

**PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN
DE LA ARITMÉTICA
EN LA ESCUELA PRIMARIA**

Los
NINOS
TAMBIÉN
CUENTAN

SEP
LB1589
M6
A86

LIBROS
DEL
RINCON
SEP

ALICIA ÁVILA



Los NIÑOS TAMBIÉN CUENTAN

**PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN
DE LA ARITMÉTICA EN LA ESCUELA PRIMARIA**



CUADERNOS DE AULA

La investigación en la que se basa este libro fue realizada en la Universidad Pedagógica Nacional por Alicia Ávila, con la participación de Juan Castrejón, Hugo Espinosa y Rosa María Villasana; Santa Rodríguez de Ita y Rosalba Canseco colaboraron en los talleres de resolución de problemas que se realizaron a lo largo de la investigación.

Una parte de la investigación se realizó en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas del Institut National du Recherche Pédagogique de Francia, dentro del convenio de intercambio entre el Instituto y la Universidad.

Sistema de clasificación Melvil Dewey D.G.B.

510 Ávila, Alicia
A75 *Los niños también cuentan* / texto de Alicia
1995 Ávila. —México: SEP, 1994.
86 p. —(Cuadernos de Aula)

ISBN 968-29-5772-9

1. Aritmética. 2. Procesos de aprendizaje.
3. Resolución de problemas. I. t. II. Ser.

Primera edición en Libros del Rincón: 1994
Primera reimpresión: 1995

Producción: SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
Unidad de Publicaciones Educativas
Isabel la Católica 1106
Col. Américas Unidas
03610 México, D. F.
Tel. 6 74 32 22 / Fax 6 74 32 87

D.R. © de la edición
Consejo Nacional de Fomento Educativo
Av. Thiers 251-10° piso
11590 México, D. F.

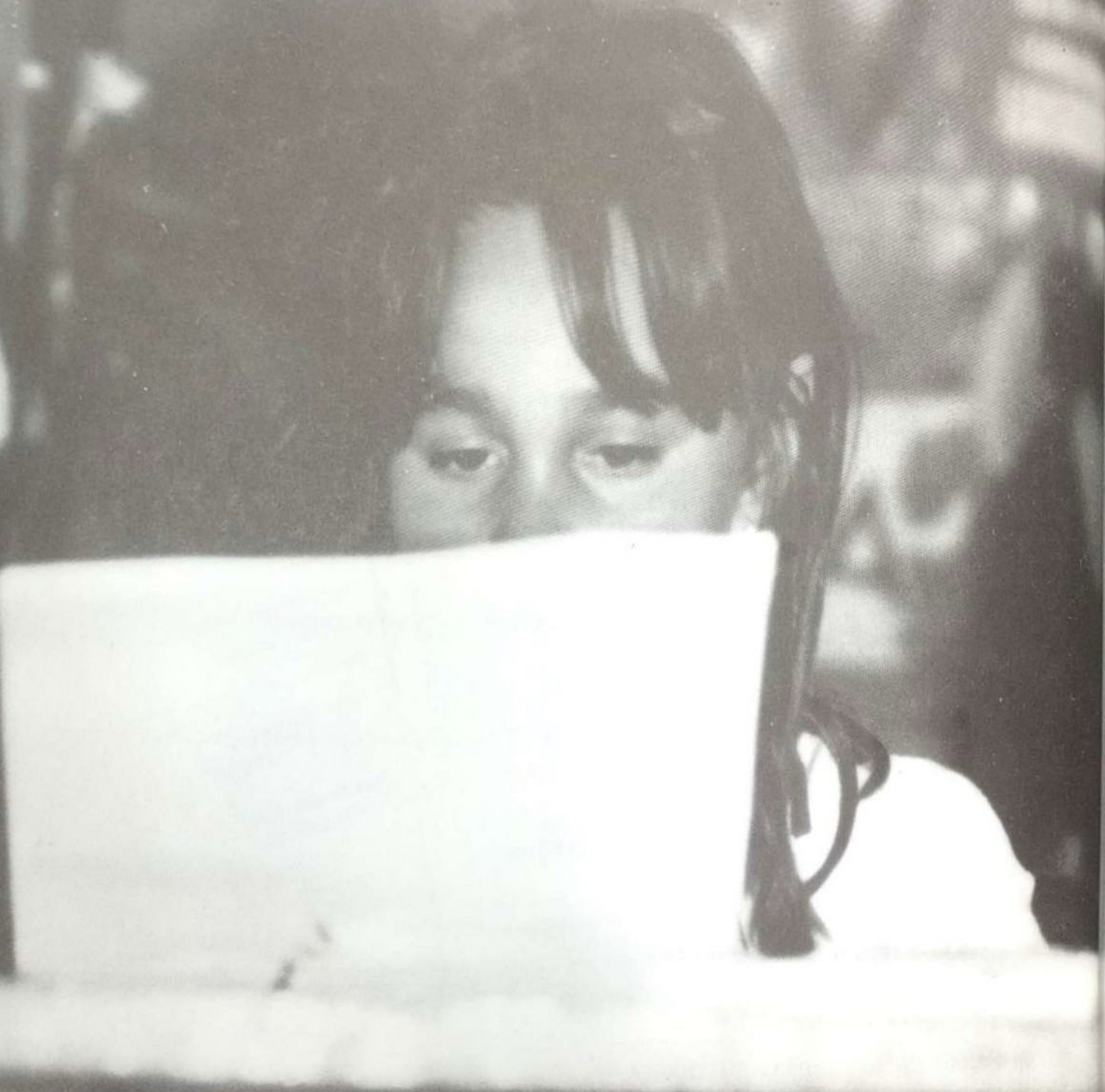
Diseño gráfico: Gabriela Rodríguez V.
Fotografía: Alcibiades Papacostas

ISBN 968-29-5772-9

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	5
I ♦ DE GUSTOS, CREENCIAS Y SOLUCIONES	9
II ♦ UN SIGNIFICADO QUE SE CONSTRUYE EN LA ESCUELA	17
III ♦ LOS NIÑOS CONSTRUYEN ESTRATEGIAS PARA DIVIDIR	31
IV ♦ UN CONCEPTO Y MUCHAS POSIBILIDADES	41
V ♦ PROBLEMAS FÁCILES Y PROBLEMAS DIFÍCILES	55
VI ♦ LEER, INTERPRETAR Y RESOLVER	67
VII ♦ REFLEXIONES PARA LA ENSEÑANZA	81



INTRODUCCIÓN

Este libro se escribió para los maestros. Está basado en una investigación realizada con 346 niños que cursaban su educación primaria en escuelas públicas o privadas. Los más pequeños cursaban el tercer grado, otros el cuarto, quinto o sexto; los más grandes, de hecho, tenían ya dos meses en la escuela secundaria. Unos asistían a escuelas de barrios populares, en turnos vespertinos; otros lo hacían en escuelas de colonias céntricas en turno matutino; los hay también que asistían a colegios de alto prestigio académico. En las páginas siguientes damos cuenta de los saberes aritméticos de estos niños, así como de los caminos que siguieron para construirlos.

El libro es una invitación a descubrir a los alumnos, a reflexionar sobre aquello que los maestros difícilmente pueden observar por estar inmersos en la dinámica del salón de clases. No encontrará el maestro aquí una evaluación del sistema educativo en tanto que un relato de aprendizajes no logrados; tampoco un conjunto de secuencias y sugerencias didácticas, de recomendaciones precisas sobre cómo hacer para enseñar mejor la matemática. Encontrará, eso sí, un recuento de aciertos, inquietudes, interpretaciones y tropiezos de niños de 8 a 14 años que intentaban aprender aritmética en la escuela.

A lo largo de este libro hablamos de aprendizaje de la aritmética y resolución de problemas, pues creemos que los conocimientos adquieren y muestran su significado en situaciones en las que es posible resolver problemas con su ayuda. El hilo conductor, entonces, son los procesos por los cuales los niños construyen los significados de las operaciones aritméticas siempre inmersas en una situación-problema.

Haremos hincapié en que los niños, al ampliar los significados que dan a las operaciones, son capaces de resolver problemas más complejos y que —recíprocamente— la construcción de soluciones los ayuda a enriquecer sus ideas sobre las operaciones.



Veremos también que los alumnos no son pequeños hacedores de cálculos que buscan con rigor las soluciones que demanda el profesor. Los niños se acercan a construir las matemáticas con sus dudas, sus afectos y sus creencias; con sus maneras peculiares de ver esta disciplina y de construir sus soluciones.

No es de extrañar, pues, que a lo largo de estas páginas nos planteemos preguntas como:

¿Los problemas que a nosotros nos resultan fáciles, lo serán también para los niños?, o ¿no será que ellos ven las cosas de manera diferente y encuentran las dificultades en lugares en donde nosotros ni siquiera reparamos?

¿En dónde habremos de ubicar las dificultades que muchos de los alumnos tienen para resolver problemas: en el cálculo numérico, en la mala utilización de las estrategias de resolución o en la interpretación que hacen de los problemas?

¿Será cierto que los niños resuelven los problemas y los cálculos utilizando los procedimientos que el maestro se esfuerza en transmitir?

¿Será verdad que los problemas sólo tienen una solución correcta?

Las respuestas a éstas y a otras preguntas las construimos con base en las que nos dieron los niños antes mencionados. Las recogimos de sus producciones escritas, de las confrontaciones con sus compañeros, de los diálogos que sostuvimos con ellos. Es decir, las recogimos escuchándolos. Las siguientes páginas constituyen la interpretación que hicimos de tales respuestas y queremos compartirlas con los profesores.

Un día una maestra dijo: *¿Para qué quieres que los niños hablen si dicen puras burradas?*

Sin duda la maestra construyó esta frase con base en su experiencia. Seguramente sus alumnos eran de los que no se sabían las tablas, ni las divisiones, ni las fracciones. Pero hagamos al menos una



aclaración por el momento: lo que demandamos los maestros son conocimientos y procedimientos escolarizados, en donde los adultos somos quienes definimos la lógica. Sin embargo, hay muchos otros saberes y procedimientos aritméticos que los niños construyen en su vida cotidiana, y si los interrogamos adecuadamente, ellos los expresarán de manera coherente y sabrán responder correctamente a nuestras preguntas. Escucharlos ayudará a que cuando les preguntemos las tablas, o las fracciones, o la regla de tres, ya no digan tantas *burradas*.

Con base en estas ideas, a lo largo de este libro mostraremos que:

Los niños saben muchas cosas y aun cuando nosotros creemos que no es así —porque no responden como esperamos— sus respuestas casi siempre obedecen a la lógica del momento conceptual en que se encuentran, y esa es una lógica, no un disparate.

Este libro es entonces para los maestros que piensan que es importante escuchar a los alumnos, que éstos tienen algo que decirnos. También es para aquéllos que quieran entender las *burradas* de sus alumnos y ayudarles a aprender a partir de ellas. En otras palabras, este libro es para los maestros que crean que en la clase de matemáticas *los niños también cuentan*.



I. DE GUSTOS, CREENCIAS Y SOLUCIONES

Este primer capítulo lo dedicamos a un aspecto del aprendizaje de las matemáticas en el que pocas veces reparamos: la influencia que los gustos, los afectos y las creencias ejercen sobre la actividad matemática de los alumnos. Veremos también que no siempre es fácil elegir entre la buena y la mala respuesta. Empezaremos por este último tema.

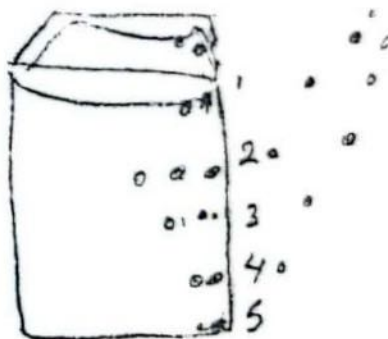
Un problema y muchas aristas

En este apartado analizaremos las soluciones dadas a un problema célebre: el **problema del caracol**. Veremos que **los niños no siempre se comportan como pequeños matemáticos en el momento en que el maestro solicita resolver un problema escolar**, sino que hay otras cuestiones que influyen de manera significativa en el desempeño de sus tareas.

El problema que resolvieron los niños de sexto año fue el siguiente: **un caracol está en el fondo de un pozo que tiene 5 metros de profundidad. Si en el día sube tres metros y en la noche baja dos, ¿cuántos días tardará el caracol en salir del pozo?**

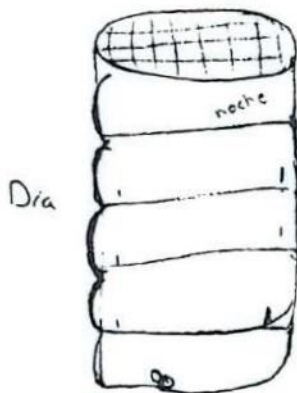
ALMA ROSA: (al frente del salón, dirigiéndose a todos sus compañeros) Xóchitl y yo creemos que el caracol se tarda tres días en salir del pozo porque cada día sube tres metros y baja dos (al hablar va señalando con el gis los movimientos del caracol sobre el pozo que dibujaron en el pizarrón y que es igual al que habían hecho en su cuaderno. Véase figura al margen). Entonces, en el primer día sube un metro, y llega hasta aquí (señala el punto donde estaría el caracol). En el segundo día, subiría otros tres metros y bajaría dos...y ya llevaría otro metro, iría hasta aquí (señala nuevamente en el dibujo del pozo) y al siguiente subiría otros tres metros y ya llegaría hasta la orilla... y ya se salió el caracol, en el tercer día.

En el tercer día



Xóchitl y
Alma Rosa

2 días y medio



lo resolvimos
por un dibujo

MARÍA JUANA: Nosotras pusimos aquí el caracol (explica, poniendo su dedo en la parte inferior del pozo que dibujaron ella y Reyna en el pizarrón. Véase figura al margen); luego, se subió uno, dos, tres metros y quedó aquí (siempre señalando y moviendo el gis, para simular los movimientos del caracol). Y luego baja dos metros, queda aquí, y ya va un día... después se vuelve a subir tres metros, al día siguiente... (nuevamente señalando) y se vuelve a bajar dos, y queda aquí, y ya es el otro día y se sube otra vez tres metros, y llega a la orilla y como ya se salió, en la noche ya no se tiene que bajar...por eso se tardó dos días y medio en salir.

Alma Rosa y María Juana expresaron dos soluciones distintas al problema del caracol: **tres días y dos días y medio** fueron sus respuestas. A nosotros las dos nos parecen razonables pero... quizá es cosa de analizar el asunto con más detenimiento. Esto es lo que haremos en los párrafos siguientes.

La imagen más extendida de las matemáticas es la de una disciplina donde siempre es posible hacer una división estricta entre lo falso y lo verdadero. Muy probablemente el maestro haga suya dicha imagen. Sin embargo, esta proposición difícilmente se sostiene si nos referimos a la historia de las matemáticas: el rigor del razonamiento matemático no conduce siempre a decidir fácilmente entre la **verdad** y la **falsedad**.

Algo similar nos muestran las respuestas y confrontaciones de los niños: no siempre es posible distinguir, al menos fácilmente, las respuestas **buenas** de las **malas**. Y esta tajante separación la hacemos con frecuencia en el salón de clase.

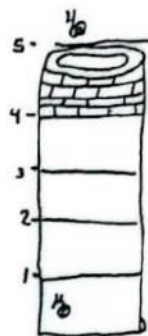
Pero...regresemos a las respuestas de Juana y Alma Rosa. En ellas observamos que los datos del problema pueden ser objeto de diversas interpretaciones por parte de los niños. De estas interpretaciones, derivan las distintas soluciones que construyen. Así, Xóchitl y Alma Rosa razonaron correctamente el problema interpretando los datos como números naturales: los días son 1,2,3,4,5,...y fue utilizando estos números que resolvieron el problema. Por eso su respuesta es **3 días**; en cambio, para María Juana y para Reyna los días que tarda el caracol en salir del pozo estaban compuestos por el día y la noche, es decir, por dos medios días: su interpretación la ubicaron en el ámbito de los números racionales pues el día lo han fraccionado. De ahí que su respuesta es **dos días y medio**.

Y no se puede negar la solidez de su argumentación: **¡pues si el caracol ya se sale, ya no se tiene que bajar en la noche!**

Pero no fueron sólo esas dos las respuestas razonables dadas a nuestro problema. Julio César y Carlos hicieron el dibujo que aparece al margen en la página siguiente, y dieron **4 días** como respuesta.

En su turno, Julio César toma la palabra y dice:

JULIO CÉSAR: Nosotros decimos que es 4 el resultado, porque el caracol está aquí (señala el fondo del pozo, colocando el gis con precisión); se sube tres y baja dos, en el primer día. Al otro día, se vuelve a subir otros tres hasta acá, y se vuelve a bajar, hasta aquí (siempre va acompañando la explicación con movimientos de gis sobre el dibujo del pozo). Van dos días y al otro día otra vez, se sube tres hasta aquí y se baja dos y son tres días...



en 4 días

(A lo largo de la sesión, los niños muestran entusiasmo. En ese momento se empiezan a escuchar opiniones distintas que unos y otros expresan a gritos, interrumpiendo a Julio César; pero él continúa, en voz alta, casi a gritos, pues si no lo hiciera así, nadie lo escucharía.) No, no se ha salido, van tres días, pero no se ha salido, apenas va aquí (y señala con toda precisión uno de los puntos que constituyen la orilla del pozo en el dibujo) todavía no se puede salir, no ha dado la vuelta, para salirse necesita dar la vuelta para acá (señala el borde del pozo) en tres días apenas está aquí, no ha sacado nada, ni las antenas, necesita bajarse y salir en el cuarto día.

Otra vez los gritos de acuerdo y desacuerdo, pero esta vez más fuertes. Julio César intenta convencer repitiendo su argumentación de que en el tercer día el caracol está en el punto de unión entre la pared y el borde del pozo. Pero a estas alturas los equipos que habían respondido **tres o dos y medio** ya están en el dibujo que Julio tomó como base para su explicación tratando de argumentar en contra de esa respuesta y a favor de las suyas.

Otros niños habían respondido **5 días** debido a una prematura aritmetización de la situación (es decir, habían hecho el planteamiento siguiente: "En el día sube 3 y en la noche baja 2, sube un metro cada día porque $3 - 2 = 1$. Como cada día sube un metro y el pozo tiene 5 metros, se tarda 5 días en salir." Con este razonamiento los niños desprendieron prematuramente los cálculos de su relación con la situación física planteada y no se percataron de que en 3 días el caracol se podía salir del pozo pues ya había alcanzado la orilla). Estos niños, en este momento, tomaron ya partido por alguna de las tres respuestas motivo de discusión y el salón se ha vuelto un griterío.

Intentando poner orden y claridad solicitamos a todos sentarse en su lugar y, cuando esto se logró con ciertas dificultades, pedimos a todos que levantaran la mano para indicar su adhesión, ya fuera a una o a otra respuesta. Las opiniones se dividen, no se puede llegar a un acuerdo; unos y otros vuelven a gritar defendiendo sus puntos de vista. Nadie logra convencer a nadie. Al final la discusión queda abierta.

Durante el recreo, los defensores de una u otra posición continúan con el debate. En la siguiente sesión los niños quieren continuar con el asunto. Curiosamente, no logran descentrar sus opiniones, no es sino a sugerencia nuestra que aceptan la posibilidad de dos o más respuestas. Y es que... **en la escuela les hemos enseñado que no existe sino una única respuesta.**

Estamos así ante tres respuestas acertadas, aunque diferentes, a un mismo problema. Probablemente una de ellas —la de Julio César y su compañero— sea demasiado local, demasiado centrada en las condiciones particulares del problema, pero es sólida en su fundamentación. Vemos, entonces, que no sólo las estrategias de resolución pueden diferir, sino también los resultados.

En el primer caso tenemos la respuesta **3 días**, la esperada por los profesores y por quien elaboró el problema. En los otros casos tenemos dos respuestas inesperadas y sin embargo correctas; la diferencia estriba en la interpretación que hicieron los niños del problema para luego resolverlo.

La respuesta **3 días**, deriva de una interpretación en el ámbito de los números naturales. Los que respondieron **2 y medio**, en cambio, llevaron el problema al campo de los racionales. Y los que obtuvieron **4 días** como respuesta privilegiaron la relación con la situación física planteada en el problema.

Quizá los matemáticos descarten esta discusión. A nosotros nos gusta saber que los niños piensan, y que piensan bien, y que son capaces de argumentar y defender sus puntos de vista y sus opiniones. Probablemente las resistencias a modificarlos tenga que ver fundamentalmente con la idea de que en matemáticas sólo hay una respuesta, pero también con la escasa oportunidad de dialogar que les damos en la escuela y en la clase. Porque esto también es un aprendizaje.



¿Quién dijo que el negro y el café combinan?

Estamos en el salón de clase, los niños trabajan resolviendo el **problema de las blusas y las faldas** (Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas, ¿de cuántas maneras distintas se puede vestir?). Al pasar por el lugar donde trabajan Juana y Reyna, escuchamos la discusión que sostienen con otros compañeros:

- REYNA: Nosotros tenemos 11 (se refiere a 11 combinaciones con 3 blusas y 4 faldas; y muestra la hoja donde resolvieron el problema apoyadas en un dibujo).
- JULIO: ¿Y por qué? si salen 12...
- REYNA: Es que negro con café no se ve bien.
- JULIO (y sus compañeros de equipo): ¡Buh! ¡Ah, las viejas! ¡Uh! (y otras exclamaciones similares).

Juana y Reyna se voltean a su lugar haciendo algunos gestos para responder a sus compañeros. Luego reinician la discusión entre ellas.

¿Qué podemos ver en esta discusión?

Si bien la tarea a la que estaban dedicados los niños de sexto año era solucionar un problema en la clase de matemáticas, las niñas habían decidido mantener su resolución en los límites de lo estético, del buen gusto en el vestir. Y éstas eran dos niñas de alto desempeño en matemáticas. Pero los colores que escogieron (morado, amarillo y café para las blusas; negro, rojo, verde y azul para las faldas) desde su punto de vista no siempre combinaban. En particular, negro con café no se veía bien.

En el momento de la confrontación entre los diferentes equipos, Reyna y Juana no presentan como resultado **11 combinaciones**. El resultado que muestran a sus compañeros es **12 combinaciones**. Seguramente la discusión con Julio y sus amigos tuvo algo que ver en esta modificación.

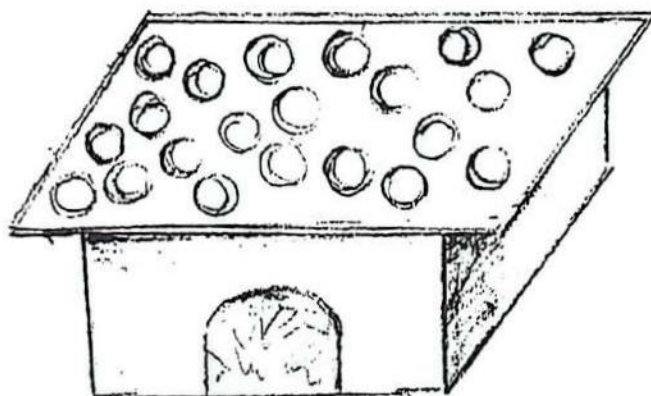
Este breve pasaje muestra que:

- los gustos, afectos y creencias son un aspecto integral en los procesos de resolución de problemas, no una variable insignificante o ajena.
- las situaciones-problema que precipitan la reorganización de las creencias de los niños, tienen muchas veces un origen más social que matemático.

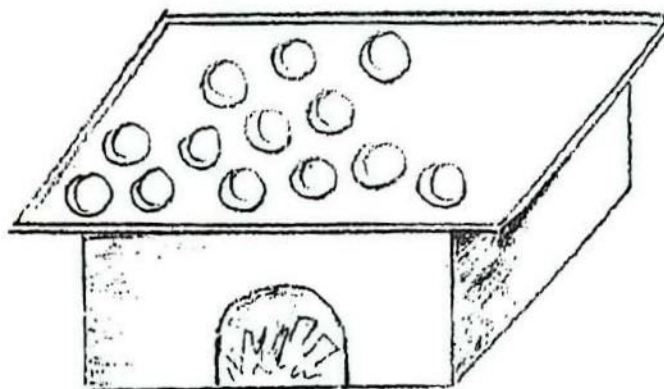
¿Qué le sucedió a los sopes?

El problema de los sopes era el siguiente:

■ Al comienzo de una kermesse, el anafre del puesto de sopes se veía así:



■ Media hora después, llega Hugo al puesto y encuentra el anafre así:



■ ¿Qué pasó con los sopes en esa media hora?

Los niños de sexto año habían resuelto con facilidad este problema, y se encontraban en el momento de la confrontación de los resultados:

CORO: ¡Se vendieron 8 sopos! (esa es la respuesta generalizada, todos los equipos la expresan). ¡Sí, porque había 21, quedan 13, se vendieron 8! (gritan algunos niños como justificación de su respuesta).

MAESTRA: ¿Y cómo supieron que se vendieron 8? (dirigiéndose a un niño).

NIÑO: Porque estaban todos pero cuando regresaron ya no estaban en el anafre.

MAESTRA: Entonces, a lo mejor si contestaran que los sopes ya no están en el anafre, sería una buena respuesta (dirigiéndose a otro niño).

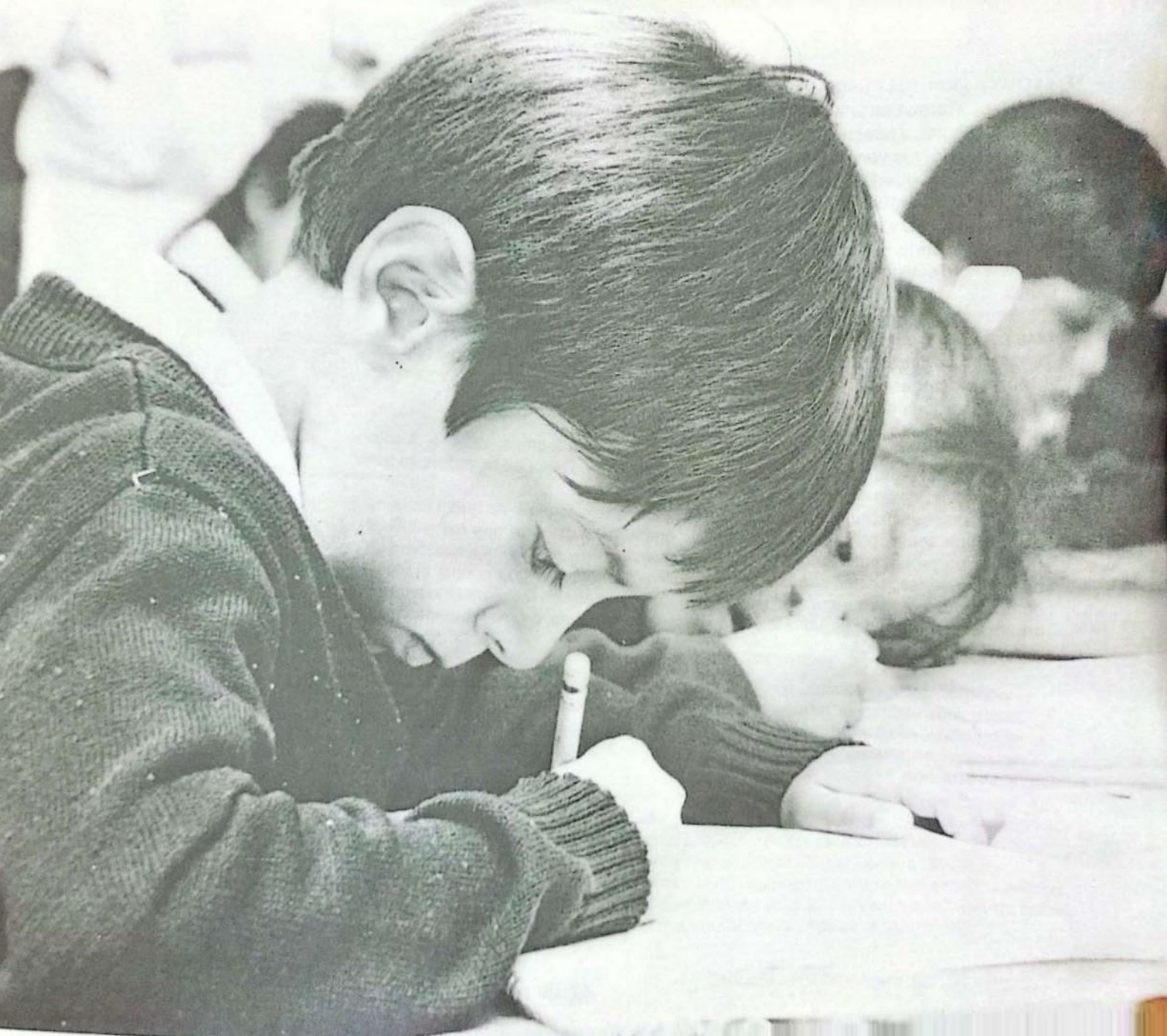
NIÑO: ¡No!

MAESTRA: ¿Por qué? (otra vez al mismo niño).
 NIÑO: ¡Porque es una kermesse, los vendieron porque están en una kermesse!
 MAESTRA: A ver, ¿ustedes qué dicen? (a todo el grupo).
 CORO: ¡No, los vendieron!
 MAESTRA: ¿No puede ser que la niña del puesto se los haya comido?
 CORO: ¡No! (exclamaciones, risas, murmullo generalizado).
 MAESTRA: A ver, allá atrás, ¿no podrá ser que se perdieron los 8 sopes, esa no podría ser una respuesta? (dirigiéndose a un equipo que no sigue la discusión grupal).
 CORO: ¡No! (enfático, contesta todo el grupo, no sólo el equipo al que iba dirigida la pregunta).
 MAESTRA: ¿Y por qué no?
 NIÑO: ¡Porque te los cobran! ¡No se te puede perder el dinero, tienes que entregarlo! ¡Tienes que entregar la cuenta a la maestra, si no tú saldrías poniendo! ¡No, la maestra te los da contados!

Estas y otras respuestas similares, las dieron los niños a gritos, todos al mismo tiempo, en tono que denotaba un fuerte convencimiento. Después un murmullo generalizado.

Y las respuestas surgieron de una pregunta que inicialmente no intentaba sino aclarar una solución. Tales respuestas, sin embargo, mostraron que los niños, al resolver un problema aritmético, no son exclusivamente pequeños hacedores de cálculos y de respuestas que buscan con rigor y fríamente las que solicita el profesor. Los problemas se resuelven y se interpretan con base en las experiencias y las creencias: ¡como la de pagar si te comes o regalas los sopes, o si no los cuidas bien!

Podemos decir, entonces, que la tarea de resolver problemas, aunque parezca restringirse al manejo de números y a la búsqueda de relaciones entre ellos, afortunadamente no logra separar las diferentes dimensiones de nuestros alumnos, al menos no siempre. Aún cuando muchas veces nosotros nos lo proponemos.



II. UN SIGNIFICADO QUE SE CONSTRUYE EN LA ESCUELA

Las siguientes páginas las dedicamos a describir la evolución de un significado particular de la multiplicación: la multiplicación como la operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Para hacerlo, nos basaremos en las respuestas que dieron los niños a problemas de combinaciones.

El problema planteado fue el siguiente:

- Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas.
¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?



4 días

Un día se pone una falda negra y una blusa roja
el otro una falda amarilla con blusa blanca
y el otro una falda verde y blusa azul
y al otro día como no tenía blusa
lavó la roja y se la puso con una falda blanca

Irma, Zayda y Jacqueline tenían 10 años cuando dieron esta respuesta, era su primer acercamiento a los **problemas de combinaciones**. Buena distancia habrán aún de recorrer para responder a este tipo de problemas de la manera como la escuela lo espera.

De las correspondencias a las combinaciones posibles

En los libros que editó la Secretaría de Educación en los años setenta aparecieron problemas como el que respondieron Irma y sus compañeras, acompañados de cuadros de doble entrada:

■ Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas.

¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?

Completa la tabla donde aparecen las distintas maneras como puede vestirse Gloria:



Nosotros planteamos ese problema a los niños de tercero a sexto grado, lo que observamos se relata en las siguientes páginas.

Prácticamente, ninguno de los niños había estudiado en la escuela este tipo de problemas. Sin embargo, enfrentados a la tarea, casi todos produjeron soluciones; las más elementales son como la siguiente:

■ Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas, ¿de cuántas maneras se puede Lupe vestir?

unas la deja sucias y otras las
guarda

SANDRA, TERCER GRADO. 8 AÑOS

Adrián, quien tiene 8 años y cursa tercer grado, resolvía algunos problemas de multiplicación y división cuando de pronto se nos acerca y dice:

—La más difícil se me hace la de las blusas y las faldas.

—¿Por qué?

—Porque no me sale con números, me sale con palabras.

Le pedimos a Adrián intentar de nuevo la resolución. Lorena, una compañerita que escucha el diálogo, interviene:

—A ese de las faldas yo tampoco le entiendo.

—¿Por qué?

—Por la pregunta.

E interviene entonces Sandra, una tercera compañera de 8 años:

—¡Ay, cómo no, se trata de que unas las deje sucias y otras las guarde!

Y esta es precisamente la respuesta que da Sandra al problema.

Sandra y Lorena, como la mayoría de los niños pequeños, dieron respuestas **con palabras** que no muestran el establecimiento de relaciones numéricas, ni aún las más elementales.

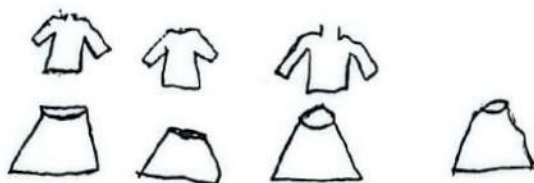
En las palabras de Adrián nos parece observar un esfuerzo intelectual por encontrar relaciones entre los datos del problema y por hacerse una **representación calculable** del mismo, esfuerzo que seguramente muchos niños realizaron. Y Adrián logra dar una respuesta en la cual establece relaciones numéricas, aunque éstas sean elementales:

2 veces una blusa

Pero muchos otros niños (como Sandra y Lorena) no cuentan con los saberes y conceptualizaciones previas que les permitan hacerlo. El **de las blusas** es, para esos niños, un problema *demasiado difícil*.

Otras soluciones un poco más evolucionadas, y que nos ayudarán a entender la respuesta de Adrián, fueron las siguientes:

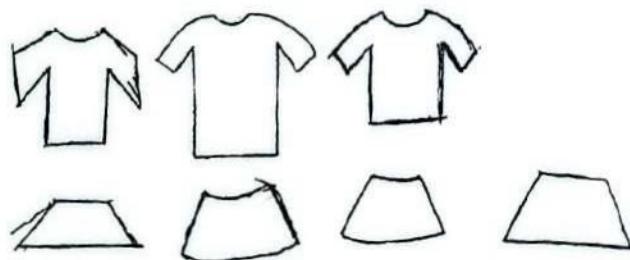
■ Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas,
¿de cuántas maneras distintas se puede
vestir Lupe?



de tres formas
porque nomas hay
y a la otra falda
nomas se puede vestir
3 blusas y 4 faldas
notiene blusa

JORGE VÁZQUEZ, JORGE GAUCÍN

■ Lupe tiene 4 faldas y 3 blusas,
¿de cuántas maneras distintas se puede
vestir Lupe?



Se puede vestir en tres maneras.
Lo hicimos en forma de dibujos
y se puede vestir por 3 maneras.

YAIR, FEDERICO, EDGAR

En este par de respuestas podemos destacar al menos lo siguiente:

- Los niños no utilizan la multiplicación para resolver el problema.
- Interpretan el problema de una manera estática, no se lo representan mentalmente con la idea de temporalidad, de movimiento, de ahí que las combinaciones no sean sino las que **ven** en el momento inicial.
- Con base en esta representación estática, los niños construyen una estrategia de resolución que consiste en el establecimiento de correspondencias uno a uno entre las blusas y las faldas y en el conteo de las parejas obtenidas. Por eso *sobra una blusa, pues ya no tiene falda*.
- Para los niños que se encuentran en tal nivel de conceptualización en relación con este significado de la multiplicación, el problema **de las blusas y las faldas**, no es un problema de cálculo propiamente dicho, es un problema de conteo basado en la relación biunívoca establecida.

Y esto es precisamente lo que hizo Adrián; si bien no hizo explícito su procedimiento, sí nos muestra su conclusión: una *blusa se la pone dos veces*. Esta conclusión derivó de haberse representado, mentalmente, la correspondencia uno a uno entre las faldas y las blusas.

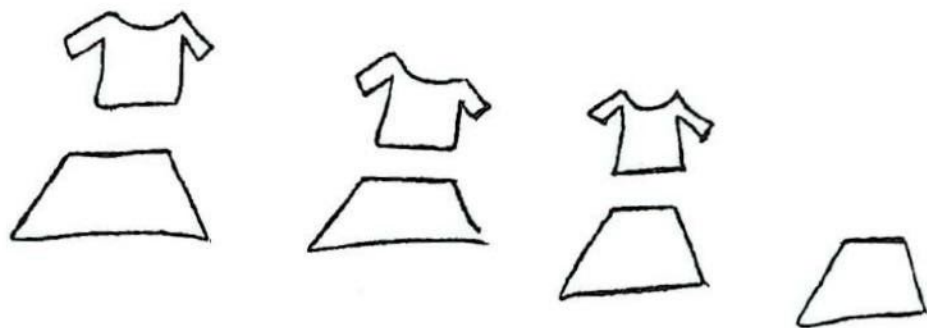
Los niños repiten la anterior representación del problema, cuando se les pide escribir *otros problemas que se parezcan al de las blusas*:



Las soluciones como las que acabamos de analizar, las produjeron en su mayoría niños de tercero, cuarto y quinto grado y sólo algunos de sexto año. Esta es probablemente la solución numérica más elemental a los problemas donde **la multiplicación no es una suma repetida sino el número de las combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos.**

Otros niños produjeron soluciones diferentes a este mismo problema, como la siguiente:

- Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas,
¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?



1 blusas
1 blusas
1 blusas
+ 1 faldas
1 faldas
1 faldas
1 faldas

7 En total

sumamos todo

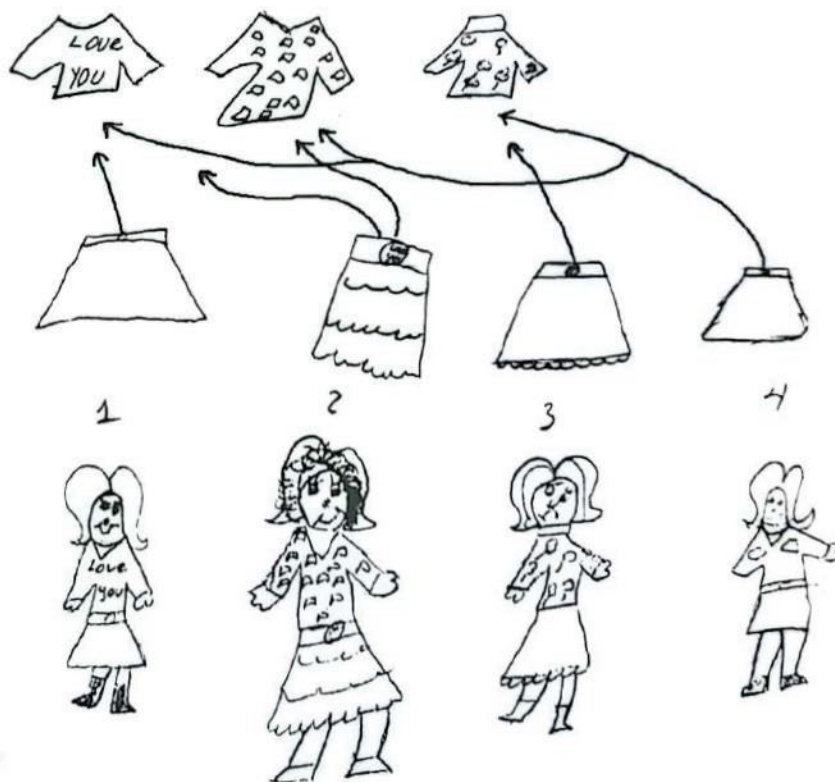
JESÚS, ALEJANDRO, JOSÉ LUIS

¿En qué difieren y en qué son similares estas soluciones y las que analizamos antes? Nosotros encontramos las siguientes diferencias y similitudes:

- Los niños se han hecho una **representación calculable** del problema, es decir, lo interpretan de manera que consideran necesario seleccionar y utilizar una operación para resolverlo.
- Esta **representación** es nuevamente una **representación estática, atemporal** del problema; de ahí que los niños seleccionen la suma o la resta como operación que los lleva a la solución pues no es necesario calcular sino las combinaciones que se ven en el momento.

A algunos niños no les satisfizo la anterior **representación** del problema, entonces buscaron otras formas de interpretarlo y resolverlo, como Salvador, Manuel y Carlos, que cursaban quinto grado:

■ Gloria tiene tres blusas y cuatro faldas, ¿De cuántas maneras se puede vestir?



Resultado: De varias formas lavando las blusas y faldas cuando se cambia

O como Jéssica y Xóchitl, que iban en sexto año y contestan:

"de 6 maneras"

Estas niñas explican así su respuesta:

Primero hicimos 3 blusas 4 faldas
Luego al primer día se puso la
primer blusa con la primer falda
al siguiente día se puso la otra blusa
y la otra falda, al 3er día se
puso la otra blusa con la otra
falda y sobro una falda
esa falda se la puso con la primer
blusa al cuarto día, al quinto día
se puso la otra blusa con la 4a
falda, al 6 sexto día se puso la última
blusa con la 4a falda.
En total se puso 6 maneras de ropa.

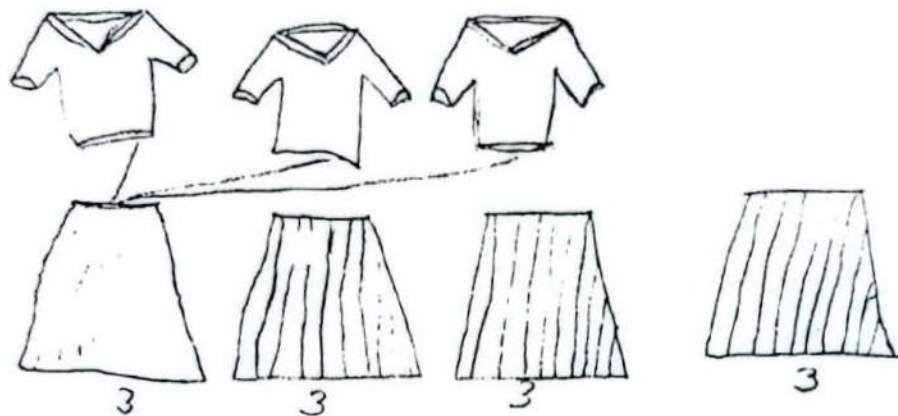
Las estrategias de solución que construyeron Salvador, Jéssica y sus compañeros han incorporado un elemento novedoso: la idea de movimiento, de temporalidad. Los niños no se conforman ya con contar las prendas que ven en el momento, sino que construyen una representación del problema que los lleva a **imaginar** y buscar más allá de ese momento inicial **de cuántas maneras distintas se puede Gloria vestir**.

Estas estrategias significan un avance en relación con las que analizamos previamente. Sin embargo, tienen aún una limitación pues los niños no logran llegar a la solución correcta.

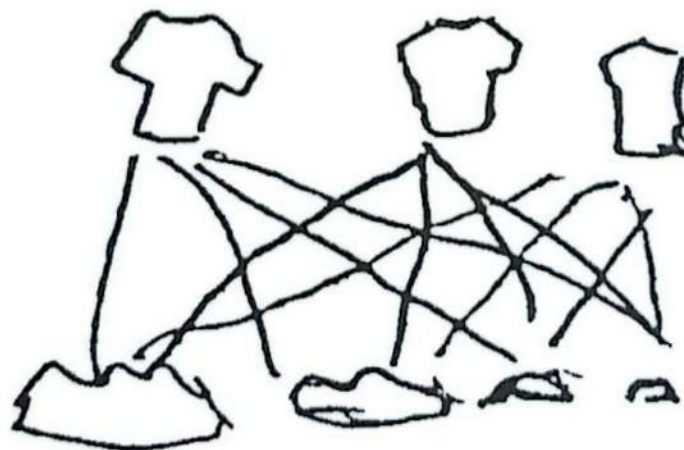
El progreso que permitirá arribar a la solución esperada lo veremos en los niños que construyeron sus soluciones de la siguiente manera:

- Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas
¿De cuántas maneras se puede vestir?

do Se Formas de Vestir se



ALMA ROSA Y ARGELIA, SEXTO GRADO



SANTIAGO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Si miramos con cuidado las soluciones construídas por Alma Rosa, Argelia y Santiago, veremos que ellos han obtenido 12 como respuesta. **Estos niños que han arribado a la solución correcta de los problemas donde la multiplicación es entendida como la operación que permite calcular las combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos:**

- Se han hecho una representación dinámica del problema en donde está incorporada la idea de **tiempo**, de **movimiento**.
- Esta representación les permite imaginar y buscar **en el tiempo** las diferentes combinaciones posibles.
- **Han incorporado un progreso fundamental: su procedimiento de búsqueda se ha vuelto sistemático y exhaustivo.**

Así tenemos que, por ejemplo, Alma Rosa y Argelia nos explican:

Primero dibujamos 3 blusas y luego dibujamos 4 Faldas y luego con una de todas las faldas se puede poner las 3 blusas y con los demás sería igual

Santiago, que respondió correctamente hasta los problemas más difíciles, a nuestra petición de explicar responde:

"Este problema se puede hacer gráficamente, ¿no?...si tiene tres blusas, ahí están las blusas y las faldas, tiene 5 faldas (señala en un dibujo cada prenda; luego, continúa su explicación, con movimiento de dedos que unen la primera blusa con todas las faldas; la segunda blusa con todas las faldas; la tercera blusa con todas las faldas; va acompañando el movimiento con el conteo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)."

- ENTREVISTADORA: ¿Y cómo explicarías a los niños que tuvieron mal este problema?
- SANTIAGO: Les explicaría con la gráfica.
- ENTREVISTADORA: ¿Y los niños que dijeron, por ejemplo, que eran 9 combinaciones, como éste (se le muestra una solución no sistemática), por que crees que se equivocarían?
- SANTIAGO: Lo que pasa es que se tienen que fijar bien, que no empiecen por acá (señala la blusa que está al centro del dibujo), que empiecen por la orilla, hasta terminar... así ya están seguros de que salen todas las combinaciones.

Hemos visto hasta aquí que:

Los niños han construido estrategias para resolver problemas donde la multiplicación reviste el significado de operación que permite calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos conjuntos. Tales estrategias muestran una evolución que expresa el nivel de conceptualización de los niños en relación con este tipo de problemas. Dicha evolución puede sintetizarse así:

1 Representación estática del problema

Este primer nivel puede dividirse a su vez en dos estratos:

- Interpretación de la combinatoria como el establecimiento de una correspondencia biunívoca y el conteo de las parejas obtenidas.
- Interpretación de la combinatoria como un problema calculable mediante la suma o resta de los datos.

2 Representación dinámica del problema

Este nivel puede a su vez subdividirse en los estratos siguientes:

- Búsqueda no sistemática, y no exitosa, de las combinaciones posibles.
- Búsqueda sistemática, y exitosa, de las combinaciones posibles.

Haremos unos cuantos comentarios más sobre la construcción de este significado de la multiplicación.

Un significado que se construye en la escuela

Pocos niños, dijimos antes, habían estudiado en la escuela este significado de la multiplicación. Las estrategias que construyeron surgieron en los grados escolares que analizamos, con base en la solicitud de realizar una tarea específica: calcular el número de combinaciones posibles con 4 faldas y 3 blusas. Encontramos, sin embargo, algunos niños que utilizaron la multiplicación 3×4 para resolver el problema. Esos niños nos dijeron:

- ALEJANDRO: O sea que esto (se refiere al problema)...yo también en tercero hice uno, ¿no? que si tuviera 3 camisetas y 4 pantalones... (imitando la voz de un maestro que dicta)...es lo mismo...y en tercero yo ya había sumado, bueno, yo hice un relajo, pero a mi hermano se lo enseñaron, luego él me lo explicó, luego ya lo supe hacer.
- ENTREVISTADORA: ¿Porque él te explicó?
- ALEJANDRO: Sí, y porque yo ya le entendí... el maestro también lo explicó.
- ENTREVISTADORA: ¿Y cómo te lo explicaron, con muñequitos o cómo?
- ALEJANDRO: ¡Sí, con muñequitos, y luego ya nos dijeron que la forma más rápida es multiplicar 3×4 !

ALEJANDRO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

- ADRIÁN: Son 12, 3 por 4, 12.
- ENTREVISTADORA: ¿Cómo sabías que este problema era de multiplicación?
- ADRIÁN: (pensativo) Porque son tres blusas, si se tuviera una falda, tres blusas por una falda...porque de tres blusas se pueden hacer tres combinaciones, y con 4, 3 por 4, serían 12.
- ENTREVISTADORA: (pregunta la respuesta de otros problemas parecidos).
- ADRIÁN: Son como el de combinaciones, tendría que multiplicar otra vez, 4 por 4, y 3 por 5.
- ENTREVISTADORA: ¿Dónde aprendiste los problemas de combinaciones?, ¿cómo sabes que los de combinaciones son de multiplicación?
- ADRIÁN: En cuarto grado...la maestra Carmen los explicó...venían en el libro...

ADRIÁN, 12 AÑOS, SEXTO GRADO

Queremos destacar tres cosas de los diálogos con Alejandro y Adrián:

- Estos niños, al igual que aquellos que utilizaron el algoritmo de la multiplicación para resolver los problemas de combinaciones, expresan que su fuente de aprendizaje fue la escuela. Todos hacen referencia a exigencias o explicaciones de los profesores y a lecciones en los textos.

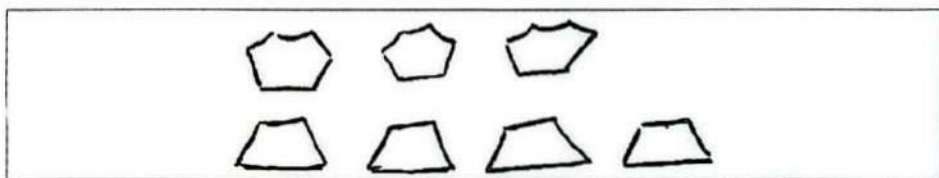
- Parece que la experiencia cotidiana no ofrece con frecuencia situaciones que permitan construir este significado de la multiplicación.
- A pesar de que la escuela se reconoce como fuente de este aprendizaje, los niños no utilizan las estrategias que ésta les propone; por ejemplo los **cuadros de doble entrada**, para resolver tales problemas.

A excepción de una niña que iniciaba secundaria y que elaboró un **cuadro** para justificar su respuesta, los niños más adelantados prefieren utilizar **diagramas** como el que aparece al margen.

A lo largo de este capítulo hemos mostrado la evolución de uno de los significados de la multiplicación. Poniendo esto como ejemplo, podemos afirmar que:

Los conceptos y los significados se construyen paulatinamente, y esta construcción toma mucho tiempo. Tal vez más tiempo del que los maestros y los planeadores quisiéramos.

Sin embargo, podemos afirmar también que: **la interacción con los conceptos colabora en su progresiva construcción.** Esto lo pudimos observar en muchos niños, y con muchos temas, pero ejemplificaremos con los trabajos de Oscar. En un primer acercamiento a la combinatoria, por medio del problema **de las blusas**, Oscar realizó este dibujo para apoyar su solución, la cual resultó ser: *Gloria se viste de 7 maneras distintas*:

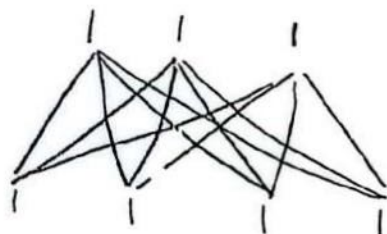


OSCAR, SEXTO GRADO, 14 AÑOS

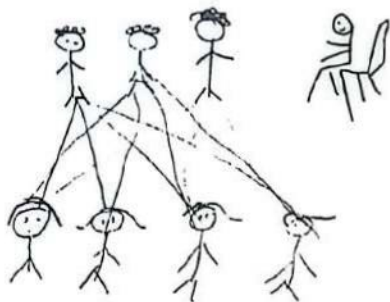
La segunda vez que Oscar entabló contacto con la combinatoria, elaboró una gráfica distinta para calcular las parejas posibles entre 3 niños y 4 niñas, como se ve en la ilustración de la derecha.

Es decir, de una interpretación estática del problema, Oscar pasó no sólo a una interpretación dinámica sino también a un método sistemático y exhaustivo de búsqueda de la solución. Evoluciones similares observamos en muchos otros niños.

Vale la pena mencionar, por otra parte, que ni Oscar ni los otros niños recibieron explicaciones sobre este concepto u otros conceptos matemáticos. Simplemente se les dejó trabajar en grupo con sus compañeros y, después, confrontar sus resultados.



ALEJANDRO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA





III. LOS NIÑOS CONSTRUYEN ESTRATEGIAS PARA DIVIDIR

Una mañana le planteamos a unos niños de tercer grado algunos problemas de división. Rodrigo no sabía utilizar el algoritmo y se valió de otras estrategias para resolverlos.

Al día siguiente trabajamos nuevamente con los mismos niños. Les pedimos resolver este problema:

Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de canicas, ¿cuántas canicas le tocarán a cada niño?

En esta ocasión Rodrigo utilizó el algoritmo de la división y dejó además este mensaje:

operacion
$$\begin{array}{r} 18 \\ 14 \overline{) 252} \\ \underline{14} \\ 112 \\ \underline{112} \\ 000 \end{array}$$

Para acerla
me ayudo
un compañero
pero ya estoy
agarrandole la
bonda

Rodrigo

En este capítulo analizaremos la forma en que los niños resuelven problemas de división. Haremos hincapié en los niños que, como Rodrigo, no sabían utilizar el algoritmo de esta operación.

Hasta hace poco tiempo se creía imposible que los niños resolvieran problemas que no hubieran aprendido a solucionar en la escuela. Hoy sabemos que:

Los niños pueden resolver problemas que los maestros no les hemos enseñado porque **han construido, en su experiencia cotidiana, estrategias y conocimientos matemáticos que les permiten resolver muchas de las situaciones que enfrentan.**

Por ejemplo, muchos niños de tercero y cuarto no sabían utilizar el algoritmo de la división, sin embargo, resolvieron los problemas que les presentamos. En las siguientes páginas relatamos cómo lo hicieron.

Repartimos de uno en uno

Abraham dio esta solución al problema de los gises:

■ El maestro va a guardar 48 gises en 3 cajas, de manera que cada caja tenga el mismo número de gises, ¿cuántos gises debe guardar el maestro en cada caja?



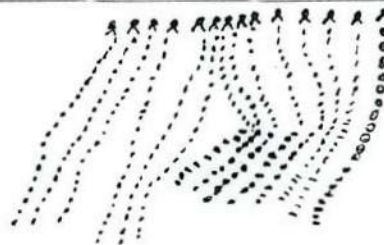
$R = 16$ gises en cada caja y no sobran

ABRAHAM, 9 AÑOS, CUARTO GRADO

Muchos niños hicieron lo que Abraham: repartieron de uno en uno, en las cajas, los 48 gises ...algunos utilizaron frijoles, otros utilizaron dibujos.

Esta es la solución de Juan José para el problema de las canicas:

■ Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas le tocarán a cada niño?



20 canicas le tocan a cada niño

JUAN JOSÉ, 8 AÑOS, TERCER GRADO

Varios niños utilizaron la estrategia de que se valió Juan José: repartieron de una en una, las 252 canicas ...nuevamente, unos lo hicieron con frijoles, otros con dibujos.

Como es fácil referirnos a las cosas si tienen un nombre, a todas las estrategias les hemos puesto el suyo. Así, a las estrategias como las que acabamos de ver las hemos llamado **estrategias descriptivas**. En ellas, los niños utilizan representaciones gráficas o repartos *objetivos* para resolver los problemas.

Pero las **estrategias descriptivas** no sólo pueden realizarse con dibujos o con objetos, también pueden realizarse mediante cálculos escritos, como hizo Hilda al resolver el problema de **los lápices** que aparece en la primera ilustración de la derecha; el problema se planteó así:

Si se tienen 5 200 pesos para comprar lápices que valen 400, ¿cuántos lápices se pueden comprar?

Este problema, aunque es de división, no es un problema de reparto, es un problema de *saber cuántas veces cabe el 400 en el 5 200*.

Hilda lo resolvió sumando repetidas veces el divisor hasta llegar al resultado.

En otras palabras, Hilda iteró (repitió) el 400 tantas veces como fue necesario para llegar al 5 200.

Podrá pensarse que si los niños saben cuántas veces tienen que sumar el divisor, pues ya saben desde el principio el resultado. Pero esto no sucede. Los niños suman periódicamente para saber el resultado de su iteración. Hilda, igual que muchos otros, cada vez que sumaba borraba el resultado, agregaba algunos 400 más y sumaba nuevamente desde el principio. Así hizo hasta llegar al 5 200.

Y no sólo los niños de tercero y cuarto grado usan este tipo de estrategias, también algunos de sexto y de secundaria. Estos niños, sin embargo, ya no utilizan objetos o dibujos para hacer la división, utilizan solamente sumas. Así, algunos intentaron resolver mediante una suma escrita el problema que aparece en la segunda ilustración de la derecha.

Sin embargo, cuando los niños intentaron resolver el problema de los lápices con este procedimiento, no llegaron a la solución correcta. Y es que hicieron una mala lectura de los datos: leyeron 1 350 en vez de 13 050. Se toparon con el problema del cero.

Si miramos con cuidado los ejemplos que hemos presentado, veremos que:

Las estrategias descriptivas permanecen muy ligadas a la situación planteada. Los niños simulan la acción de repartir o de iterar. Cuando reparten, realizan acciones como poner primero un gis en cada caja, luego otro gis... repartir una canica a cada niño, hacer un balance, luego repartir otra canica y hacer un nuevo balance... cuando iteran cantidades, realizan acciones como sumar varias veces el 290 y hacer un primer balance; sumarlo algunas veces más y hacer un nuevo balance...

$$\begin{array}{r} 400 \\ + 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \\ \hline 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \\ \hline 400 \\ 400 \\ 400 \\ \hline 400 \\ 400 \\ \hline 400 \\ 400 \\ \hline 800 \end{array}$$

HILDA, TERCER GRADO, 8 AÑOS

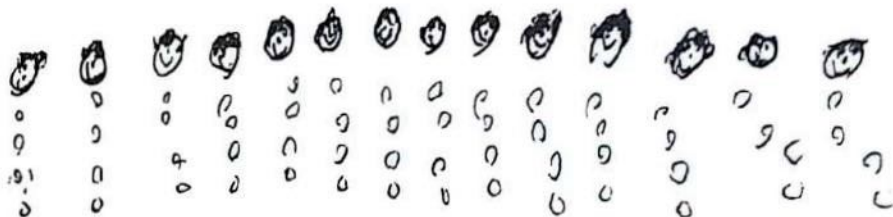
■ Un lápiz
cuesta \$ 290.
Si tengo \$ 13050.
para comprar
lápices
¿cuántos lápices
puedo comprar?

$$\begin{array}{r}
 290 \\
 290 \\
 290 \\
 290 \\
 290 \\
 \hline
 1350
 \end{array}$$

JUAN MANUEL, SEXTO GRADO

Esta es la forma más elemental de resolver los problemas de división.
 Pero las estrategias descriptivas no siempre resultan exitosas pues, sobre todo los niños más pequeños, a veces se fatigan. Por ejemplo, Luis Miguel:

■ Si se reparten 252 canicas entre 14 niños, de manera que a cada niño le toque la misma cantidad de canicas. ¿Cuántas canicas le tocarán a cada niño?



LUIS MIGUEL, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Luis Miguel no terminó de resolver el problema porque para él eran demasiadas las canicas que había que repartir. A muchos niños les sucedió algo parecido, inclusive a los más grandes. Estos niños no llegaron a la solución porque no encontraron otra estrategia para hacerlo.

Ante esta dificultad, otros niños sí logran construir nuevas estrategias. Veamos por ejemplo la que construyó Adrián.

De uno en uno es muy tardado

Adrián —a quien ya hemos mencionado— cursa tercer grado y tiene 8 años, intenta resolver el problema siguiente: ¿cuántas cajas se necesitan si se colocan 252 huevos en cajas de 12 huevos?

Adrián busca la solución haciendo grupos de 12 frijoles. Con ellos representa las cajas con 12 huevos. Cuando lleva 9 grupos —tarea que le ocupó varios minutos realizar— percibe la dificultad para repartir 252 huevos, pues le quedan muchos frijoles por repartir, y entonces dice:

“¡Oye, yo no voy a hacer chorros de éstos!” (su tono denota fatiga por la tarea que le esperaba de continuar con la estrategia).

Invitamos a Adrián a no desanimarse, y entonces encuentra otra estrategia. Esta es la solución de Adrián; no la construyó de golpe, la construyó paulatinamente:

■ Si se tienen 252 huevos para acomodarlos en cajas de 12 huevos, ¿cuántas cajas necesito para todos ellos?

$$\begin{array}{rcl}
 12 + 12 & = & 48 \\
 12 + 12 & = & 48 \\
 48 + 48 & = & 96 \\
 48 + 48 & = & 96 \\
 48 + 48 & = & 96 \\
 48 + 48 & = & 96
 \end{array}$$

8 cajas

8 cajas

8 cajas

8 cajas

ADRIÁN, TERCER GRADO, 8 AÑOS

Adrián formó grupos de 12, los sumó y obtuvo 48, después sumó lo grupos de 48 y sacó 96 ... Ahí, Adrián se detiene y dice:

ADRIÁN: Oye, pero no sé cuántos huevos llevo.

ENTREVISTADORA: ¿Y por qué no buscas una manera de saber?

ADRIÁN: ¿Cómo?... (se queda pensativo) ¡Ah, ya sé, le apunto aquí!

(Y entonces Adrián anota en cada agrupación el número de cajas que ha llenado: 8 cajas; sin embargo, esto no es útil para el fin que él busca que es saber cuántos huevos lleva repartidos y no logra concluir satisfactoriamente.)

Adrián inicia su resolución haciendo grupos de 12 frijoles. Sin embargo, su estrategia evoluciona y se convierte en una **estrategia constructiva**, pues Adrián deja de simular el acto de repartir. Explicamos esto un poco más:

En las **estrategias** que llamaremos **constructivas**, los niños ya no hacen dibujos donde simulan el acto de repartir uno a uno los objetos que indica el problema, ni efectúan sumas donde cada uno de los sumandos es el divisor. La longitud de los cálculos motiva a los niños a buscar formas de facilitarlos. Y algunos logran hacerlo, por ejemplo utilizando múltiplos o duplicando.

Y es precisamente de la necesidad de facilitar los cálculos, de donde surge la construcción de estrategias que orientan a los niños hacia la multiplicación y luego, hacia la división.

Por ejemplo, para Adrián, lo abrumador de la tarea, ¡hacer chorros de grupos de 12!, lo llevó a resolver el problema con duplicaciones sucesivas (12, 24, 48, 96). Pero Adrián no llegó a la solución porque encontró una dificultad que no pudo supe-

rar: le hizo falta un sistema de registro que le permitiera saber *cuántos huevos llevaba repartidos*. Este progreso, seguramente lo lograría con la práctica. Pero... quién sabe si en la escuela Adrián vuelva a utilizar esta estrategia.

Si imaginásemos que Adrián no perdió la cuenta y que siguió hasta obtener el resultado correcto, podríamos expresar así su solución:

$$\begin{array}{rclcl}
 12 & + & 12 & = & 24 \text{ huevos (2 cajas)} \\
 24 & + & 24 & = & 48 \text{ huevos (4 cajas)} \\
 48 & + & 48 & = & 96 \text{ huevos (8 cajas)} \\
 96 & + & 96 & = & 192 \text{ huevos (16 cajas)} \\
 192 & + & 48 & = & 240 \text{ huevos (20 cajas)} \\
 240 & + & 12 & = & 252 \text{ huevos (21 cajas)}
 \end{array}$$

De esta manera, Adrián hubiera llegado a la solución.

Adrián, con su **estrategia constructiva**, se ha acercado a una forma peculiar de multiplicar. El acercamiento a la multiplicación es un progreso importante en la construcción de la división.

La división también es una multiplicación

Todos sabemos que la división es la operación inversa de la multiplicación. Cuando los niños llegan a cierto nivel de conceptualización de estas operaciones, perciben dicha relación, aún cuando no la hayan aprendido explícitamente en la escuela.

Así, muchos niños resuelven problemas de división utilizando la multiplicación, por ejemplo, Luciano:

- Si se tienen 5 200 pesos para comprar lápices que valen 400 ¿cuántos lápices se pueden comprar?

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 \times 7 \\
 \hline
 2800
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 6 \\
 \hline
 2400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 5 \\
 \hline
 2000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 4 \\
 \hline
 1600
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 3 \\
 \hline
 1200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 \times 8 \\
 \hline
 3200
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 9 \\
 \hline
 3600
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 10 \\
 \hline
 4000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 11 \\
 \hline
 4400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \\
 \times 12 \\
 \hline
 4800
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 \times 13 \\
 \hline
 5200
 \end{array}$$

Luciano tenía \$5 200 para comprar lápices de \$400. Como Luciano no sabía utilizar el algoritmo de la división, formuló una hipótesis: **puedo comprar 3 lápices** y pone a prueba su hipótesis multiplicando 400×3 . Como su hipótesis no fue correcta, Luciano hace una nueva suposición: **puedo comprar 4 lápices**, y la pone nuevamente a prueba multiplicando 400×4 ... así continúa hasta llegar a 13 lápices.

Otros niños de tercero y cuarto hicieron lo que Luciano para resolver el problema de los lápices. Pero también muchos niños de quinto, sexto y secundaria utilizaron este procedimiento para resolver el siguiente problema:

■ Un lápiz cuesta
\$ 290. Si tengo
\$ 13050 para comprar
lápices,
¿cuántos lápices puedo
comprar? *lapices 2=45*

$$\begin{array}{r}
 290 \\
 \times 45 \\
 \hline
 1450 \\
 11600 \\
 \hline
 13050
 \end{array}$$

FELIPE, PRIMERO DE SECUNDARIA

Luciano, Felipe y los niños que utilizaron esta estrategia, centran la atención en encontrar el factor que los lleve a obtener en la multiplicación un resultado igual al dividendo en el caso de la división exacta. Este factor será el cociente buscado.

Podemos decir esto en un lenguaje un poco más formal:

Los niños hipotetizan un cociente y lo ponen a prueba utilizando la multiplicación. En el caso de la división exacta, el cociente hipotético válido será el que, haciendo el papel de factor, los lleve a obtener como resultado de la multiplicación un número igual al dividendo.

Como esta estrategia está basada en el planteamiento hipotético y prueba de cocientes, la hemos llamado **prueba del cociente hipotético**.

Pero, al igual que ocurre con los niños más pequeños, la estrategia no siempre resulta exitosa. También los niños grandes en ocasiones abandonan el proceso de resolución. Como por ejemplo Ivonne:

■ Un lápiz cuesta \$ 290. Si tengo \$ 13050 para comprar lápices, ¿cuántos lápices puedo comprar?

$$\begin{array}{r} 290 \\ \times 5 \\ \hline 1450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 290 \\ \times 4 \\ \hline 1160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 290 \\ \times 8 \\ \hline 2320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 290 \\ \times 11 \\ \hline 290 \\ 290 \\ \hline 3190 \end{array}$$

IVONNE, PRIMERO DE SECUNDARIA

Y es que, para que los niños puedan llegar a los resultados con esta estrategia, tienen que poner también en marcha mecanismos auxiliares para realizar el cálculo, tales como la **estimación**.

La estimación permitirá a los niños saber *por dónde* estará el resultado y empezar a multiplicar con un factor no demasiado alejado del correcto, sobre todo cuando el cociente es un número grande.

Pero... ¿por qué los niños escogen la **prueba del cociente hipotético** como estrategia de resolución?

Los niños pequeños escogen esta manera de resolución porque en la escuela no han aprendido el algoritmo de la división.

En el caso de los niños mayores, la **prueba del cociente hipotético** la utilizan quienes tienen dificultades para resolver las divisiones utilizando el algoritmo.

Pero tanto los niños que no han aprendido el algoritmo, como los que tienen dificultades para usarlo, tienen claro que la división es la operación inversa de la multiplicación. Y estos niños muchas veces resuelven los problemas buscando el factor faltante.

La **prueba del cociente hipotético** la utilizan algunos niños de tercero de primaria y a medida que se avanza en la escuela, su uso se hace más frecuente.

El uso de esta estrategia muestra un amplio conocimiento de las relaciones entre la división y la multiplicación. Los niños que la utilizan han convertido la división en una "multiplicación con hueco" para resolver problemas que de otra forma les serían inaccesibles.

Para dividir, utilizamos la división

Por supuesto que muchos niños utilizan el algoritmo de la división para resolver los problemas que implican el uso de esta operación. Y, al igual que ocurre con la prueba del cociente hipotético, a medida que avanzan en la escuela lo utilizan con más frecuencia.

Pero, hemos de decir, los niños no manejan el algoritmo de la división tan bien como esperaríamos. En general, a los niños les lleva mucho tiempo resolver las divisiones; muchos cometen errores de cálculo y otros necesitan utilizar apoyos adicionales para realizarlas.

Hemos observado que los niños utilizan diversas estrategias para resolver problemas de división. Tales estrategias muestran un avance progresivo que podemos ordenar así:

- simulación de la acción de repartir o de iterar, que incluye la suma repetida del divisor;
- búsqueda de estrategias que se orientan a la multiplicación, por ejemplo el uso de múltiplos del divisor o duplicaciones;
- prueba del cociente hipotético, mediante el establecimiento de la relación inversa con la multiplicación, y
- manejo del algoritmo convencional; con la ayuda de la escuela.

Estas estrategias evidencian que el significado de la división, así como las habilidades con que los niños se acercan a los problemas que la implican, se construyen y se desarrollan poco a poco. Y esta construcción se realiza en relación con otros conceptos y habilidades, como por ejemplo la multiplicación y la estimación.

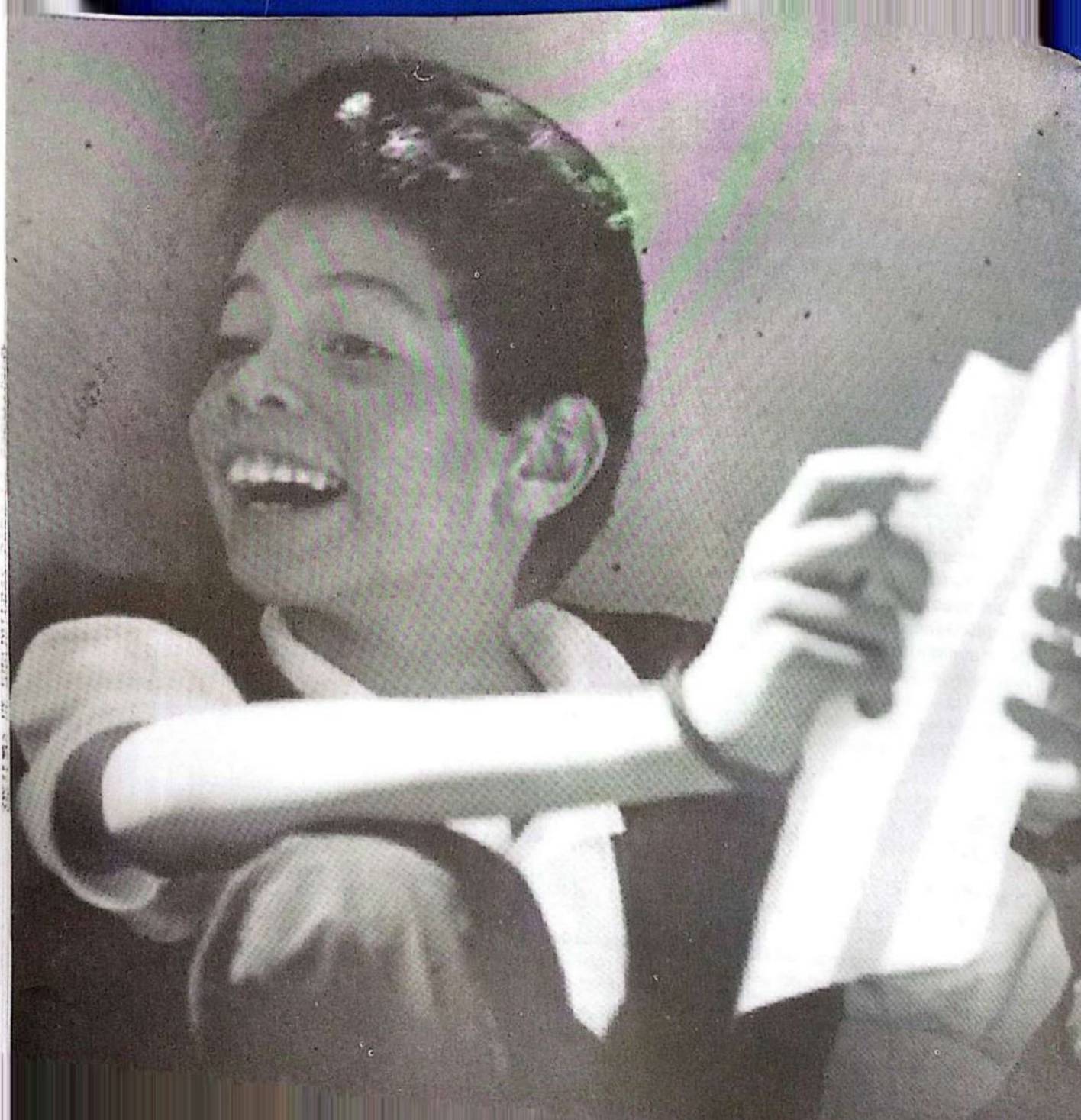
Quizás ahora algún maestro piense que es importante conocer lo que los alumnos hacen, más allá del esquema **datos-operaciones-resultado**, que con tanta frecuencia se utiliza y que obliga a los niños a ocultar sus procedimientos.

Y ya para terminar este apartado, recordemos el mensaje que escribió Rodrigo y que anotamos al inicio del capítulo:

Para acerla
me ayudo
un compañero

Pero ya estoy
agarrandole la
honda

Nos parece que Rodrigo avanza y lo hace al menos por dos razones: porque ha estado en interacción con los problemas de división y porque un compañero intercambió y aportó ideas y le aclaró dificultades. ¿Es esto algo que permitimos en nuestra clase?



IV. UN CONCEPTO Y MUCHAS POSIBILIDADES

Unas cosas dependen de otras, es el título de la lección con que se inicia la variación proporcional directa en el texto gratuito de sexto grado. En esta lección se pide a los niños llenar tablas como las siguientes:

■ En algunos casos una cosa depende de otra. Una cantidad está en función de otra.

El kilo de tortilla vale \$ 3.60

Si la mamá de Simón compra 3 kilos paga \$ 10.80

Si compra 4 kilos paga \$ _____

Si compra 6 kilos paga \$ _____

Si compra _____ kilos paga \$ 7.20

Si compra _____ kilos paga \$ 36.00

Si compra 7 kilos paga \$ _____

Estos datos pueden resumirse así:

Kilos de Tortilla	Precio en \$
	3.60
3	10.80
4	
6	
	7.20
	36.00
7	

■ Pon los datos en una tabla ordenada así, y completa.

Kilos de Tortilla	Precio en \$
	3.60
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

A una variación de 1 kilo de tortilla la corresponde una variación de \$ 3.60 en el precio. El precio de las tortillas está en función del peso de las tortillas.

La forma en que se aborda el tema en la lección es uno de los acercamientos posibles a la variación proporcional directa. Pero este tema puede abordarse de diferentes maneras. Los maestros recordarán, por ejemplo, que en los libros de los años sesenta se privilegiaba el uso de la regla de tres, los actualmente vigentes

ponen de manifiesto las propiedades de la función lineal... Y es que este concepto por ser bastante complejo, puede ser abordado de distintas formas.

Piaget señaló en diferentes obras que el manejo de la variación proporcional es propio del estadio de las operaciones formales; que los niños logran comprender los problemas que la implican hacia los 12 o 13 años. Sin embargo, la variación proporcional directa ha estado siempre en la escuela primaria. Y los maestros siempre la han enseñado.

La presencia de este tema ha merecido y merece diversas opiniones, unas favorables y otras no. Muchos profesores e investigadores piensan que es mejor esperar a que los niños estén maduros para iniciar el tema. Hay otros que dicen, a la inversa, que poner a los niños en contacto con los conceptos los ayuda a evolucionar intelectualmente.

En las siguientes páginas hablaremos de todo esto, sólo que desde la perspectiva de los niños. Veremos que, de acuerdo con su nivel de conceptualización y las características de los problemas que se les plantean, ellos hacen distintas interpretaciones y abordan de manera distinta la variación proporcional directa. Probablemente conocer estas formas de abordar los problemas nos ayude a aclarar si es conveniente incorporar el tema en la primaria. Tal vez algunos reafirmen sus puntos de vista, tal vez otros los modifiquen; ojalá muchos los pongan a discusión.



Sacamos mitad o duplicamos

Los que han estudiado el origen y la historia de los algoritmos aritméticos, dicen que sacar mitades sucesivas o duplicar, también sucesivamente, es una estrategia muy natural para resolver muchos problemas.

Nosotros les planteamos a los niños unos problemas en los que tenían que **elaborar recetas**; casi todos los resolvieron y explicaron de la manera en que lo hicieron Luis Manuel y Horacio:

- Lee con atención la siguiente receta y después contesta

Sopa de cebolla

(Receta para 8 personas)

- 8 cebollas
- 2 tazas de agua
- 4 cubos de caldo de pollo
- 2 cucharadas de mantequilla
- 1/2 taza de crema
- sal al gusto

1. Si se quiere hacer sopa de cebolla para 4 personas:

a) ¿cuánta agua se necesita? 1 taza de agua

b) ¿cuántos cubos de caldo de pollo se necesitan?

2 cubos de caldo de pollo

- Escribe aquí cómo hiciste para resolver el problema 1

Porque si para 8 personas son 2 tazas de agua. Para 4 personas es 1 taza. Porque la mitad de 8 son 4 entonces la mitad de 2 es 1. Y si para 8 personas son 4 cubos de pollo entonces para 4 personas son 2 cubos de pollo porque la mitad de 4 son 2.

También vimos a los niños construir soluciones como las de Cristina y Leticia en el problema del pastel para 4 y para 12 personas:

- Esta es la receta de un pastel para 8 personas:

Pastel de vainilla (Receta para 8 personas)

- harina 800 gramos
- mantequilla 400 gramos
- azúcar 1 taza
- 2 huevos
- 2 cucharadas de vainilla
- una pizca de sal

Con base en la receta para 8 personas, completa la receta para 4 y para 12 personas:

Pastel de vainilla

Receta para 4 personas

harina 700 gramos
azúcar la mitad de una taza
huevos 1 huevo
vainilla 1 cucharada
sal la mitad de la pizca

Pastel de vainilla

Receta para 12 personas

harina 1200 gramos
azúcar 1 1/2 taza
huevos 3 huevos
vainilla 3 cucharadas
sal 3 cuartos de pizca

Ellas nos dan estas explicaciones:

- Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 4 personas:

leimos lo de las 8 personas despues pensamos que era la mitad de las 8 personas porque eran cuatro personas osea que era la mitad.

- Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas

le aumentamos cuatro personas $8+4=12$
entonces lo de 8 personas lo sumamos
con las otras 4 personas y eso
fue lo que pusimos entonces.
eran los 12 personas.

Horacio y Luis Manuel, también calcularon correctamente las cantidades. Ellos dicen lo siguiente sobre la receta para 12:

- Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas

le aumente la mitad de la receta para
8 personas y se la sumé otras a la de 8 persona
le sume a 800 gramos 400 gramos y así le fui sacando la
mitad y sumando se la.

Como se habrá observado, para construir sus respuestas, los niños sacan mitad a las cantidades iniciales y:

- en la receta para 4 personas, ese es el resultado.
- en la receta para 12, suman a cada una de las cantidades iniciales la mitad correspondiente.

La mayor parte de los niños hizo lo que Luis Manuel, Cristina y sus compañeros de equipo. Y la forma en que los niños explican sus respuestas es muy clara. En la receta para 4 nos dicen:

"Si para 8 personas son 2 tazas...para 4 personas es 1 taza, porque la mitad de 8 son 4...o ...leímos todo lo de las 8 personas, después pensamos que era la mitad ...porque eran 4 personas..."

Y en la receta para 12 nos explican:

"Le aumentamos la mitad de la receta para 8 personas...o le sumamos las cantidades para 4 (que es la mitad de 8)..."

El razonamiento está centrado en la obtención de mitades.

Cuando solicitamos elaborar la receta para 16 personas conociendo las cantidades para 8, los niños duplicaron las cantidades iniciales de ingredientes.

Como este razonamiento está basado en obtener mitades o duplicar, a esta estrategia la hemos llamado **mitades o duplicaciones sucesivas**.

Pero, ¿qué tienen de particular los problemas **de las recetas** que prácticamente todos los niños utilizan esta forma de resolución? Nosotros creemos que es por lo siguiente:

Los niños obtienen mitades o duplican cuando la razón entre los datos es 2:1, 3:2 o 3:4... y para ellos es fácil descubrirla. Y la mayoría llega a la solución correcta utilizándola.

Pero todas las cosas tienen un principio, así...

El aumento proporcional es inicialmente un simple aumento

La estrategia de **obtención de duplicaciones o mitades**, al igual que otros conocimientos aritméticos, no se construye de una sola vez, se construye poco a poco. Así, la estrategia tiene inicios más elementales que podemos ver en algunas respuestas de Susana y Violeta cuando calcularon la **receta para 12 personas**:

Esta es la receta de un pastel para 8 personas:

Pastel de vainilla

Receta para 8 personas

- harina 800 gramos
- mantequilla 400 gramos
- azúcar 1 taza
- 2 huevos
- 2 cucharadas de vainilla
- una pizca de sal

■ Con base en la receta para 8 personas, completa la receta para 4 y para 12 personas:

Pastel de vainilla

Receta para 4 personas

harina 400 gramos
azúcar ½ taza
huevos 1 Huevo
vainilla 1 cucharada
sal ½ pizca de sal

Pastel de vainilla

Receta para 12 personas

harina 1200 gramos
azúcar 5 de azúcar
huevos 6 Huevos
vainilla 6 cucharadas
sal 5 pizcas de sal

■ Anota aquí cómo hiciste para completar la receta para 12 personas

yo le hice así le sume y a cada uno de estas recetas.

Otros niños hicieron lo mismo que Violeta y Susana: sumaron una cantidad fija (4) a todos los ingredientes.

La idea en la cual estos niños basaron sus respuestas es que era necesario sumar 4 a cada uno de los ingredientes porque el primer cálculo que hicieron resultó a 4 ("8 personas más 4 personas son 12 personas"). De ahí que hayan pensado poner **6 huevos, 6 cucharadas de vainilla y 5 pizcas de sal al pastel.**

Podemos interpretar estas respuestas de la manera siguiente:

- en un nivel incipiente de conceptualización, lo único que los niños comprenden de la variación proporcional directa entre dos conjuntos de datos, es que si en los valores de un conjunto hay aumento, entonces hay aumento en los valores del otro conjunto. A la inversa también: si hay disminución en los valores de un conjunto, habrá una disminución en los valores del otro. En el caso de las recetas: si hay aumento en el número de personas, hay aumento en los ingredientes.
- estos niños no tienen aún la idea de que las cantidades deben aumentar o disminuir proporcionalmente (en una proporción definida por la razón entre los datos). Por eso los niños como Susana y Violeta, se conforman con sumar la misma cantidad a todos los ingredientes. Es por eso que decimos: **en sus inicios, el aumento proporcional es un simple aumento.**

Pero volvamos a las respuestas de Luis Manuel, Horacio y Cristina. En un problema de variación proporcional que se trata, como dicen con frecuencia los maestros, de **establecer la igualdad entre dos razones**, los niños han encontrado soluciones "sacando" mitades, y sumando o restando esas mitades; han mezclado lo aditivo con lo multiplicativo.

Y muchas veces, este procedimiento los lleva a soluciones correctas. Pero...y aquí vienen los peros...esta estrategia, al igual que otras que vimos en el capítulo anterior, es eficaz sólo en ciertas circunstancias, en otras, ya no funciona.

Por ejemplo, en los problemas de las recetas, esta estrategia no sería útil si se tratara de calcular los ingredientes para 7 o para 13 personas conociendo los ingredientes necesarios para 12. En este caso, ¿qué estrategia utilizarían los niños? ¿Harían una tabla como la de la lección **Unas cosas dependen de otras**, o buscarían la razón entre los datos?...no sabemos con certeza, es cuestión de investigarlo.

Buscamos el valor de uno

La **búsqueda del valor unitario** es un procedimiento que ya no se trabaja explícitamente en los textos de matemáticas vigentes; sin embargo, muchos maestros lo enseñan y utilizan. Como su nombre lo indica, consiste en buscar el valor de una unidad mediante una división y, posteriormente, calcular mediante una multiplicación el valor del número de unidades (objetos, metros, kilos) indicadas en el problema. En muchas situaciones este procedimiento es sumamente útil, por ejemplo cuando se trata de calcular precios.

Y los niños también creen en tal utilidad, pues este fue el procedimiento más utilizado por el que resolvieron correctamente los problemas siguientes:

Por 7 paquetes de galletas se pagaron 5 720 pesos. ¿Cuánto se pagará por 15 paquetes de galletas?

15 suéteres se hicieron con 90 madejas de estambre. ¿Cuántas madejas se necesitarán para hacer otros 3 suéteres?

Así, los niños realizaron los siguientes cálculos:

Para el problema **galletas**:

$$\begin{array}{r} 715 \\ 8 \overline{) 5720} \\ \underline{56} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 715 \\ \times 15 \\ \hline 3575 \\ 715 \\ \hline 10725 \end{array}$$

R. 10725

Para el problema **madejas**:

$$6 \times 3 = R. 18$$

$$\begin{array}{r} 1590 \\ 15 \overline{) 90} \\ \underline{90} \\ 00 \end{array}$$

NÉSTOR, PRIMERO DE SECUNDARIA

Según observamos en los problemas **galletas** y **madejas**, la **búsqueda del valor unitario** es una estrategia muy natural para resolver problemas de proporcionalidad directa.

Además, es una estrategia más potente que la de **duplicar o sacar mitades**, pues puede utilizarse para resolver un mayor número de situaciones.

Sin embargo, para los niños, dicho procedimiento tiene limitaciones que observamos en el siguiente problema:

En un juego de feria, por cada tres veces que se dé en el blanco, se ganan 5 puntos. Si yo gané 30 puntos, ¿cuántas veces le dí al blanco?

En seguida veremos el porqué de las limitaciones.

Limitaciones en la búsqueda del valor unitario

La mayor parte de los niños no logró comprender este problema. algunos nos dejaron un mensaje:

"El más difícil es el de los puntos" o "Al de los puntos no le entendí".

Otros siguieron estrategias erróneas que aquí no vamos a analizar, no porque no tengan interés —los errores son tan importantes como los aciertos— sino porque ya se va haciendo largo este capítulo.

Algunos niños pensaron que, si obtener el **valor unitario** había funcionado en los dos problemas anteriores entonces el problema **puntos** se podía resolver con ese procedimiento, pues percibían en él una estructura parecida.

Con esta correcta idea en mente, algunos niños echaron a andar nuevamente el procedimiento. Por ejemplo Pedro, quien resolvió correctamente los problemas que hemos analizado, al llegar al problema **puntos** hizo lo siguiente:

■ En un juego,
por cada 3 veces
que se dé en el blanco,
se obtienen 5 puntos.
Si obtuve 30 puntos,
¿cuántas veces
le dí al blanco?

$$\begin{array}{r} 10.66 \\ 3 \overline{) 30} \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 2 \end{array}$$

PEDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA

Sin embargo, en esta ocasión, Pedro se encontró con una dificultad: que el 3 no era divisor del 5 y perdió el sentido de la estrategia al obtener un residuo distinto de cero y abandonó la resolución.

Y es que, seguramente para los niños, el cociente inexacto tiene sentido si es dinero, o kilos, o metros lo que se está manejando, pero si el problema habla de puntos... ya no parece tan lógico. Esto le ocurrió a otros niños que habían resuelto los problemas **galletas** y **madejas** buscando el **valor unitario**. Al no funcionarles esta estrategia, y no contar con otra, no llegaron a la solución.

Las estrategias que permitieron a los niños arribar a la solución en este problema fueron dos: **la regla de tres** y la que analizamos a continuación.

Hacemos tablas para anotar los valores

Estas son las soluciones de dos niños que resolvieron correctamente el problema puntos:

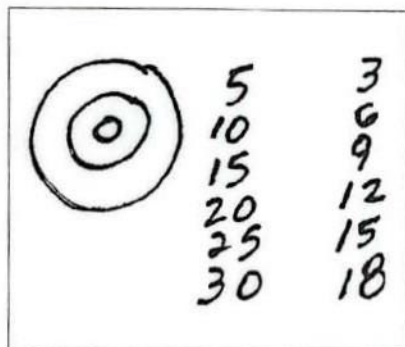
18	5 3	3 = 5
	10 6	3 = 5
	15 9	3 = 5
	20 12	3 = 5
	25 15	3 = 5
	30 18	3 = 5
		<u>18 30</u>
		18 veces al blanco

CARLOS FRANCISCO, SEXTO GRADO • RAFAEL, SEXTO GRADO

Carlos Francisco y Rafael elaboraron tablas con dos columnas de números; una representa las veces que se da al blanco y la otra representa el número de puntos que se ganan.

A continuación, Alejandro nos explica la estrategia:

- ENTREVISTADORA: ¿Y este problema cómo lo hiciste, también con regla de tres?
 ALEJANDRO: No, con rayitas
 ENTREVISTADORA: ¿Cómo? Explícanos porque ya borraste las rayitas.
 ALEJANDRO: (Hace el dibujo del tiro al blanco que aparece en la figura de la izquierda; luego, a la vez que va anotando las dos columnas de números dice:) Tres, son 5 puntos; 6 son 10 puntos y así...serían 2 tablas, ahorita voy en 9, sería hasta llegar al 18 (y termina la tabla).



ALEJANDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA

La elaboración de tablas sirvió a los niños en problemas como el de los puntos. ¿Por qué este problema promueve la elaboración de tablas por parte de los pocos niños que lo resuelven y no usan la regla de tres? Nosotros creemos que es por las siguientes razones: porque el cálculo $3/5$ no los mantiene en el ámbito de los números naturales; porque a pesar de utilizar 2 cifras decimales el cociente no es exacto, y porque no se trata de dinero, metros o kilos, donde tendría sentido para ellos un cociente con decimales.

Esta forma de interpretar y resolver los problemas de variación proporcional directa es la que aparece en los libros de texto vigentes en sexto grado, las lecciones que tratan este tema de manera explícita comienzan precisamente con tablas como la que vimos al inicio del capítulo.

Establecer las relaciones implicadas en las dos columnas que los niños elaboraron y que son similares a las que aparecen en el libro de texto, es una tarea bastante compleja. La realización espontánea de dicha tarea evidencia que los niños han comprendido las ideas básicas de la variación proporcional directa. Los niños que utilizaron esta estrategia, interpretaron acertadamente que resolver un problema de variación proporcional directa es encontrar los valores correspondientes a dos de las parejas establecidas, y que estos valores pueden encontrarlos si antes encuentran otros intermedios como se ve en la ilustración al margen:

Quedan varias interrogantes ligadas a la elaboración de tablas como estrategia de resolución de problemas:

¿En qué otras situaciones estarán los niños interesados en utilizar esta estrategia, cuál ha de ser el contenido de los problemas para que la pongan en marcha?

¿Esta estrategia, les será útil cuando los problemas impliquen números grandes, y con cualquier **razón** entre los datos?

¿Todos los niños serán capaces de utilizar esta estrategia *espontáneamente*?

En los problemas que podían resolverse utilizando las tablas, únicamente unos cuantos las escogieron como medio de resolución.

Podríamos pensar, entonces, que es más fácil para los niños, y más espontáneo, resolver los problemas de variación proporcional que permiten utilizar la obtención de mitades o duplicaciones y la búsqueda del valor unitario. Los problemas que por sus características llevan a los niños a elaborar tablas parecen ser más difíciles, de ahí que unos cuantos hayan resuelto el problema **puntos**.

5	3
10	6
15	9
20	12
25	15
30	18

Utilizamos la regla de tres

Una de las maneras que se enseñan para resolver problemas de variación proporcional directa es la **regla de tres**. Sin embargo, ningún niño de primaria y casi ninguno de secundaria utilizó dicho procedimiento para resolver los problemas mencionados. Por ejemplo, sólo unos cuantos niños realizaron cálculos como los que efectuó Santiago:

Para el problema **galletas**: $\begin{matrix} 8 & \text{---} & 5720 \\ 15 & \text{---} & x \end{matrix}$

$$\begin{array}{r} 5720 \\ \times 15 \\ \hline 28600 \\ 5720 \\ \hline 85800 \end{array}$$

Para el problema **suéteres**:

$$\begin{array}{r} 15 - 90 \\ 3 - x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 3 \\ \hline 270 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 15 \overline{) 270} \\ \underline{120} \end{array}$$

Si hacemos un recuento del uso de la regla de tres en los diferentes problemas, tenemos lo siguiente: ningún niño la utilizó para resolver los problemas de **las recetas** (que no planteamos a los de secundaria) y en el problema de los **puntos** lo hicieron unos cuantos de primero de secundaria.

Nos sorprende el "desinterés" de los niños por la regla de tres. Nos sorprende también la diversidad de estrategias de resolución que ellos han construido. Ante 4 problemas utilizan 4 estrategias de resolución diferentes:

- la duplicación u obtención de mitades
- la búsqueda del valor unitario
- la elaboración de tablas
- la regla de tres

Esta diversidad, a nuestro entender, se debe a que el concepto de **variación proporcional directa** es muy complejo. Tal diversidad indica también, que los niños no ven problemas similares en todas las situaciones donde este concepto está implicado. Así, de acuerdo con el contenido del problema y la razón entre los datos, los niños conceptualizan de manera distinta cada situación, sin encontrar muchas veces parentesco entre ellas. Podemos decir esto con otras palabras: los niños interpretan los problemas como los que aquí hemos visto de distintas formas:

- como problemas de duplicar o sacar mitades
- como problemas de buscar el valor unitario
- como problemas de hacer tablas
- como problemas de regla de tres

Si pidiésemos a los niños agrupar los problemas que son *iguales*, los que se resuelven con las mismas operaciones, lo más probable es que no *pusieran en un mismo costal* los que aquí hemos analizado y que abrieran una *bolsa* para cada uno. Por supuesto, siempre hay excepciones, aquí la excepción serían los niños que utilizaron la regla de tres para resolver todos los problemas.

Para terminar, insistiremos en tres cosas:

- ante los problemas de variación proporcional directa, hay una escasa utilización de la regla de tres. Aún los niños de secundaria, y algunos de sexto grado que ya la habían estudiado formalmente, prefirieron utilizar otras estrategias.

- muchos niños que no han aprendido en la escuela problemas de variación proporcional directa, son capaces de resolver muchos de ellos con estrategias alternativas.
- paradójicamente, sólo los niños que pudieron referirse a los problemas como *problemas de regla de tres* fueron los que solucionaron correctamente todos los que les planteamos.

A lo mejor el lector piense: ¿Y entonces para qué enseñar la variación proporcional en la escuela, de qué sirven las horas y el esfuerzo que se dedican a este tema, si los niños no utilizan los procedimientos que ahí aprenden?

En otro capítulo nos ocuparemos de dar respuesta a esta pregunta. Por el momento nos conformamos con decir que esto no sólo sucede en México, sino que algo parecido se ha observado en otros países. Por ejemplo, distintas investigaciones realizadas en Inglaterra dicen que los niños utilizan muy poco los procedimientos escolares para resolver los problemas de variación proporcional.

Ardua tarea entonces la que queda al maestro: llevara los niños a descubrir que, bajo apariencias distintas, existen problemas de estructura similar y que para estos problemas —independientemente de las estrategias que en cada caso particular puedan utilizarse para resolverlos— existe un algoritmo convencional y general que puede servir para llegar a la solución.

Más difícil se plantea el asunto si asumimos que los algoritmos y modelos formales de resolución sólo tienen sentido en la enseñanza si tienen significado para los alumnos.

5729

37

7

7

V. PROBLEMAS FÁCILES Y PROBLEMAS DIFÍCILES

Cuando a los niños les planteamos problemas de suma y resta, Laura dejó sin resolver el siguiente problema:

En el recreo se vendieron 410 tacos y quedan 200 tacos, ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?

Y este es el motivo por el cual Laura no resolvió el problema:

"Es que en éste me confundí, porque sentía que era de resta, todo me decía que era de resta, pero también veía que era de suma, y no sabía porque..."

LAURA, SEXTO GRADO, 11 AÑOS

Una idea muy arraigada es que los problemas de suma son más fáciles que los problemas de resta. También se piensa que los de multiplicación son más fáciles que los de división.

Si consideramos que tales ideas son correctas, podemos entonces hacer estas afirmaciones:

- son las operaciones (en el sentido tradicional del término: adición, sustracción...) las que diferencian los problemas;
- por lo tanto, dos problemas que implican la misma operación tienen el mismo nivel de dificultad, y
- si dos problemas implican dos operaciones diferentes son de nivel de dificultad diferente.

En las siguientes páginas discutiremos estas afirmaciones. Como se va haciendo costumbre, la discusión la haremos desde la perspectiva de los niños.

Una suma fácil y una no tan fácil

Este es el problema que Laura no resolvió:

En el recreo se vendieron 410 tacos y quedan 200 tacos, ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?

También les pedimos a los niños resolver este problema:

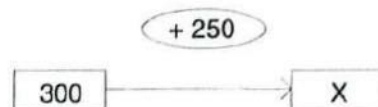
En la cooperativa había 300 tortas, después trajeron 250 tortas, ¿cuántas tortas hay ahora en la cooperativa?

Estos dos problemas se resuelven con sumas de dificultad muy similar:

Con ésta el problema tortas :	Con ésta el problema tacos :
$300 + 250 = X$	$410 + 200 = X$

Y aunque los cálculos son muy parecidos, los niños encontraron dificultades diferentes. Casi todos resolvieron adecuadamente el problema **tortas**, realizando la suma correspondiente.

En cambio, en el problema **tacos**, muchos no llegaron a la solución correcta. En los siguientes párrafos veremos por qué una suma resultó fácil y otra resultó difícil. Utilizaremos unos esquemas para analizar mejor los problemas. Con un esquema podemos representar así el problema **tortas**:



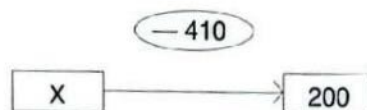
Este esquema significa lo siguiente:

- se conoce la cantidad de tortas que había inicialmente (300);
- esta cantidad se modifica por las 250 tortas que trajeron, y
- se desconoce cuántas tortas hay después de que trajeron las 250.

En este problema, la suma es muy natural. Se trata de agregar, a la cantidad que se tiene inicialmente, otra cantidad; así, la cantidad inicial crece.

Y esa es la primera idea que los niños tienen sobre la suma: **una suma es una cantidad inicial que crece**. Y no se necesita ir a la escuela para construir esta idea, aun los niños de 3 a 5 años cuentan con ella. La manera en que está planteado el problema **tortas** coincide con esa idea. Podemos decir entonces, que: **la suma del problema tortas es una suma fácil**.

Una suma no tan fácil es la del problema **tacos**. Este problema exige un razonamiento más complejo. Con un esquema, veremos esto fácilmente:



En el problema de los **tacos**:

- se desconoce la cantidad inicial de tacos;
- se conoce la cantidad de tacos que se han vendido, y
- se conoce también la cantidad de tacos que hay al final de la venta.

Este problema no puede ser resuelto de manera tan natural como el problema **tortas**, porque no se trata de agregar a la cantidad inicial otra cantidad, se trata de encontrar la cantidad inicial. Y los niños tienen dos caminos para resolverlo.

El primer camino es el siguiente:

Invertir el planteamiento del problema, y el razonamiento que de él deriva. Esto se ve en el esquema siguiente:

Planteamiento inicial:

Inversión del planteamiento:

$$X - 410 = 200 \longrightarrow 200 + 410 = X$$

A muchos niños se les dificulta realizar esta inversión y realizan una resta, por ejemplo Amelia (13 años, primero de secundaria):

$$\begin{array}{r} 410 \\ - 200 \\ \hline 210 \end{array}$$

h = 210 tacos

Santiago, a quien ya hemos escuchado en otras ocasiones, da su opinión sobre esta respuesta:

- SANTIAGO: No sé qué tenían que restar, si es de suma.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué dices que no debían restar?
SANTIAGO: Es que... pues es un poco absurdo, ¿no?... que hayan restado.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué es absurdo?
SANTIAGO: Pues porque si te preguntan lo que había al principio, pues el resultado no te puede salir menos que lo que quedó al final y que lo que vendieron...

SANTIAGO, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Santiago realizó este razonamiento: si se busca la cantidad inicial, entonces el resultado tiene que ser mayor que lo que queda y que lo que se vendió... aunque el problema diga **se vendieron y quedan** (palabras asociadas a la acción de quitar)... entonces ¡pues hay que sumar lo que en el problema aparece como resta!

Pero no todos los niños lograron realizar este razonamiento, por ejemplo, Laura. Ella nos decía:

"Es que en éste me confundí, porque sentía que era de resta, todo me decía que era de resta, pero también veía que era de suma, y no sabía porqué..."

Laura no logró resolver el conflicto entre su idea inicial de la resta (es un problema de resta porque dice vendieron, quedan) y la estructura del problema con la incógnita en la cantidad inicial. Y es que esto la obligaba a realizar una inversión del planteamiento, pero Laura no logró hacerlo.

En problemas como éste de los **tacos** —donde se desconoce la cantidad inicial— la suma no resulta tan natural. Entender que el problema se resuelve con una suma implica realizar una inversión en el planteamiento y, por lo tanto, en el razonamiento.

El segundo camino para resolver este problema, nos lo muestra Nuria:

"Lo que pasa es que en éste es fácil que te confundas... por la pregunta... es como si fuera capcioso... porque está un poco revuelto... pero si te fijas es fácil... yo lo resolví así: dice vendes 400 y te quedan 210... primero pensé que si tenían 500 menos 400 que vendían... eran 100 los que quedaban, no salió y le aumenté: a 600, y si vendes 400 te quedan 200... ya salió, nada más le aumentas los 10, son 610 los (tacos) que tenían."

NURIA, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Nuria supuso cuántos tacos había al principio y, a partir de esa suposición, restó los 400 tacos que se vendieron. El camino que siguió Nuria es un buen camino pero..., con números que impliquen cálculos más difíciles, lo más probable es que no funcione.

Ahora podemos decir que:

Los dos problemas que acabamos de analizar tienen diferente dificultad para los niños porque la incógnita está ubicada en un lugar diferente.

En el problema **tortas** se busca la cantidad final y este es un razonamiento natural para los niños, por eso prácticamente todos pueden resolver este problema. En cambio, en el problema **tacos** la incógnita se ubica en la cantidad inicial; resolver este problema obliga a realizar una inversión en el planteamiento del problema y en el razonamiento que de él deriva, y no todos los niños logran hacerlo.

Los niños también pueden hipotetizar la cantidad inicial, como hizo Nuria, pero esto, como dijimos antes, con números que lleven a cálculos difíciles, lo más seguro es que no funcione.

Podemos decir entonces, que:

La suma puede ser fácil... y no tan fácil... y la dificultad depende no sólo de la complejidad del cálculo numérico sino, sobre todo, de la forma en que esté planteado el problema. Porque esto obliga a realizar operaciones de pensamiento diferentes.

Así, por ejemplo, es mucho más difícil sumar para encontrar la cantidad inicial que para encontrar la cantidad final. Probablemente hasta para los maestros resulte más difícil plantear problemas de este tipo.

Una resta fácil y una resta difícil

Entre los problemas de resta que propusimos a los niños, se encontraban los siguientes:

- 1 En la cooperativa escolar había 19 518 pesos antes del recreo, ahora hay 87 625 pesos. ¿Cuánto se vendió en el recreo?
- 2 En la cooperativa escolar había 94 780 pesos y se dieron 35 945 pesos para el día del niño. ¿Cuánto dinero quedó en la cooperativa?

Los dos problemas de la cooperativa se resolvían con una resta:

con la resta $87\ 625 - 19\ 518 = X$ el primero,

con la resta $94\ 780 - 35\ 945 = X$ el segundo.

Desde el punto de vista del cálculo que implican, estas restas tienen una dificultad muy similar. A pesar de esto, la dificultad de los problemas resultó muy diferente: casi todos los niños, empezando por los de tercero, pudieron resolver el problema **día del niño**. En cambio, menos de la mitad, incluyendo a los de secundaria, pudieron resolver el problema **recreo**.

Después de resolver el problema **día del niño**, muchos niños dieron justificaciones parecidas a las siguientes:

Es muy fácil saber que este problema es de resta porque se trata de ver cuánto queda.

DIANA, 12 AÑOS, PRIMERO DE SECUNDARIA

Es que, tú ya sabes cuánto tienes... te lo están diciendo... a eso le quitas la cantidad que dice y ya ves lo que queda.

SUSANA, 11 AÑOS, SEXTO GRADO

Esta idea de resta (quitar cierta cantidad a otra que se tiene para calcular lo que queda) es muy natural, hasta sin ir a la escuela se construye. Según se sabe por distintas investigaciones —al igual que ocurre con la suma— cuentan con ella hasta los niños de 3 a 5 años.

Nosotros vimos que prácticamente todos los niños —de tercer grado a primero de secundaria— pueden resolver problemas como el del **día del niño**.

La resta de problemas como el del día del niño es una resta fácil.

Algo muy distinto sucedió cuando planteamos el problema del **recreo**. Muchos niños nos decían: *a éste no le entiendo*. Y muchos de los más pequeños —y de los grandes— dieron respuestas como éstas:

■ En la tienda de la escuela
había \$ 17 600 antes del recreo,
ahora hay \$ 54 850.
¿Cuánto se vendió en el recreo?

$$\begin{array}{r} 54850 \\ 17600 \\ \hline 72450 \end{array}$$

R. \$ 72450

■ En la cooperativa escolar
había \$ 19 518 antes
del recreo, ahora hay \$ 87 625.
¿Cuánto se vendió en el recreo?

$$\begin{array}{r} 19518 \\ + 87625 \\ \hline 107143 \end{array}$$

YASMIN, 8 AÑOS, TERCER GRADO

DAVID, 12 AÑOS, SEXTO GRADO

Y escuchar a los niños nos permitió entender la dificultad para escoger la operación correcta:

ENTREVISTADORA: (Dirigiéndose a Perla) En este problema...sumaste 19 518 más 87 625. ¿Tú crees que tu resultado está bien, o que está mal?

PERLA: Bien.

ENTREVISTADORA: ¿Y por qué crees que este problema es de suma?

PERLA: Porque la pregunta dice cuánto se vendió en el recreo.

ENTREVISTADORA: ¿y esta pregunta te dice que es de suma?...

PERLA: Sí, o sea...la segunda vez se tiene que poner, se tiene que poner la otra cantidad, o sea cuánto vendieron... 107 000 es lo que vendió.

ENTREVISTADORA: Oye, algunos niños restaron, ¿quién estará bien, ellos o tú?

PERLA: (Después de varios rodeos) Yo estoy bien.

ENTREVISTADORA: ¿Por qué?

PERLA: Porque es de suma.

ENTREVISTADORA: ¿Y entonces por qué crees que los otros restarían?

PERLA: Porque no se fijaron...

PERLA, SEXTO GRADO, 12 AÑOS

Perla dice: "es de suma porque...la segunda vez se tiene que poner, se tiene que poner la otra cantidad, o sea cuánto vendieron...107 000 es lo que vendió".

En esta frase Perla explica la interpretación que hizo del problema: una cosa es la cantidad que tienes antes del recreo y otra, que tienes que agregar, es lo que se vendió...juntas serán el resultado del problema. Por eso decidió utilizar la suma para resolverlo.

Otros niños muestran, en sus explicaciones y sus respuestas, un progreso en relación con esta idea de que la suma lleva a la **buena respuesta**. Veamos, por ejemplo, el razonamiento de Emilia, una niña que duda entre la **buena** y la **mala respuesta**.

(Después de pensar un poco, Emilia resuelve el problema del recreo con una resta, luego se acerca y nos dice:)



- EMILIA: Oye, no sé si éste está bien o está mal.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué no sabes?
EMILIA: Es que siento que está bien, con resta.
ENTREVISTADORA: A ver, explícame un poco más, ¿por qué crees que está bien con resta?
EMILIA: No sé, pero siento que está bien, pero también siento que estoy dando el dinero.
ENTREVISTADORA: ¿Por qué sientes que das el dinero?
EMILIA: Porque es con resta.

EMILIA, TERCER GRADO, 8 AÑOS

En el diálogo con Emilia percibimos el conflicto entre sus concepciones iniciales y el nuevo significado de la resta que plantea el problema. Sin embargo, Emilia decide conservar la resta como solución. Y esto a pesar de que *siente que con resta da el dinero*.

Emilia ha comenzado a rebasar un obstáculo fundamental en la construcción del significado de la resta: la idea de que la resta es una cantidad inicial que disminuye porque se gasta, se vende o se regala...

Otros niños tienen ideas más firmes sobre el significado de la resta que plantea el problema **recreo** y que Emilia ha comenzado a construir. Estos niños resuelven correctamente los problemas de este tipo, pero no saben explicar el por qué seleccionaron esta operación. Y así nos lo dicen:

"O sea, sí sé que es de resta...pero como que no te sé explicar muy bien."

CARLA, 11 AÑOS, SEXTO GRADO

"No, no te puedo explicar por qué es de resta; sí estoy seguro que es de resta, de suma no es...pero no sé cómo decirte..."

GABRIEL, SEXTO GRADO, 12 AÑOS

Estos niños tienen la seguridad de que el problema es de resta y sin dudar la utilizan para resolverlo, pero no son capaces de justificar el por qué. Esto es más difícil, es también una muestra de progreso intelectual.

Otros niños muestran tal progreso al explicar su razonamiento y justificar sus respuestas, por ejemplo, Montserrat y Alejandro:

ENTREVISTADORA: (Refiriéndose al problema **recreo**) ¿Por qué restaste?

MONTSERRAT: Es que había antes 19 518, eso nadie lo ganó, eso ya estaba, ¿no?, luego se dice que ahora hay 87 625, entonces, para saber la diferencia entre 87 000 y 19 000 se necesita una resta.

ENTREVISTADORA: Algunos niños sumaron, 19 mil y 87 mil, sacaron como 107 mil, ellos dicen que están bien...

MONTSERRAT: ...Ellos están mal, lo que pasa es que ellos de seguro pensaron que si 19 518 era lo que había antes del recreo, y pensaron que 87 625 fue lo que ganaron en el recreo, que era aparte esa cantidad, entonces, yo creo que entendieron mal, yo creo que entendieron que preguntaban que cuánto es ahora, por eso sumaron...

MONTSERRAT, PRIMERO DE SECUNDARIA



Alejandro justifica su respuesta con argumentos similares a los de Montserrat:

ALEJANDRO: En este problema lo que hago es una resta...para saber cuál es la diferencia.

ENTREVISTADORA: Unos niños lo que hicieron fue sumar, ¿quién está bien, ellos o tú?

ALEJANDRO: Pues yo digo que yo...(porque lo que hicieron esos niños) podría ser si te dicen: esto había y esto se vendió en el recreo, ¿cuánto hay en total?, pero no si te dicen que ¿cuánto vendiste en recreo?

ENTREVISTADORA: Entonces, ¿cómo está bien el problema, con suma o con resta?

ALEJANDRO: ¡Pues con resta! (enfático).

ENTREVISTADORA: Y tú, ¿en qué les dirías a los niños que se fijen para no cometer ese error?

ALEJANDRO: Pues en la pregunta, ¿no? porque por la operación que pusieron, la pregunta que estaría bien es ¿Cuánto tenemos en total en la cooperativa?...

ALEJANDRO, PRIMERO DE SECUNDARIA, 12 AÑOS

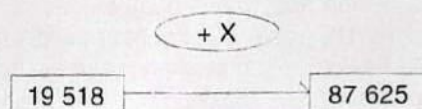
Alejandro, Montserrat y muchos otros de sus compañeros dicen: **los niños que sumaron resolvieron otro problema, un problema que llevaría la pregunta ¿Cuánto se vendió en total?**

Hagamos ahora un recuento de las respuestas de los niños:

Los niños que llegaron a la **buena respuesta** en este tipo de problemas percibieron que:

- se conoce la cantidad que se tiene al inicio, y la que se tiene al final;
- el dato desconocido es el dinero que se ganó en el recreo; es decir, hay que buscar una diferencia entre lo que se tenía al principio y lo que se tiene al final, y
- esa cantidad (la diferencia) no puede ser mayor que el total que ya se tiene.

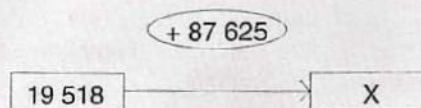
La idea que estos niños se hicieron del problema, la podemos representar con el siguiente esquema:



Estos niños se imaginaron el problema como una "adición con hueco". Por supuesto, un segundo paso que tendrán que dar para llegar a la solución será convertir esta adición en sustracción.

En cambio, los niños que no llegaron a la **buena respuesta** porque realizaron una suma, entendieron que tenían dos cantidades y que había que sumarlas para buscar un total ¡no se percataron de que ya tenían el total!

La forma en que estos niños interpretaron el problema puede representarse de la siguiente manera:



Estos niños no vieron el problema como una "**adición con hueco**", sino como una adición común y corriente, donde se tienen los sumandos y hay que buscar el total.

Para ellos, uno es el dinero que había antes del recreo y otro es el que hay ahora, como si el de ahora no incluyera el anterior. De ahí que su respuesta haya sido sumar $19\,518 + 87\,625$, pues teniendo las *partes* había que construir el *todo*, es decir, buscar el total.

- Vemos entonces, que no es la diferencia entre las operaciones (en el sentido de cálculo), sino el establecimiento de las relaciones entre los datos lo que permite explicar las diferencias de dificultad en los distintos problemas.
- Para que los niños puedan resolver problemas como el que aquí analizamos, necesitan construir otro significado para la resta: **la operación que permite encontrar una diferencia.**
- Podemos decir, entonces, que el significado **encontrar una diferencia** es menos simple que el significado **quitar, disminuir**, el cual, hemos dicho ya, los niños lo construyen aun sin ir a la escuela.

Ahora podremos explicarnos mejor las soluciones que produjo Iván, las cuales aparecen en el margen derecho.

Iván, tenía 8 años cuando resolvió estos problemas; no era aún capaz de entender la resta como una diferencia. De ahí que su respuesta al problema de la tienda sea la suma y para el problema que inventa la pregunta sea sobre el total.

Es por cosas como las que acabamos de ver, que Gerard Vergnaud ha hecho una diferencia fundamental entre los tipos de cálculo que se realizan al resolver un problema:

- **cálculo numérico**, que se refiere a las operaciones aritméticas en el sentido tradicional del término, y
- **cálculo relacional**, que hace referencia a las operaciones de pensamiento necesarias para evidenciar las relaciones que hay entre los elementos de la situación-problema.

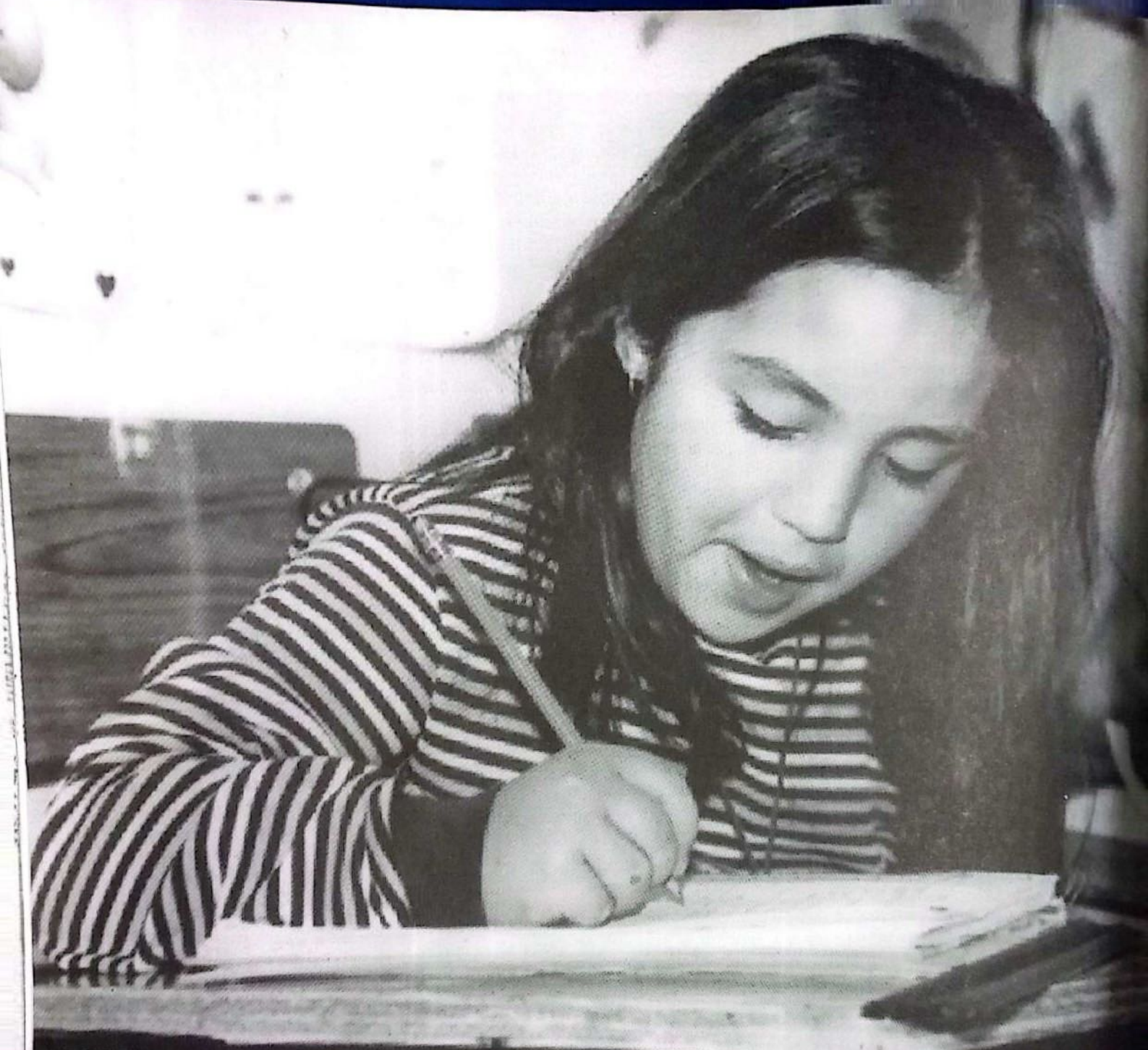
Y es precisamente el cálculo relacional el que permite explicar las diferencias de dificultad en los problemas que se resuelven con el mismo cálculo numérico. Podemos entonces decir que, no siempre que dos problemas lleven un mismo cálculo serán igualmente difíciles. Así, según hemos visto, hay sumas fáciles y no tan fáciles y la misma resta puede ser fácil y también difícil.

■ En la tienda de la escuela había \$ 17600 antes del recreo, ahora hay \$ 54850. ¿Cuánto se vendió en el recreo?

$$\begin{array}{r} 17\ 600 \\ + \\ 54\ 850 \\ \hline 71\ 400 \end{array}$$

■ Escribe aquí un problema que tú inventes y que se parezca al de la tienda de la escuela:

si la escuela
cuenta al 800. Antes
del recreo y en el
recreo 400 ¿cuánto
dinero tiene en
Total?
$$\begin{array}{r} +800 \\ +400 \\ \hline 1200 \end{array}$$



VI. LEER, INTERPRETAR Y RESOLVER

Al problema del autobús no le entiendo nada, dijo Mauricio.

No sé qué están preguntando de que bajaron, si no dice nada de que bajaron sino de que subieron, dijeron Santiago y Gabriel.

No se puede resolver, porque no te dicen cuántos van en el autobús, dijeron Kiren y Jesús.

¡Cómo no, si supiera cuántos iban se facilitaría, pero aunque no sepas se puede resolver, lo que pasa es que no se fijaron en la pregunta!, exclamaron Diana y Rafael.

Las de arriba son respuestas que dieron los niños al problema que llamamos **autobús**, y que se planteó así: **En una parada subieron a un autobús 17 personas. Cuando arranca el autobús, van 5 personas más que antes de que para. ¿Cuántas personas bajaron del autobús en esa parada?** Respuestas parecidas dieron al problema que denominamos **fiesta**. En este apartado analizaremos las respuestas a estos dos problemas.

Interpretamos con base en lo que sabemos

Este capítulo hubiera estado mejor al principio del libro porque habla de lo primero que hacen los niños para resolver un problema cuando se los planteamos por escrito: **leer e interpretar**. Pero lo hemos dejado casi hasta el final porque es un poco más difícil: a lo mejor para sacar de él algún provecho, habrá que releerlo varias veces y discutirlo con otros maestros. Ojalá que quien tenga el libro en sus manos tenga también el ánimo de hacerlo.

Muchos maestros piensan que la dificultad para que los niños logren resolver problemas es, para empezar, un problema de lectura. Quienes dicen esto, se refieren a la deficiente habilidad de lectura que han logrado muchos niños en la



escuela. En las siguientes páginas trataremos este asunto, pero desde una perspectiva diferente. Veremos que:

Los niños interpretan los problemas de acuerdo con los saberes y conceptualizaciones con que cuentan. Así, pueden interpretar de manera distinta un mismo problema; es decir, le pueden dar distintos significados. Con base en los significados que los niños le dan a los problemas buscan y construyen distintas soluciones.

Para entender esto mejor, recordemos por ejemplo que los niños interpretan los problemas de variación proporcional directa de maneras diferentes: como **problemas para buscar el valor unitario**, como **problemas para elaborar tablas**, como **problemas para duplicar** o como **problemas de regla de tres**. Veremos ahora otro ejemplo, el problema de la **fiesta**.

Los invitados a la fiesta: ¿Uno, dos o tres problemas?

Este es el problema de la fiesta:

Una fiesta empezó a las 6 de la tarde, a las 9 de la noche se fueron 25 de los invitados y llegaron otros 40 inmediatamente después; en ese momento, ¿habría más o menos invitados en la fiesta?, ¿cuántos más o cuántos menos?

Pocos niños dieron una respuesta acertada a este problema. Y el problema se resuelve con una resta muy sencilla: $40 - 25$.

En esta ocasión los errores de resolución están ligados a las distintas interpretaciones que los niños hicieron del problema.

Pero es que este problema es mucho más complejo que los problemas donde la resta significa quitar y donde se conoce la cantidad inicial. Si utilizamos un esquema podremos entender esto mejor:



Qué quiere decir este esquema, se preguntará el lector. Para empezar, quiere decir que no sabemos cuántos invitados había en la fiesta ni al principio ni al final, por eso los rectángulos están vacíos.

Lo que se sabe es cuántas personas llegaron y cuántas se fueron en un momento dado, es decir, a las 9 de la noche.

A los números que indican las personas que se fueron y las que llegaron los llamaremos **transformaciones**; así, irse y llegar son dos **transformaciones**. Las **transformaciones** las representamos en el esquema con un óvalo como este:



El problema solicita conocer cuántas personas habrá de más o de menos en la fiesta, es decir, se solicita comparar las personas que se fueron con las que llegaron para obtener así la diferencia; por eso diremos que el **problema solicita comparar dos transformaciones**. Y esto sin saber cuántas personas hay en la fiesta ni cuántas quedarán.

Seguramente este problema resulte poco familiar. Nosotros nos dimos cuenta que muchos niños piensan lo siguiente:

"No se puede resolver porque no se sabe cuántas personas había en la fiesta."

Pero veamos lo que dicen otros niños para entender las distintas interpretaciones que hicieron del problema:

ES DE RESTA PORQUE DICE QUE SE FUERON

- ENTREVISTADORA: ¿Por qué hiciste el problema con una resta? (Carla realizó el cálculo correcto; obtiene 15 pero no sabe si el 15 quiere decir que hay más o menos invitados.)
- CARLA: (Se queda pensativa ante la pregunta, luego responde dudosa con otra pregunta): ¿Es de suma?
- ENTREVISTADORA: ¿Tú qué crees?
- CARLA: (Nuevamente dudosa.) Es de resta...
- ENTREVISTADORA: ¿Por qué?
- CARLA: Porque dice que **se fueron**, los invitados.

CARLA, 12 AÑOS, SEXTO GRADO



¿En qué se fijó Carla para construir su respuesta?

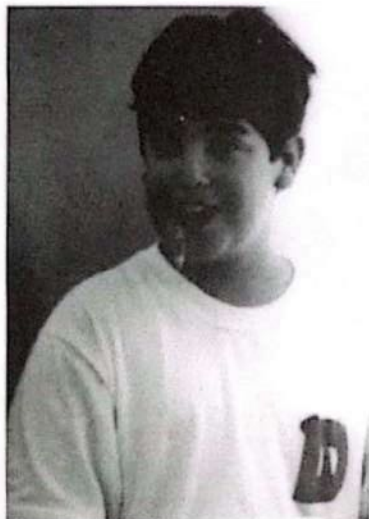
Carla se basó en la identificación de un verbo; ella afirma: **es de resta porque el problema dice se fueron** los invitados.

Pero Carla no es la única que hizo esto, muchos otros niños justificaron de manera parecida sus respuestas; por ejemplo, Perla:

"Supe que era de resta porque dice que se fueron y que cuántos quedaron."

Los niños que justificaron de esta manera su respuesta, no interpretaron adecuadamente el planteamiento del problema ni la solución del mismo. Sin embargo llegaron, en apariencia, a la solución correcta: **La interpretación que hicieron estos niños no se basa en el conocimiento de las relaciones planteadas en el problema.**

La respuesta de estos niños estuvo basada en la identificación de una palabra que han aprendido a interpretar como **restar** y que es **irse**. Y es que muchos problemas de resta asocian estos dos términos; así, para los niños, **irse significa disminuir**.



Irse se ha convertido en una palabra clave para identificar los problemas de resta, aunque éstos no se comprendan. Y muchas veces, esta forma de abordar los problemas conduce a errores evidentes. Otras veces, por el contrario, una especie de casualidad lleva a los niños a dar respuestas "acertadas", sin haber comprendido el problema.

Y esta lectura superficial que los niños hacen del problema está guiada por el significado que ellos asignan a la resta: una cantidad que decrece, significado que se anuncia con palabras como irse.

La lectura que hicieron Carla y Perla, es la interpretación más elemental que observamos del problema **fiesta**. Otros como Oscar, la hicieron más compleja:

HABÍA 40 Y SE FUERON 25

- OSCAR: Habrá más invitados.
ENTREVISTADORA: ¿Cuántos invitados más?
OSCAR: 40 más.
ENTREVISTADORA: ¿No importa que llegaron 40 pero se fueron 25?
OSCAR: Sí, sí importa, porque ya estuvieron ahí, había 65 invitados.
ENTREVISTADORA: ¿Y entonces...?
OSCAR: Se fueron 25 y quedaron 40.
ENTREVISTADORA: En el problema te hacen una pregunta: si habría más o menos invitados, ¿cómo resolverías la pregunta del problema?
OSCAR: Con una resta...primero sumaba 40 y luego 25...saldrían 65 y luego le restaba 25.
ENTREVISTADORA: ¿Para qué harías eso?
OSCAR: Para saber **cuántos invitados había y cuántos se quedaban**.
ENTREVISTADORA: ¿Y cuántos se quedaron?
OSCAR: **Se quedaron 40.**

Oscar sumó $40 + 25$, para calcular *los invitados que había*. Una vez que hizo esto, restó los que se fueron: $65 - 25 = 40$.

Hasta aquí **Oscar no ha dado a la resta el significado de operación que le permite comparar los invitados que se fueron con los que se quedaron**. A partir de tal comparación, Oscar obtendría la diferencia que es la solución del problema.

Tratando de indagar más sobre el razonamiento de Oscar, le dijimos que otros niños habían restado $40 - 25$:

ENTREVISTADORA: Unos niños restaron para resolver el problema, pero restaron $40 - 25$, y les resultó a 15, ¿quiénes estarán bien, ellos o tú?

OSCAR: Está bien la resta.

ENTREVISTADORA: ¿Por qué?

OSCAR: Porque dice cuántos.

ENTREVISTADORA: Entonces, ¿qué es lo que está bien, que digan 15 invitados o 40 invitados?

OSCAR: Que **hay 15 invitados, porque había 40 y se fueron 25**.

ENTREVISTADORA: Pero la pregunta del problema decía si habrá más o menos invitados...

OSCAR: Hay 15.

ENTREVISTADORA: ¿Por qué?

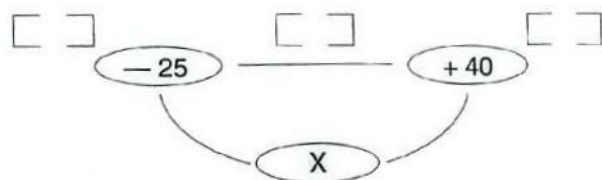
OSCAR: Porque a 40 le quitamos 25.

Hagamos un alto para entender a Oscar.

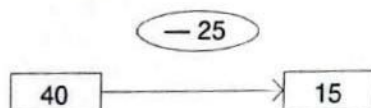
El problema de la **fiesta**, como estaba planteado, implicaba dos transformaciones: **se fueron 25 invitados** es la primera, **llegaron 40 invitados** es la segunda. Pero Oscar reinterpretó las transformaciones: convirtió en **cantidad inicial** la transformación **llegaron 40**, y en **cantidad final** de invitados el resultado de comparar las dos transformaciones. Por eso nos explica: **Hay 15 invitados** (cantidad final), porque había 40 (cantidad inicial) y se fueron 25.

Comparemos el esquema del problema original con el esquema que representaría el problema y la solución de Oscar.

Este es el esquema que representa el problema original:



En este problema se desconoce cuántos invitados había en la fiesta (cantidad inicial) y cuántos quedarían después de haberse realizado las transformaciones (cantidad final). Pero Oscar lo ha transformado en otro problema en el que sí se conoce la cantidad inicial y la cantidad final de invitados y que podemos representar así:



- 40 son los invitados que hay
- 25 son los invitados que se van
- 15 son los invitados que quedan

Si hacemos un recuento del diálogo con Oscar, veremos que la interpretación que hizo inicialmente del problema, evolucionó en el transcurso del diálogo, pero no en el sentido que estaba previsto en el problema original. Como Oscar interpreta la resta como una disminución sobre una cantidad inicial, reinterpreta el problema de acuerdo con esta idea y entonces dice: **hay 40 invitados...se van 25...quedan 15.**

Muchos niños hicieron lo que Oscar: en este u otros problemas parecidos, modificaron el significado original de los problemas, porque las conceptualizaciones con las que dan significado a la resta no les permiten interpretar esta operación como operación que permite hacer una comparación. Esto se complica más si la comparación se hace entre dos transformaciones y no entre la cantidad inicial y final.

Hay otros niños que, con niveles de conceptualización distintos en relación con la resta, se niegan a resolver problemas en los que no se conoce la cantidad inicial, pues para ellos, este es un elemento indispensable para poderlos resolver. Veamos el por qué:

SI NO DICEN CUÁNTAS HAY, NO SE PUEDE RESOLVER

(Kiren no responde el problema fiesta en el cuestionario escrito; da la siguiente justificación para no hacerlo): *"No se puede saber, no se entiende porque no se sabe cuántos eran los invitados."*

Con esta justificación Kiren expresa su idea de que conocer la cantidad inicial en los problemas de suma o resta, es una condición indispensable para su solución. Y,

aunque en momentos parece evolucionar su pensamiento, finalmente se sostiene en la postura inicial:

ENTREVISTADORA: Pero explícame: por qué crees que no se puede saber...

KIREN: Es que el problema dice: a las 8 de la noche se fueron 25; no sé cuántos invitados había antes...y llegaron 40, yo no sé cuántos había antes. No puedo resolver el problema porque no sé la cantidad de alumnos que había antes de las 8 de la noche.

ENTREVISTADORA: Si pusieramos que había...30 personas...

KIREN: ¡Ya, ya se puede resolver! (lo dice con mucha seguridad; luego, sin que se le indique, hace los siguientes cálculos):

$$\begin{array}{r} 30 \\ - 25 \\ \hline 05 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ + 5 \\ \hline 45 \end{array}$$

(Cuando termina, dice): ¡45!, con los que se fueron y con los que llegaron, quedan 45.

Interpretemos lo cálculos de Kiren:

30 son los invitados que había
- 25 son los que se fueron
05 son los que quedaron...

40 invitados que llegan
+ 5 que había
45 ahora hay 45 invitados

Podemos observar, por los cálculos que hace Kiren y la interpretación que les da, que ella al igual que Oscar, transformó el problema original en otro en el que hay una cantidad inicial de invitados la cual se modifica y da otra cantidad final.

En este punto le presentamos a Kiren la interpretación que los maestros esperaríamos del problema:

ENTREVISTADORA: Otros niños restaron 40 — 25 y dijeron que el resultado era 15 más; lo hicieron aunque no supieran cuántos invitados había al principio.

KIREN: Pues...no sé...(dudosa)...no sé si estarán bien o mal, porque yo creo que si no sabes la cantidad de personas que hay no va a saber cuántos quedaban.

ENTREVISTADORA: Entonces, ¿no me podrás decir si esos niños estaban bien o mal?

KIREN: No, no te puedo decir...porque no se sabe cuántos había al principio... (se queda pensativa, finalmente concluye)...no, no se pue-



de saber, ellos estaban mal, porque no se sabe los que había al principio.

¡Kiren está convencida de que no se pueden resolver los problemas **sin saber lo que hay al principio**, y nada la hace modificar su punto de vista! Y muchos niños piensan como ella.

Los diálogos que hemos incorporado hasta aquí representan el razonamiento de casi todos los niños de sexto y primero de secundaria. Estos diálogos muestran interpretaciones distintas de las que podríamos esperar en el problema fiesta. Pero también hay niños que interpretaron el problema de la manera en que nosotros esperábamos, por ejemplo Rafael:

SI UNOS VIENEN Y OTROS VAN, SE RESTA

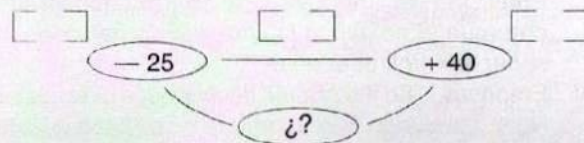
- ENTREVISTADORA: ¿Cómo supiste que la respuesta era 15 invitados más?
RAFAEL: Porque si se fueron 25 y llegaron 40, hay más, ¿no?, es más grande 40 que 25, y 40 son los que llegaron.
ENTREVISTADORA: Algunos niños sumaron $40 + 25$, ¿eso no es correcto?
RAFAEL: No, pero si los 25 se fueron y los 40 se fueron, podría ser de suma.
ENTREVISTADORA: ¿Y como está planteado el problema...?
RAFAEL: O sea, se resta, si unos vienen y otros van, se resta.

Rafael expresó el significado que le da a la resta; aunque con otras palabras, nos dice:

"La resta sirve para comparar, para encontrar la diferencia entre los que se quedan y los que se van."

Esta conceptualización de la resta, es más amplia y más evolucionada que la de quitar.

Los niños que razonaron como Rafael, han tenido un doble progreso, pues además de que han ampliado el significado de la resta, han rebasado un obstáculo fundamental: la idea de que en los problemas de suma y resta es indispensable conocer la cantidad inicial para poderlos resolver. Traduzcamos esto a nuestro esquema inicial:



Rafael, y los niños que razonaron como él, han llenado los huecos correspondientes a las transformaciones y han podido dejar libres los que expresan las cantidades inicial y final. Ellos saben que no hace falta saber cuántos invitados había en la fiesta para poder resolver el problema. Saben también que lo que hicieron fue comparar el número de invitados que se fueron con el número de invitados que llegaron y para eso utilizaron la resta. Ellos encontraron la diferencia entre las dos transformaciones. **¡Ellos resolvieron el problema original!**

Tenemos entonces que los niños han interpretado el problema fiesta de cuatro maneras distintas, además de los niños que nos dijeron *no le entiendo*. Por eso al inicio del capítulo nos preguntamos:

Para los niños, el de la fiesta, ¿es uno o son varios problemas?

Otra interpretación difícil: ¿cuántos pidieron la parada?

Seguramente ahora tendrán sentido las afirmaciones siguientes:

- Un momento decisivo en la resolución de un problema es hacerse una representación del mismo.
- La representación de un problema es el resultado de la interpretación que el niño hace de la situación inicial o planteamiento del problema, así como de la operación u operaciones con las cuales cree puede llegar a la solución.
- En la construcción de la representación del problema —y por lo tanto de la solución que los niños busquen— es fundamental el significado que dan a la operación con la cual intentan resolver el problema.
- De la representación que el niño se haga de un problema dependerá la solución que busque, la estrategia que ponga en marcha para alcanzarla y el cómo interprete la solución.

Esto, que observamos en el problema **fiesta**, se observa nuevamente en el problema **autobús**. Los niños se hicieron distintas representaciones del problema. Recordemos el problema:

En una parada subieron a un autobús 17 personas. Cuando arranca el autobús, van 5 personas más que antes de que parara. ¿Cuántas personas bajaron del autobús en esa parada?

AL PROBLEMA... NO LE ENTIENDO NADA

Muchos niños no lograron hacerse una representación de este problema y entonces respondieron como Mauricio que iba en primero de secundaria: *"Al problema del autobús no le entiendo nada"*.

O como Gabriel y Santiago, también de primero de secundaria, quienes nos dicen: *"¿Cómo preguntan cuántos se bajaron si no dice nada de que bajaron?!"*

Y Gabriel anota lo siguiente en lugar de otra respuesta: *"No dice nada acerca de que bajaron, sino de que subieron"*.

Estos niños no entendieron el problema, para ellos fue demasiado difícil, sólo que a diferencia de muchos otros que tampoco lo entendieron, tenían una claridad: ¿Que no le entendían al problema!

ES DE RESTA PORQUE SE BAJARON

Muchos niños resolvieron "correctamente" el problema: utilizaron la resta $17 - 5$ para llegar al resultado. Sin embargo, muchos de esos niños justificaron así su respuesta:

"Es de resta, porque dice que cuántos bajaron", o *"supe que era con resta porque preguntaba que cuántos se bajaron...sí, bajar es de resta..."*

Estos niños, al igual que en el problema **fiesta**, han centrado su atención en la identificación de un verbo: bajarse. Y este verbo lo asocian con la operación de restar. **Bajar es también una palabra clave para identificar los problemas de resta.**

Observamos nuevamente cómo **las palabras clave permiten a los niños llegar a las soluciones sin haberse hecho representaciones correctas de los problemas, es decir, sin haber comprendido los problemas.**

Otros niños, al igual que en el problema **fiesta**, nuevamente interpretan las transformaciones como cantidad inicial y cantidad final, por ejemplo Julio César:

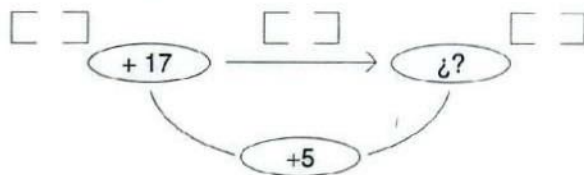
SUBIERON 17 Y EN EL AUTOBÚS YA IBAN 5

- ENTREVISTADORA: Resolviste el problema restando $17 - 5$ y te resultó a 12...
- JULIO CÉSAR: En ese me equivoqué.
- ENTREVISTADORA: ¿Por qué?
- JULIO CÉSAR: Porque no es de resta.
- ENTREVISTADORA: ¿Por qué?
- JULIO CÉSAR: Porque ninguna persona bajó.
- ENTREVISTADORA: ¿Y cómo sabes que no bajó ninguna?
- JULIO CÉSAR: Porque dice que subieron 17 personas, y ya había 5 en el autobús y como arrancó, no bajó ninguna, bueno ahí no dice...
- ENTREVISTADORA: ¿Entonces tú crees que debiste contestar que no bajó ninguna?
- JULIO CÉSAR: Sí, subieron 17 y en el autobús ya iban 5, debí haber sumado, pues al contrario, eran más personas...
- ENTREVISTADORA: ¿Entonces, cuál sería el resultado?
- JULIO CÉSAR: 22...
- ENTREVISTADORA: ¿Estas seguro de que la resta está mal?, muchos restaron...
- JULIO CÉSAR: Sí, me equivoqué, van 22.

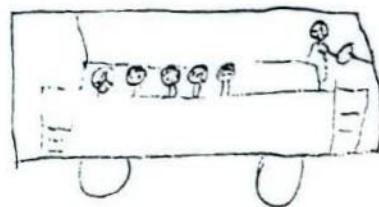
Aunque seguimos el diálogo con Julio, él se sostiene en la idea de que ya iban 5 personas en el autobús. Por eso, cuando dibuja el autobús lo dibuja con 5 pasajeros como se puede ver en el dibujo de al lado, que es de su autoría.

Estos que dibujó Julio César, iban en el autobús antes de la parada, y son los 5 pasajeros más que van en el autobús después de que se suben los 17.

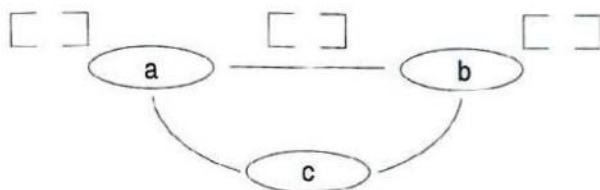
De esta manera, Julio César y muchos otros niños traducen el problema original en otro problema. Utilicemos nuevamente nuestro esquema para interpretarlos. Tenemos aquí el esquema del problema original:



- Los rectángulos están vacíos porque no se sabe cuántos pasajeros hay en el autobús.
- Se conoce el número de pasajeros que suben (17) y los que hay "de más" en el autobús (5), después de que subieron y bajaron los pasajeros en la parada.
- Se desconoce cuántos pasajeros bajaron, es decir se desconoce la diferencia que hay entre 17 que subieron y 5 que hay de más.



El razonamiento que Alejandro nos ha dejado ver, permite resolver problemas como los que hemos analizado y que podemos esquematizar así:



En este tipo de problemas, no se conoce la cantidad inicial ni la final y se trabaja con dos transformaciones.

Estos problemas no son fáciles, lleva tiempo a los niños interpretarlos de la manera en que nosotros lo esperamos.

Como observamos a lo largo del capítulo, son 5 distintas interpretaciones las que hicieron los niños y que muestran una evolución en la comprensión de estos problemas:

- Incomprensión del problema
- Pseudo-comprensión del problema basada en la identificación de una **palabra clave**
- Transformación en cantidad inicial de una de las transformaciones planteadas en el problema original.
- El problema es irresoluble porque no se conoce la cantidad inicial
- Interpretación esperada del problema.

"¡Vaya problema!", tal vez haya pensado algún lector. Y efectivamente, estos son problemas muy difíciles. Prácticamente están fuera del alcance de los niños de quinto grado. Sin embargo, hemos de decir que estos problemas:

- permiten ver con claridad que también es en la representación que los niños se hacen de un problema donde hay que buscar las causas de los errores que cometen y no sólo en el mal manejo de los algoritmos o en la mala aplicación de una estrategia.
- proporcionan un camino para iniciar la conceptualización de los números enteros.

Pero, al trabajar estos u otros problemas el maestro ha de estar atento a una cuestión:

¿Cuál problema resuelven los alumnos?, porque, ¿quién sabe si los niños resuelvan los problemas que creemos que resuelven!



VII. REFLEXIONES PARA LA ENSEÑANZA

Un día, una maestra de sexto años nos dijo:

"...En el libro de matemáticas, en conocimiento viene poco ...por ejemplo, en éste no viene ningún ejercicio y luego luego a los problemas y el niño pues necesita entender bien lo que va a hacer...yo pienso que el conocimiento, la fórmula es primero y luego el ejercicio y después el problema ...podría ser primero el problema pero desgraciadamente los niños vienen arrastrando falta de conocimientos, entonces es necesario darles primero el conocimiento para que ellos puedan resolver cualquier problema relacionado con el conocimiento que se les está dando..."

En buena medida este libro ha sido una respuesta a la opinión de la maestra, también a la maestra que dijo los niños dicen puras burradas. En las páginas que restan trataremos de precisar nuestra respuesta.

¿Dónde ponemos los problemas?

Empezaremos por decir que, de acuerdo con lo que antes vimos:

Es en la resolución de problemas donde los conocimientos matemáticos se visten de significado. Los problemas son a la vez fuente y criterio de verdad de los conocimientos para el niño.

Probablemente quien ahora tiene el libro entre sus manos piense: esto no es ninguna novedad, es lo que se ha dicho y sugerido siempre.

Y efectivamente, desde hace muchas décadas los programas y manuales incluyen el aprendizaje de la resolución de problemas. Sin embargo, **la inclusión de los problemas en programas y manuales obedece a distintas con-**

cepciones y ha cumplido diferentes funciones. Para darse cuenta de ello basta echar una mirada a los programas de educación primaria que se han utilizado a lo largo de este siglo en México. Prácticamente, no hay programa escolar que no mencione —aunque con más o menos hincapié— la resolución de problemas como objetivo educativo. Pero esto se ha hecho de la siguiente manera:

- se enseña un algoritmo (el cual en realidad constituye la prioridad de la enseñanza) y, una vez conocido y dominado se procede a aplicarlo para resolver problemas.

Esta postura puede verse, por ejemplo, en programas de los años cuarenta. Ahí se sugería al profesor anotar: el tema y los puntos esenciales en que pudiera dividirse; los ejemplos necesarios para la explicación del tema; y los ejercicios prácticos que habrían de proponerse como aplicación de los puntos explicados.

Si entendemos los **ejercicios prácticos** como problemas, veremos que efectivamente, la idea que sostiene las recomendaciones es la pedagogía del **aprendo, luego aplico**.

- en un enfoque más moderno, se enseña un contenido a partir de un problema cuya solución es explicada por el manual y el profesor y, una vez resuelto tal problema, se procede a resolver otros similares con el procedimiento que el manual y el profesor señalaron al alumno.

La idea que fundamenta este último enfoque implica un importante avance en relación con el anterior y es la siguiente: al enseñar una operación en el contexto de un problema, se le da significado desde el momento en que el niño tiene contacto con ella.

Esta idea aparecería en los programas utilizados durante los años sesenta y se ha conservado hasta en los vigentes.

Estos enfoques tienen entre sí muchas diferencias. Tienen sin embargo, un elemento común que interesa destacar:

Los saberes iniciales de los niños no constituyen un elemento que hay que considerar en la clase.

Las ideas que se habrán percibido en este libro, y que en alguna medida son también respuesta a estas posturas, pueden resumirse en las siguientes frases:

En aritmética y en matemáticas, no se trata ya de enseñar un concepto, un algoritmo o una estrategia de resolución como primer paso del aprendizaje (aún estando inmersos en una situación-problema). Se trata más bien de una inversión: utilizar como instrumentos de resolución los saberes con que cuentan los alumnos y, a partir de su utilización como instrumento, proceder a su ampliación, enriquecimiento y formalización como conocimiento matemático.

Una tarea central para el maestro, derivada de este enfoque, será conocer los saberes con que cuentan sus alumnos al iniciar la clase o...mejor dicho...dejarlos poner en marcha esos saberes, por ejemplo empezando la clase con un problema novedoso que ellos resolverán sin que les digamos cómo...ante la situación-problema, ellos harán aflorar los saberes pertinentes.

Por supuesto, los problemas no tendrán que ser demasiado difíciles, tan difíciles que los niños no cuenten con el mínimo de saberes que les permita abordarlos; tampoco deberán ser demasiado fáciles, tan fáciles que al no implicar ninguna novedad sean poco motivantes y además no traigan a los niños ningún beneficio educativo al no promover la construcción de nuevas conceptualizaciones.

Pero ahí no termina la tarea para el maestro porque, según lo que hemos dicho, poner un problema novedoso es apenas el principio...

Entonces, ¿qué tenemos que enseñar?

Vimos, a lo largo de este libro, que los niños son capaces de resolver problemas utilizando conocimientos y estrategias que han desarrollado total o parcialmente fuera de la escuela. Inclusive, observamos en algunos problemas la preferencia por estrategias no escolares, aún contando con las escolares.

Y es que los saberes matemáticos que se construyen fuera de la escuela pueden ser sorprendentes. Tal es el caso de muchos analfabetos que, sin haber asistido nunca a un salón de clases, nos recuerda que la vida también es una escuela. Por ejemplo don José, un hombre de 67 años, en una ocasión nos decía:

"El que no sabe, cuenta con las manos...o sea también para contar de a 10 empieza de aquí para acá (del meñique al pulgar)...10, 20, 30, 40, 50...o sea \$50 se



cuenta aquí (en la mano) ...o sean 50 centavos...o lo mismo si fuera a contar sumas grandes igualmente puede usted contar con las manos. O sea aquí (en la mano abierta) determina usted \$50 000..."

Y don José es capaz de resolver problemas que implican divisiones como, $3\overline{)840}$ o $12\overline{)200}$ o multiplicaciones como 12×36 o 17×18 . Aunque resolvía los cálculos de forma distinta a como se enseña en las escuela.

Otros analfabetos nos contaron cómo hacen sus cuentas; nos mostraron que saben hacer muchas; que las hacen de manera sistemática, y que nunca se equivocan al escoger la operación que permite resolver un problema.

Podemos decir, entonces, que muchos conocimientos matemáticos, y en particular las operaciones aritméticas y sus algoritmos, son un bien cultural antes que un conocimiento formal; no es necesario ir a la escuela para aprender a resolver problemas con ellas.

Claro que con la interacción y el uso los saberes se acrecientan y consolidan, pero tales conocimientos se encuentran en menor o mayor medida, quizá apenas como esbozos, en todos los niños cuando llegan a la escuela, aún en los más pequeños.

Estos conocimientos avanzan con el tiempo; se desarrollan en la calle, en los juegos, al ayudar en las compras o al vender...y llegan a constituir un sistema de cálculo mental que desafortunadamente la escuela no aprovecha.

Nosotros vimos que para resolver problemas en la clase, los niños no utilizan los saberes y estrategias distintas a las escolarizadas, si no es porque lo solicitamos explícita y reiteradamente. Han formado dos sistemas independientes de cálculo: el uno no alimenta ni apoya al otro. Y es que...en la escuela colaboramos con esta separación.

Un formato para resolver problemas que muchos maestros plantean a sus alumnos es el siguiente:

DATOS	OPERACIONES	RESULTADO
-------	-------------	-----------

Y las rayitas, los dibujos, los tanteos de los niños, ¿en dónde los ponen? Esos no caben en tal esquema. Tal vez este esquema, además de eliminar de las tareas escolares las soluciones alternativas, ayuda a promover la idea de que éstas son incorrectas.

¡Y los niños ocultan sus tanteos, y sus dibujos, y sus cálculos alternativos, en vez de dialogar y aprender con base en ellos!

Seguramente será más provechosa la sesión de matemáticas si los niños utilizan sus saberes y sus estrategias para resolver los problemas que les presentamos pues, como

hemos visto en este libro, **el acercamiento a los nuevos saberes se hace con base en las conceptualizaciones y saberes del que intenta comprender lo nuevo.**

Pero, entonces, ¿se trata de que no enseñemos nada?, ¿basta con **poner en situación de aprendizaje** a los alumnos? Sin duda, una salida fácil sería esa pero, como dijimos antes, eso es sólo el principio porque los saberes de los alumnos deben evolucionar y enriquecerse y porque los conocimientos matemáticos son también un lenguaje preciso y sintético que permite generalizar y ser eficiente. A la escuela le corresponde intervenir en estas dos tareas.

Sabemos que a muchos analfabetos, la experiencia de vida les ha permitido construir y generalizar muchos saberes matemáticos. Esas personas son capaces de utilizar en diversos contextos y con diversos números sus saberes y estrategias. Sin embargo, para muchos otros, sus conocimientos y estrategias permanecen ligados a las situaciones que los generaron. Estos adultos son capaces de resolver sólo situaciones similares a aquéllas que han enfrentado en su cotidianeidad.

En los niños también ocurre lo anterior. Por ejemplo, las estrategias **descriptivas** que utilizan para dividir, permanecen ligadas a la situación particular y son una simulación de ésta. Las estrategias *más naturales* para resolver problemas de proporcionalidad, tales como **la duplicación o la búsqueda del valor unitario**, muestran sus límites en muchas situaciones.

Algo parecido ocurre con las otras estrategias espontáneas: casi siempre encuentran una limitante. Piénsese, por ejemplo, en el dibujo que tendrían que hacer los niños si les pidiéramos calcular las parejas posibles entre las 375 niñas y los 412 niños de la escuela, sin contar con el algoritmo formal.

En muchos casos no es sino el modelo formal el que permite llegar a la solución. Pero el modelo formal no sólo sirve para lograr soluciones eficientes, también permite identificar y definir clases de problemas y pensar y hablar de los conceptos y problemas en forma precisa y sintética. En el caso de la **variación proporcional directa**, por ejemplo, los niños que resolvieron acertadamente todos los problemas que planteamos fueron los que manejaban la regla de tres. Aún cuando en el problema **puntos** se hubiesen auxiliado con la elaboración de tablas, finalmente estos niños nos decían: **éste también es de regla de tres.**

En otras palabras: **no debemos confiarnos demasiado.** Estos conocimientos son frecuentemente parciales, inestables, frágiles y, sobre todo, particulares, es decir, dependientes del contexto en el cual se generan y siempre presentan un límite (por ejemplo cuando se tiene que trabajar con números grandes).

La **visión desde lo alto**, sólo puede proporcionarla el algoritmo formal, en tanto que modelo general que resuelve las situaciones particulares.

El desafío, sin embargo, será llegar a ese modelo no por simple comunicación del mismo, sino a partir de la descontextualización paulatina de los saberes y estrategias con que cuentan los alumnos.



En esta perspectiva, el conocimiento matemático inicialmente será un instrumento de resolución. En ese momento los saberes con que cuentan los alumnos tendrán un papel principal. Será el momento de resolver problemas para adaptar los saberes que ya tienen los niños y para ampliarlos y enriquecerlos.

Sin embargo, hemos de hacer evolucionar dicho saber: por ejemplo planteando problemas con números más grandes y con distintos contenidos, y mediante la confrontación de resultados y estrategias. Una vez descontextualizado, reflexionado y enriquecido, este saber podrá convertirse en un objeto de conocimiento, es decir, en un conocimiento que toma un lugar en el edificio del saber organizado.

En este momento el lenguaje matemático tiene un papel fundamental. El papel del profesor será en buena medida el de ayudar a los niños a traducir las estrategias y conceptualizaciones al lenguaje matemático formal.

En una dinámica como ésta, aparecerán sin duda muchos caminos y estrategias. Esto, lo sabemos, muchas veces inquieta a los maestros. Pero el maestro ha de tener presente que el grupo es una instancia educadora: confrontar lleva a los niños a aclarar, a reconstruir, a desechar, a unificar, a avanzar...

Nos detenemos ya con estas reflexiones; sólo expresaremos, para terminar, tres ideas que nos acompañaron mientras escribíamos este libro:

Enseñar aritmética es fundamentalmente poner en situación de resolver problemas, es ampliar las concepciones de los niños, es también enriquecer y formalizar los saberes que construyen.

Elegir las situaciones y problemas adecuados será posible únicamente si conocemos las concepciones de los niños, la dificultad de las tareas, los obstáculos que encuentran en la construcción de los conceptos, la gama de estrategias con que cuentan y las representaciones que se hacen de los problemas que planteamos.

Esto sólo podremos conocerlo si los escuchamos. ¡Dejémoslos que nos cuenten lo que piensan, lo que intuyen, lo que sienten...!

Los niños también cuentan se terminó de imprimir
en el mes de diciembre de 1995,
en los talleres de Gráficas Monte Albán S.A de C.V.
Fracc. Ind. La Cruz, El Marqués, Qro.
Tel. (427) 75 200 Fax 75 112

Se tiraron 5, 000 ejemplares,
más sobrantes para reposición.



153323

SEP

BIBLIOTECA DEL MAESTRO