, J. C., «L'étude expérimentale des représentations sociales», en D. Jodelet (dir.), *Les représentations sociales*, París: Presses Universitaires de France, 1989, pp. 187-203.
- ADDA, JOSSETTE, «La réforme des mathématiques modernes» (trad. Luz María Marván), *Review de l'Association Francophone d'Education Comparée*, no. 26-27, diciembre de 1981.
- , *Elementos de didáctica de las matemáticas*, curso impartido en la Sección de Matemática Educactiva del 25 de agosto al 5 de septiembre de 1987, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.
- AEBLI, HANS, *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Buenos Aires: Kapelusz, 1958.
- ALATORRE, SILVIA y otros, *Propósitos y contenidos de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de educación primaria en México*, México: Universidad Pedagógica Nacional, documento interno, sin fecha.
- ALVARADO JARDINES, MARGARITA, *La nueva propuesta de enseñanza de las fracciones en cuarto grado. Dos dinámicas de trabajo*, tesis de maestría en desarrollo educativo, México: Universidad Pedagógica Nacional, 1999.
- ARTIGUE, MICHÈLE, «Epistemologie et didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, no. 2-3, 1990, pp. 241-286.
- , «Ingeniería didáctica», en varios autores, *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá: Una empresa docente / Iberoamérica, 1995, pp. 33-62.
- , «Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica para afrontarlos?», *Educación Matemática*, vol. XVI, no. 3, diciembre de 2005, pp. 5-28.
- AUSUBEL, DAVID P., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, México: Trillas, 1976.
- , *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*, Barcelona: Paidós, 2002.
- AVILA, ALICIA, y HUGO BALBUENA (coords.), *Matemáticas. Tercer grado* (libro de texto gratuito), México: Secretaría de Educación Pública, 1993.

- AVILA, ALICIA, *Los niños también cuentan*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , HUGO BALBUENA y PEDRO BOLLÁS, *Matemáticas. Cuarto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- y colaboradores, «Usos y conceptualizaciones en torno a las fracciones, los decimales y la proporcionalidad. Estudio en adultos analfabetos y de escasa escolaridad» (Reporte de investigación no publicado), México: Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, 1994.
- , «Los usos reconocidos de los textos de matemáticas», *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 1, no. 2, 1996, México, pp. 315-342.
- y JOSÉ LUIS CORTINA, «Opiniones, perspectivas y posturas de los profesores ante los textos gratuitos de matemáticas», *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, México: Centro de Estudios Educativos, 1996, pp. 59-130.
- y SILVIA GARCÍA PEÑA, «Paradigmas de enseñanza de las matemáticas elementales. El siglo xx en México» (reporte de investigación no publicado), México: Universidad Pedagógica Nacional, 1999.
- (dir.), «Evaluación cualitativa de las repercusiones de la reforma a las matemáticas en la educación primaria» (reporte de investigación no publicado), México: Universidad Pedagógica Nacional / Organización de Estados Americanos, 2000.
- , «El maestro y el contrato en la teoría brousseauiana», *Educación Matemática*, vol. XIII, no. 3, Iberoamérica, diciembre de 2001, pp. 5-22.
- , *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación de la matemática escolar*, tesis de doctorado en pedagogía, México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.
- BALACHEFF, NICOLAS, «Preuve est demonstration en mathématiques au collège». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, no. 3, diciembre de 1982, pp. 261-304.
- , «Processus de preuve et situations de validation». *Educational Studies in Mathematics*, no. 18, Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1987, pp. 147-176.
- , «Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques», en *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1988, pp. 15-26.
- BAROODY, ARTHUR, *El pensamiento matemático de los niños*, Madrid: Aprendizaje / Visor, 1990.
- BARUK, ESTELA, *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*, París: Éditions du Seuil, 1985.
- BAUR, GREGORY y LINDA OLSEN, *Helping children learn mathematics. A*

- competency-based laboratory approach*, Menlo Park, California, Cummings Publishing Company, 1976.
- BENNETT, NEVILLE, *Estilos de enseñanza y progreso de los alumnos*, Madrid: Morata, 1979.
- BLOCK, DAVID, e IRMA FUENLABRADA (coords.), *Matemáticas. Primer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1993.
- BLOCK, DAVID (coord.), *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*, México: Secretaría de Educación Pública, 1995.
- (coord.), «Matemáticas», en Waldegg, Guillermina (coord.), *Procesos de enseñanza y aprendizaje*, vol. II, México: Fundación SNTE / Consejo Mexicano de Investigación Educativa, 1995.
- , y ANA MARÍA ÁLVAREZ «Los números en primer grado. Cuatro generaciones de situaciones didácticas», *Educación Matemática*, vol. 11, no. 1, 1999, pp. 57-76.
- BOERO, PAOLO, «Argumentación y demostración: una relación compleja, productiva e inevitable en las matemáticas y en la educación matemática», www.lettredelapreuve.it, 2004.
- BRIAND, JOËL, *L'énumérations dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, tesis de doctorado en didáctica de las matemáticas, Burdeos: Universidad de Burdeos I, 1993.
- , y MARIE-CLAUDE CHEVALIER, *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, París: Hatier, 1995.
- , «Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique», *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, no. 1, 1999, La Pensée Sauvage, pp. 41-76.
- BRONNER, ALAIN, «Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets 'nombre réel' et 'racine carrée'», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, no. 3, 1997, pp. 55-80.
- BROUSSEAU, GUY, «Processus de mathématisation. La mathématique à l'école élémentaire», París: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1972, pp. 428-442.
- , «Études des questions d'enseignement, un exemple: la géométrie», *Colloque The Research in Teaching of Mathematics, its Objects and Consequences*, Trento: mayo de 1984.
- , «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, no. 2, 1986, pp. 33-115.
- , *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, tesis de doctorado, Burdeos: Universidad de Burdeos I, 1986.
- , «Le contrat didactique: le milieu», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, no. 3, 1988, pp. 309-336.
- y JULIA CENTENO, «Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant»,

- Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11, no. 2-3, 1991, pp. 167-210.
- BROUSSEAU, GUY, «Los diferentes roles del maestro», en Parra, Cecilia e Irma Sáiz (coords.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós, 1994, pp. 65-94.
- , «Perspectives pour la didactique des mathématiques», en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994, pp. 51-66.
- , «L'enseignant dans la théorie des situations didactiques», *Actes de la VIII École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 22-31 de agosto de 1995, Saint-Sauves d'Auvergne, pp. 3-46.
- , *Théorie des situations didactiques*, textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff y otros, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.
- , «Educación y didáctica de las matemáticas», *Educación Matemática*, vol. 12, no. 1, abril de 2000, pp. 5-38.
- , «Entrevista concedida a Alicia Avila», México, 2001.
- BRUN, JEAN, «Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques», en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994, pp. 67-83.
- BRUNER, JÉRÔME, *Hacia una teoría de la instrucción*, México: UTEHA, 1972.
- , *El proceso de la educación*, México: UTEHA, 1972.
- , *Acción, pensamiento y lenguaje*, compilación de textos de José Luis Linaza, México: Alianza Editorial Mexicana, 1986.
- , «Consideraciones sobre la reforma escolar», *Desarrollo cognitivo y educación*, selección de textos de Jesús Palacios, Madrid: Morata, 1988.
- CABALLERO, ARQUÍMEDES, *Matemáticas. Primer curso*, México: Esfinge, 1980.
- CABALLERO, SOFÍA, y BERTA VILLASEÑOR, «Aritmética y geometría». *Mi libro y mi cuaderno de trabajo de tercer grado. Instructivo para el maestro*, México, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito, 1967.
- CAMBRAY, RODRIGO, *Reform process of the mathematics curriculum for basic education in México during 1992-2000*, tesis de doctorado en educación, Muncie, Indiana, Ball State University, 2003.
- CARVAJAL, ALICIA, «El uso del nuevo libro de texto de primer grado», *Básica. Revista de la Escuela y del Maestro*, no. 11, 1996, pp. 15-20.
- CASTELNUOVO, EMMA, *Didáctica de la matemática moderna*, México: Trillas, 1970.
- CASTILLO, ISIDRO, «Prólogo» al libro de Manuel M. Cerna, *Análisis y aplicación de los programas de educación primaria*, México: Instituto Federal de Capacitación del Magisterio, Biblioteca Pedagógica de Mejoramiento Profesional, no. 40, 1964, pp. 7-11.
- COBB, PAUL, «Characteristics of classroom mathematics traditions: an

- interactional analysis», *American Educational Research Journal*, vol. 29, no. 3, 1992, pp. 573-604.
- COMENIO, JUAN AMÓS, *Didáctica magna*, México: Porrúa, 1992.
- COMIN, EUGÈNE, «L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 22, no. 2-3, 2002, pp. 135-182.
- COMITI, CLAUDE Y DENISE GRENIER, «Regulations didactiques et changements de contrats», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, no. 3, 1997, pp. 81-102.
- CONNE, FRANÇOIS, «Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, no. 2-3, 1992, pp. 221-270.
- COPPÉ, SYLVIE, «Types de connaissances mises en oeuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail», en Gilbert Arsac y otros (coords.), *Différents types de savoirs et leur articulation. Travaux de thèses de didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1995, pp. 129-144.
- CHARNAY, ROLAND, «Aprender (por medio de) la resolución de problemas», en Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós, 1994, pp. 51-63.
- CHEVALLARD, YVES, «Sur la notion de temps didactique», *Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Orléans, Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques-Universidad de París VII, julio de 1986, pp. 69-93.
- , *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*, Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques de Aix-Marsella, 1988.
- , «Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel», *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble: 1989, pp. 211-235.
- , *La transposition didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- , «Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, no. 1, 1992, pp. 73-112.
- , MARIANA BOSCH y JOSEPH GASCÓN, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, México: Secretaría de Educación Pública / Cooperación Española, 1997.
- DEBLOIS, LUCIE, «Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire», *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 16, no. 1, 1996, pp. 71-128.
- DELVAL, JUAN, «Tesis sobre el constructivismo», en Rodrigo y Arnay (comps.), *La construcción del conocimiento escolar*, Barcelona: Paidós, 1997, pp. 15-33.

- DÍAZ BARRIGA, ÁNGEL, «La entrevista a profundidad», *Empleadores de universitarios. Un estudio de sus opiniones* (anexo), México: Centro de Estudios sobre la Universidad / Porrúa, 1995.
- (coord.), *Procesos curriculares, institucionales y organizacionales. La investigación educativa en los ochenta, perspectivas para los noventa*, México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, 1995.
- DIENES, ZOLTAN P., *Comprendre la mathématique. Un étude de la transition de la phase constructive à la phase analytique de la pensée mathématique des enfants*, OEDL, París: 1965.
- , *Fracciones*, Barcelona: Teide, 1972.
- , *La matemática moderna en la enseñanza primaria*, México: Varazén, 1976.
- , *Las seis etapas del aprendizaje en matemática*, 4a ed., Barcelona, Teide, 1981.
- DOUADY, RÉGINE, «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, no. 2, 1986, pp. 5-31.
- ERMEL, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours préparatoire*, París, Institut National de la Recherche Pédagogique / Hatier, 1991.
- ERNEST, PAUL, «The number line as a teaching aid», *Educational Studies in Mathematics*, no. 16, 1985, pp. 411-424.
- FAYOL, MICHEL, *L'enfant et le nombre. Du comaestrage a la résolution de problèmes*, París: Delachaux et Niestlé, 1990.
- FILLOY, EUGENIO (coord.), *Matemáticas. Tercer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1972.
- (coord.), *Matemáticas tercer grado. Libro del maestro*, 3a ed., México: Secretaría de Educación Pública, 1975.
- FILLOUX, JANINE, *Du contrat pédagogique ou comment faire aimer les mathématiques à une jeune fille qui aime l'ail*, París, Dunod, 1974.
- FREUDENTHAL, HANS, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, Dordrecht, Reidel, 1983.
- FUSON, KAROLINE, y HALL J.W., «The acquisition of early number word meaning: a conceptual analysis and review», en H. P. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking*, Nueva York: Academic Press, 1983.
- GÁLVEZ, GRECIA, *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*, Tesis de doctorado en ciencias en la especialidad en investigaciones educativas, México: Departamento de Investigaciones Educativas- Cinvestav, 1985.
- GARDUÑO, ORLANDO, «El proceso de dividir. Una investigación con profesores de primaria», documento mimeografiado, maestría en Desarrollo Educativo, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2000.
- GASCÓN, JOSEPH, «Evolución de la didáctica de las matemáticas como disci-

- plina científica», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, no. 1, 1998, pp. 7-34.
- GATTEGNO, C., y OTROS, *El material para la enseñanza de las matemáticas* (trad. Gonzalo Medina), Madrid, Aguilar, 1967.
- GÓMEZ ALFONSO, BERNARDO, *Numeración y cálculo*, Madrid, Síntesis.
- GÓMEZ-CHACÓN, INÉS MARÍA, «Affective influences in the knowledge of mathematics», *Educational Studies in Mathematics*, no. 43, 2000, pp. 149-168.
- GOROSTIZA, LUIS, y JUAN JOSÉ RIVAUD (coords.), *Matemáticas cuarto grado. Libro del maestro*, México: Secretaría de Educación Pública, 1974.
- GUIET, JEANNE, «Algorithmes et schèmes: cas de la division», en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994, pp. 225-230.
- HERNÁNDEZ, JULIO, y AURELIO LÓPEZ ORCHE, *Mi cuaderno de trabajo de sexto año. Aritmética y geometría*, México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito, 1962.
- , *Mi libro de sexto año. Aritmética y geometría*, México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito, 1962.
- , «Aritmética y Geometría», *Mi libro y Mi cuaderno de trabajo de sexto año. Instructivo para el maestro*, México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito, 1968.
- IMAZ, CARLOS (coord.), *Matemáticas. Segundo Grado. Libro del maestro*, México: Secretaría de Educación Pública, 1973.
- (coord.), *Matemáticas sexto grado. Libro del maestro*, México: Secretaría de Educación Pública, 1974.
- (coord.), *Matemáticas. Sexto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1974.
- (coord.), *Matemáticas. Primer grado. Libro del maestro*, 6a ed., México: Secretaría de Educación Pública, 1977.
- (coord.), *Matemáticas. Quinto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1985.
- INTERNATIONAL STUDY GROUP FOR MATHEMATICS LEARNING, *Mathematics in Primary Education* (comp. Z. P. Dienes), Hamburgo: Instituto de Educación de la UNESCO, 1966.
- KIEREN, THOMAS, «Partitioning, equivalence and the construction of rational numbers ideas», en M. Sweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack y M. Suydam (eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematic Education*, (trad. de Olimpia Figueras), Birkhäuser, 1983, pp. 506-508.
- , «Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development», en J. Hiebert y M. Behr (eds.) *Number concepts and operations in the middle grades 2*, Reston / National Council of Teachers

- of Mathematics, 1988, pp. 162-181.
- KLINE, MORRIS, *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI Editores, 1976.
- KUZNIAK, ALAIN, *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, tesis de doctorado en didácticas de las disciplinas, París: Université de París: VII, 1994.
- LABORDE, COLLETTE, «Divers aspects de la dimension sociale dans les recherches en didactique des mathématiques», *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 67-82.
- LARA ARZATE, LUIS, y NEPTALI ORTEGA CAMPIRÁN, «La formación de maestros de primaria en el área de matemáticas. Relato de una experiencia en el Estado de México», *Pedagogía*, vol. 7, no. 21, enero-junio de 1991, pp. 99-106.
- LEGRAND, M., «Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique: le débat scientifique en situation d'enseignement», *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1988, pp. 53-62.
- LEIF, J. y R. DÉZALY, *Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas*, Buenos Aires: Kapelusz, 1961.
- LEVAIN, JEAN-PIERRE, «La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire», *Educational Studies in Mathematics*, no. 23, 1992, pp. 139-161.
- MANCERA, EDUARDO, *Saber matemáticas es saber resolver problemas*, México: Iberoamérica, 2000.
- MARGOLINAS, CLAIRE, «Éléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, no. 1, 1992, pp. 113-158.
- , *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.
- MARTÍNEZ, PATRICIA, y EVA MORENO, «Aprendiendo a dividir», *Básica. Revista de la Escuela y del Maestro*, no. 11, 1996, pp. 34-44.
- MAUDET, CAMILLE, *Apprentissages en mathématiques, étude et critique du processus psychodynamique d'apprentissage selon Dienes*, Burdeos: Institut de Recherche en Didactique des Mathématiques-Université de Burdeos I, 1979.
- MENDOZA, JESÚS, «La reforma curricular y los problemas en la clase de matemáticas», en Avila, Alicia (dir.), *Evaluación cualitativa de las repercusiones de la reforma a las matemáticas en la educación primaria* (reporte de investigación no publicado), México: Universidad Pedagógica nacional/Organización de Estados Americanos, 2000, pp. 35-64.
- MERCIER, ALAIN, «La participation des élèves à l'enseignement», en

- Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, no. 3, 1998, pp. 279-310.
- MERCIER, ALAIN, *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Tesis de doctorado en la especialidad de didáctica de matemáticas. Universidad de Burdeos I, 1992.
- , «Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques», en Gilbert Arsac y otros (coords.), *Différents types de savoirs et leur articulation. Travaux de thèses de didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 145-169.
- , «La relation didactique et ses effets», en Claudine Blanchard-Laville (dir.), *Variations sur une leçon de mathématiques*, París: Harmattan, 1997, pp. 259-312.
- MIRANDA ALONSO, TOMÁS, *El juego de la argumentación*, 2ª ed., Madrid, Ediciones de la Torre, 1995.
- MOIÏÈRE, «El burgés gentilhomme», en Molière, *Comedias*, México: Porrúa, 1984, pp. 41-83.
- MOPONDI, BENDEKO, «Les explications en classe de mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, no. 3, 1995, pp. 7-52.
- MOPONDI, BENDEKO, *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme: notion de proportionnalité au cours moyen*, tesis de doctorado de tercer ciclo, Burdeos: Université de Bordeaux, 1986.
- NADOT, SUZANNE, «Obstacles et apprentissages», en Claudine Blanchard-Laville (dir.), *Variations sur une leçon de mathématiques*, París: Harmattan, 1997.
- National Council of Teachers of Mathematics, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, Sevilla: edición en castellano de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», 1992.
- , *Conjuntos*, México, Trillas, 2a. ed., 1990.
- , *Números enteros*, México: Trillas, 1967.
- , *Sugerencias para resolver problemas*, México: Trillas, 1970.
- NEYRET, ROBERT, «Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division. Réperage de quelques difficultés», *Rencontres Pédagogiques*, no. 4, París: Institut National de la Recherche Pédagogique, 1984, pp. 15-32.
- NOIRFALISE, ROBERT, «Attitudes du maître et résultats scolaires en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, no. 3, 1986, pp. 75-112.
- NOVARO, ROSA MARÍA, *Mi libro de quinto año. Aritmética y geometría. Estudio de la Naturaleza*, México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, 1961.
- NOVARO, ROSA MARÍA, *Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Aritmética y geo-*

- metría, México: Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito, 1961.
- OLAIZOLA, IÑAKI DE₄ y LUZ MANUEL SANTOS TRIGOS, «Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases: argumentando la inexistencia de soluciones», *Educación Matemática*, vol. XVI, no.1, abril de 2004, pp. 5-27.
- ORUS BAGUENA, PILAR, *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique: effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*, tesis de doctorado en didáctica de matemáticas, Burdeos: Université de Bordeaux I, 1992.
- PELTIER, MARIE-LISE, «Tendencias de la investigación en didáctica de las matemáticas y la enseñanza de los números en Francia», *Educación Matemática*, vol. 7, no. 2, agosto de 1995.
- , «Representaciones de los profesores de escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza», *Educación Matemática*, vol. 11, no. 3, diciembre de 1999, pp. 5-24.
- (coord.), *Analyse comparée des pratiques effectives de professeurs des écoles enseignant différentes disciplines en ZEP/REP urbaine*, (reporte de investigación. Institute de Recherche en Enseignement des Mathématiques- Université de Paris VII, 2004.
- PÉREZ HERNÁNDEZ, ESNEL, y otros, «El libro de texto Matemáticas quinto grado», en *Memoria del XII Congreso Nacional de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas*, Querétaro, noviembre de 1993.
- PÉREZ LINDO, AUGUSTO, «Las matemáticas modernas: pedagogía, antropología y política. Entrevista a Georges Papy», *Perfiles Educativos*, no. 10, 1980, pp. 41-46.
- PERRET, JEAN-FRANÇOIS, *Comprendre l'écriture des nombres*, Berna: Peter Lang, 1985.
- PERRET-CLERMONT, ANNE-NELLY, *La construcción de la inteligencia en la interacción social*, Madrid: Visor, 1984.
- PERRIN-GLORIAN, MARIE-JEANNE, «Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles"», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13, no. 1-2, 1993, pp. 5-118.
- , «Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives», en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994, pp. 97-147.
- PETERSON, JOHN, y JOSEPH HASHISAKI, *Teoría de la aritmética*, México, Limusa, 1980.
- PIAGET, JEAN, «El mito del origen sensorial de los conocimientos científicos», *Psicología y epistemología*, Buenos Aires: Emecé Editores, 1998.
- PICARD, NICOLE, *Des ensembles a la découverte du nombre*, París: OEDL, 1966.

- PICARD, NICOLE, *La conquista del número II*, México: Varzén, 1972.
- PIRIE, S. E. B. y R. L. E. SCHWARZENBERGER, «Mathematical discussion and mathematical understanding», *Educational Studies in Mathematics*, no. 19, 1988, pp. 459-470.
- PORTUGAIS, JEAN, *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Berna: Peter Lang, 1995.
- RAMÍREZ, RAFAEL, *Técnica de la enseñanza*, México: Escuela Nacional de Maestros, 1994 (1ª edición del original facsimilar de 1970).
- RATSIMBA-RAJOHN, HARRISON, *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, Memoria del Diplomado de Estudios a Profundidad en Didáctica de las Matemáticas, Burdeos: Université de Bordeaux I, 1977.
- RICCO, GRACIELA, «Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans», *Educational Studies in Mathematics*, no. 13, pp. 289-327.
- RIEUNAUD, JEAN, *L'approche du nombre par le jeune enfant*, París: Presses Universitaires de France, 1989.
- ROBERT, ALINE, y JACQUELINE ROBINET, *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*, París: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM)- Université de Paris VII, 1989.
- ROBLES, D. y M. L. MINQUINI, *El matemático. Quinto grado*, México: Fernández Editores, 1988.
- RODITI, ERIC, «Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 23, no. 2, 2003, pp. 183-216.
- ROUCHIER, ANDRÉ, «Naissance et développement de la didactique des mathématiques», en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994, pp. 148-160.
- ROZÁN, JOSÉ E., *Aritmética y nociones de geometría*, 4ª ed., México: Progreso, 1952.
- RUEDA, MARIO (coord.), «Procesos de enseñanza y prácticas escolares», en Mario Rueda (coord.), *Procesos de enseñanza y aprendizaje*, vol. I, México: Fundación SNTÉ / Consejo Mexicano de Investigación Educativa, 1995, pp. 67-119.
- SALIN, MARIE-HÉLÈNE, «Contraintes de la situation didactique et décisions de l'enseignante», en Claudine Blanchard-Laville (dir.), *Variations sur une leçon de mathématiques*, París: Harmattan, 1997, pp. 31-58.
- SARRAZY, BERNARD, *La sensibilité au contrat didactique. Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*, tesis de doctorado en ciencias de la educación, Université de Bordeaux II, 1996.

- SARRAZY, BERNARD, «Sens et situation: une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, no. 2, 1997, pp. 135-166.
- Secretaría de Educación Pública, *Programas para las escuelas primarias de la República Mexicana*, México: Secretaría de Educación Pública, 1944.
- , *Programas de educación primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*, México: Secretaría de Educación Pública, 1964.
- , *Plan de estudios y programas de educación primaria*, México: Secretaría de Educación Pública, 1972.
- , *Libro para el maestro. Primer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1980.
- , *Libro para el maestro. Tercer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1982.
- , *Libro para el maestro. Sexto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1982.
- , *Libro para el maestro. Quinto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 5ª ed., 1985.
- , *Acuerdo para la Modernización de la Educación Básica*, México: Secretaría de Educación Pública, 1992.
- , *Plan y programas de estudio. Educación básica primaria*, México: Secretaría de Educación Pública, 1993.
- , *Avance Programático. Tercer grado. Educación Básica Primaria*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas cuarto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas quinto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas segundo grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas sexto grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- , *Libro para el maestro. Matemáticas tercer grado*, México: Secretaría de Educación Pública, 1994.
- SAUCEDO, MARÍA ELENA, y ASUNCIÓN HERMOSILLO, «Los libros en la clase de matemáticas», en Alicia Avila (dir.), «Evaluación cualitativa de las repercusiones de la reforma a las matemáticas» (reporte de investigación no publicado), México: Universidad Pedagógica Nacional / Organización de Estados Americanos, 2000, pp. 107-146.
- SHULMAISTER, MÓNICA, *La enseñanza de las fórmulas en la escuela primaria: un análisis didáctico*, tesis de maestría, México, Departamento de Investi-

- gaciones Educativas, 2000.
- SHULMAN, LEE, y EVAN R. KEISLAR, *Aprendizaje por descubrimiento. Evaluación Crítica*, México: Trillas, 1979.
- SIROTA, RÉGINE, «Analyse sociologique d'une situation didactique à l'aide d'une nouvelle grille d'observation», *Revue Française de Pédagogie*, no. 4, 1978, pp. 145-148.
- , «Approches ethnographiques en sociologie de l'éducation: l'école et la communauté, l'établissement scolaire, la classe», *Revue Française de Pédagogie*, no. 80, 1987, pp. 69-97.
- SNYDERS, GEORGES, *Pedagogía progresista. Educación tradicional y educación nueva*, Madrid: Ediciones Marova, 1972.
- SOTO, ISABEL y NICOLÁS ROUCHE, «Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos», *Educación Matemática*, vol. VII, no. 1, abril de 1995, pp. 77-96.
- STIGLER, JAMES y JAMES HIEBERT, *The teaching gap. Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*, Nueva York: The Free Press, 1999.
- STREEFLAND, LEEN, «Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción» (trad. Olimpia Figueras), *Memorias de la Primera Conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación, Matemática*, Utrecht, agosto de 1977 (documento mimeografiado).
- TÉLLEZ, LETICIA, *La enseñanza de la división a través de la resolución de problemas. Cuatro interpretaciones a la nueva propuesta curricular de tercer grado*, tesis de maestría en educación, México: Universidad Pedagógica Nacional, 1998.
- TOCHON, FRANÇOIS V., *L'enseignant expert*, París: Nathan, 1993.
- TYACK, DAVID, y LARRY CUBAN, *En busca de la utopía. Un siglo de reformas de las escuelas públicas*, 2ª ed., México: Fondo de Cultura Económica, 2ª ed., 2001.
- VEGA, LUIS, «Argumentación», en Román Reyes (dir.), *Diccionario crítico de ciencias sociales*, disponible en www.ucm.es/info/eurotheo/diccionario, 2004.
- VERGNAUD, GÉRARD, «La théorie des champs conceptuels», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, nos. 2-3, 1990, pp. 133-170.
- VILLARREAL, TOMÁS, *Didáctica general*, México: Instituto Federal de Capacitación del Magisterio, 1996.
- VIRGEN SÁNCHEZ, HERMELINDA, *Mi libro de cuarto grado segunda parte. Aritmética y geometría. Estudio de la Naturaleza*, México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos, 1960.
- VOIGT, JÖRG, «Patterns and routines in classroom interaction», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6, no. 1, pp. 69-118.

Transformaciones y costumbres en la matemática escolar,
de Alicia Avila,

se terminó de imprimir y encuadernar
en los talleres de Programas Educativos,
S. A. de C. V., calzada Chabacano 65, local A,
col. Asturias, México, D. F., el 30 de septiembre de 2006.
En su composición y formación, realizadas
por Icónea Comunicación y Diseño
(tel. 044-55-2109-5378), se utilizaron tipos
New Baskerville en puntos 8, 9, 10, 11, 16 y 28.



En estas páginas se retrata la actividad en un aula a lo largo de aproximadamente una década. El periodo analizado inicia en las postrimerías de la llamada matemática moderna e incluye la resolución de problemas como eje, aún en vigor, de la actividad matemática escolar. Se señalan aquí una serie de costumbres que los profesores no han abandonado, así como la manera en que otras se ajustan y transforman para dar cabida a las innovaciones y reformas curriculares promovidas por el Estado. A través del texto cobran vida las acciones de docentes experimentados, de profesores principiantes, de algunos que tratan de asimilar las propuestas oficiales y de otros que las marginan de su acción educativa. Todo ello permite entender cómo es que determinados proyectos educativos y ciertos contratos didácticos permanecen en la escuela a pesar de haber perdido todo prestigio y, sobre todo, a pesar de no servir para que los alumnos aprendan. Así, desde una perspectiva novedosa y crítica se analiza la cotidianidad de la clase de Matemáticas, lo cual será útil para determinar hacia dónde han de orientarse las reformas educativas y la actualización de profesores, con miras a rebasar los preocupantes resultados en esta materia que los exámenes nacionales e internacionales ponen de manifiesto.

Alicia Avila, doctora en Pedagogía por la Universidad Nacional Autónoma de México, inició su trabajo profesional como maestra de educación primaria. Es profesora-investigadora titular de la Universidad Pedagógica Nacional, en cuyo posgrado ha dado cátedra durante casi veinte años. Participó activamente en la reforma mexicana de los años noventa y es coautora de varios libros de texto gratuitos de Matemáticas para primaria. En 2004 encabezó el grupo de investigadores que escribieron *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*.

ISBN 968-853-663-6



9 789688 536636



26187