

# Quipu y yupana, instrumentos matemáticos incas (I)



Una de mis pasiones, en relación con la historia de las matemáticas, es la lectura sobre los diferentes sistemas de numeración, las distintas aritméticas y, en general, las matemáticas que han desarrollado los diferentes pueblos, las diferentes culturas, de todo el planeta, a lo largo de la historia de la humanidad.

Por una parte, cada pueblo ha desarrollado unas matemáticas muy particulares, relacionadas con su propia identidad, con su forma de vida, con el lugar y el tiempo en el que se han existido, con sus circunstancias concretas, lo que hace que estas matemáticas tengan sus propias características, diferentes de las de los demás pueblos. Sin embargo, al mismo tiempo podemos observar cómo existe una parte esencial de dichas matemáticas que es muy similar en todas las culturas, como si de alguna forma cada una inventara su propio descubrimiento de unas matemáticas ya existentes.



Tabla babilónica de multiplicar del 9, en base 60, encontrada en Nippur, del periodo 1400-1100 a.C. Colección Hilprecht, Universidad de Jena, Alemania

Las siguientes entradas de la sección *Matemoción* del *Cuaderno de Cultura Científica* me gustaría dedicarlas a conocer un poco sobre las matemáticas de los incas, y más concretamente, sobre su sistema de numeración y su aritmética.

El imperio inca –llamado *Tawantinsuyu*, “las cuatro regiones” en la lengua Quechua– se fundó aproximadamente hacia el año 1200 d.C. y estaba en su máximo apogeo cuando los conquistadores españoles, dirigidos por Francisco Pizarro (1478-1541), iniciaron la conquista de Perú, que acabaría con la anexión del imperio Inca a España. En ese momento, el imperio Inca se extendía de norte a sur de la zona del Pacífico de América del Sur, desde las actuales Argentina y Chile hasta Bolivia, Ecuador y Perú, alcanzando una extensión de unos 2.000.000 de kilómetros cuadrados.

Los conocimientos que hoy en día tenemos de la cultura incaica, y en particular, los de carácter científico y técnico, nos han llegado a través de las diferentes crónicas que se escribieron en la época por parte de cronistas “españoles” (algunos indígenas al servicio del imperio español), como Felipe Guamán Poma de Ayala (1534-1615), Gómez Suárez de Figueroa, apodado como Inca Garcilaso de la Vega (1539-1616), Pedro Cieza

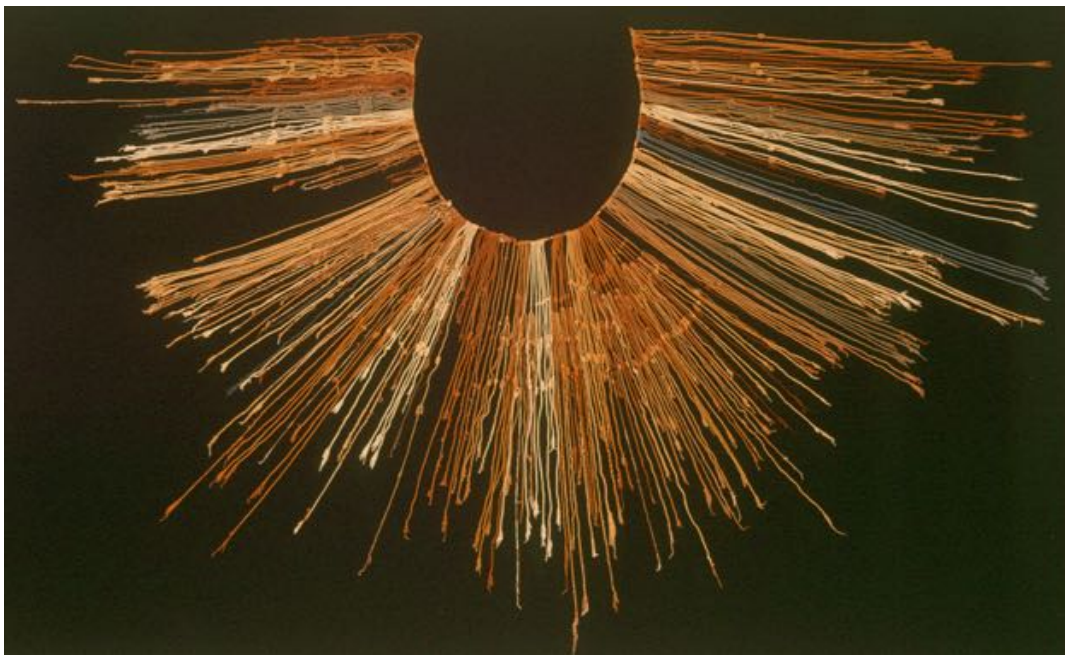
de León (1520-1554) o Martín de Murúa (1525/1540-1616/17).



Portada de la obra «Nueva corónica i buen gobierno» (1615), de Felipe Guamán Poma de Ayala

Pero centrémonos en las matemáticas del pueblo inca. Su sistema de numeración era, como para muchos otros pueblos que utilizaron sus manos para empezar a desarrollar el concepto de número y su aritmética, decimal. Además, era un sistema posicional, como nuestro sistema de numeración indo-arábigo, con la característica especial de que los números se representaban, como veremos, por medio de cuerdas, de los quipus.





Quipu inca del Museo Larco, de Lima (Perú), sobre el 1400 d.C. Fotografía: Claus Ableiter / Wikimedia Commons

El sistema decimal no solamente se utilizó para representar los números, sino que se utilizó como parte de la organización social del imperio. En la base de la estructura social estaban los *puric*, que eran los indios trabajadores, que además eran los que tributaban (campesinos, ganaderos, artesanos y soldados). Los *purics* se organizaban en grupos de diez (10), una *cancha*, que estaban bajo el mando de un *cancha-camayo*. A su vez, cada diez *cancha-camayos*, eran supervisados por un capataz, o *pachaca-curaca*, que tenía bajo su mando, a través de los 10 *cancha-camayos*, a 100 trabajadores, una *pachaca*.

Subiendo un poco más en la pirámide estaban los supervisores, *guaranca-curacas*, de una decena (10) de *pachaca-curacas*, una centena (100) de *cancha-camayos* y un millar (1.000) de indios tributarios, lo que se conocía como una *waranqa*. Y seguía la jerarquía, cada responsable con el control de diez personas de un rango inferior al suyo, con el *huno-curaca* o jefe de la tribu, con un total de 10.000 *purics*, lo que se conocía como un *huno*, a su cargo.

Por encima del *huno-huraca* estaba el gobernador de la provincia y más arriba el mandatario de cada uno de los cuatro cuarteles en los que se dividía el imperio. Y arriba de la gran pirámide estaba el *Inca*, el soberano del imperio inca.

Por ejemplo, en el texto *Historia Natural y Moral de las Indias*, del jesuita José de Acosta (1540-1600), podemos leer el siguiente párrafo:

“...es de saber que, la distribución que hacían los Incas de sus vasallos era tan particular, que con facilidad los podían gobernar a todos, siendo un reino de mil leguas de distrito, porque en conquistando cada provincia, luego reducían los indios a pueblos y comunidad, y contábanlos por parcialidades, y a cada diez indios ponían uno que tuviese cuenta con ellos, y a cada ciento, otro, y a cada mil, otro, y a cada diez mil, otro, y a éste llamaban Huno [huno-curaca], que era cargo principal; y sobre todos éstos en cada provincia un gobernador del linaje de los Incas, al cual obedecían todos, y daba cuenta cada un año de todo lo sucedido por menudo; es, a saber, de los que habían nacido, de los que habían muerto, de los ganados, de las sementeras.”



Dibujos de Cinchiroca, segundo Inca del imperio, y de su mujer Chympo Coya, del libro «Historia General del Perú. Origen y descendencia de los incas» (1616), del fraile vasco Martín de Murúa. Digital image courtesy of the Getty's Open Content Program

Efectivamente, el sistema de numeración de los incas era decimal, como lo confirma, por ejemplo, el cronista Felipe Guamán Poma de Ayala en su texto *Nueva corónica i buen gobierno* (1615), al referirse a los quipu-camayos, los funcionarios de imperio que manejaban los quipus, dice así:

*“...numeran de cien mil y de diez mil [y de mil] y de ciento y de diez hasta llegar a uno.”*

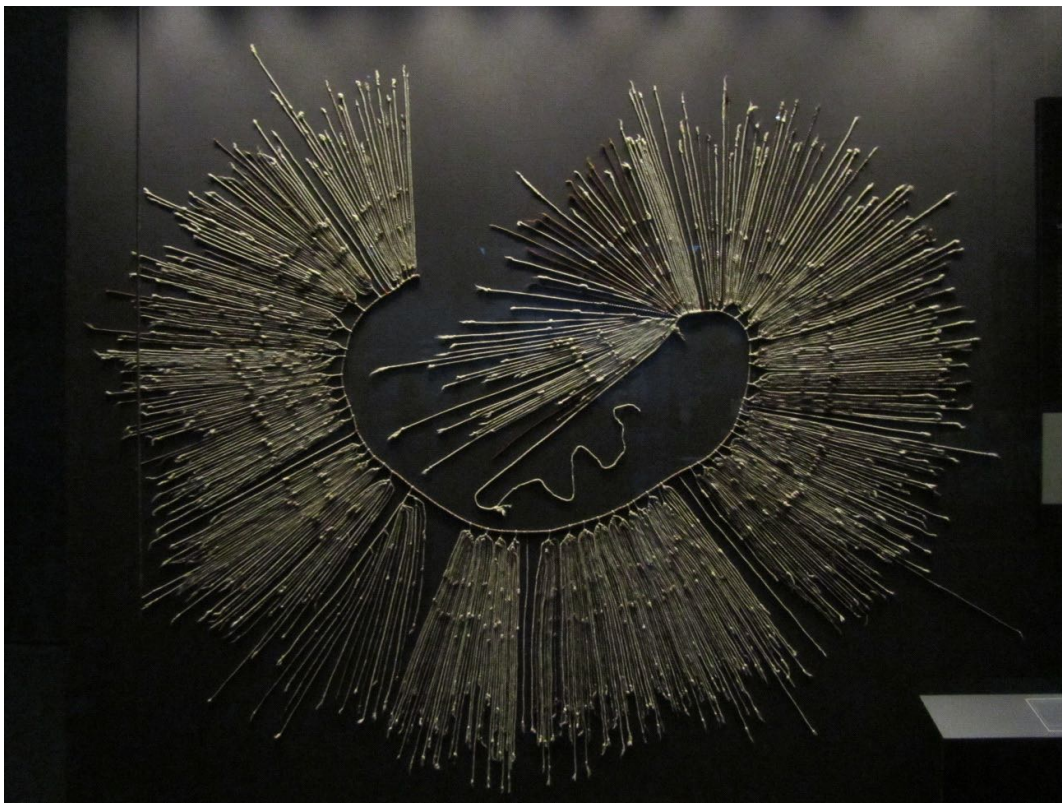
Y también explica cuáles son las palabras utilizadas en la lengua Quechua para designar a los números:

*“Suc [uno], yscay [dos], quinza [tres], taua [cuatro], pichica [5], zocta [6], canchis [7], puzac [8], yscon [9], chungá [10], yscay chungá [20], quinza chungá [30], taua chongá [40], pisca chungá [50], zocta chungá [60], canchis chungá [70], pozac chungá [80], yscon chungá [90], pachaca [100], uaranga [1000].*

*Chunga uaranga [10000][es un]huno, pachaca huno [100 x 10000], uaranranga [sic] huno [1000 x 10000], pantacac huno [incontable]”*

Los incas utilizaban un dispositivo con cuerdas, el quipu (palabra que en Quechua significa “nudo”), para representar los números. Pero el quipu era más que un sistema de escritura numérica, era un instrumento para registrar información, como datos estadísticos relacionados con los datos de censo, la contabilidad tributaria, registros económicos y de producción, e informaciones numéricas similares relacionadas con el imperio Inca y su gobierno, que permitía conservar de forma duradera dichas informaciones numéricas.





Quipu del Museo Chileno de Arte Precolombino, como nos cuenta Marta Macho en su entrada [El quipu: ¿algo más que un registro numérico?](#), “contiene 586 cuerdas organizadas en 8 sectores de 10 conjuntos de cuerdas, cada uno con hasta 13 niveles de información; almacena 15.024 datos cuyo significado se desconoce”. Fotografía de Inés Macho

Los Quipus podrían registrar también otro tipo de informaciones, como información histórica, poemas y canciones, genealogías, temporales, o incluso funcionar como calendario. Como podemos leer en el mencionado texto de José de Acosta:

*“Fuera de esta diligencia, suplían la falta de escritura y letras, parte con pinturas, como los de Méjico, aunque las del Perú eran muy groseras y toscas; parte, y lo más, con quipos. Son quipos unos memoriales o registros hechos de ramales, en que diversos nudos y diversos colores significan diversas cosas. Es increíble lo que en este modo alcanzaron, porque cuanto los libros pueden decir de historias, y leyes, y ceremonias y cuentas de negocios, todo eso suplen los quipos tan puntualmente, que admiran. Había para tener estos quipos o memoriales oficiales diputados, que se llaman hoy día Quipocamayo, los cuales eran obligados a dar cuenta de cada cosa, como los escribanos públicos acá, y así se les había de dar entero crédito; porque para diversos géneros, como de guerra, de gobierno, de tributos, de ceremonias, de*

tierras, había diversos quipos o ramales; y en cada manojo de estos nudos y nudicos y hilillos atados, unos colorados, otros verdes, otros azules, otros blancos, y finalmente tantas diferencias, que así como nosotros de veinte y cuatro letras, guisándolas en diferentes maneras, sacamos tanta infinidad de vocablos, así éstos de sus ñudos y colores sacaban innumerables significaciones de cosas.”

Y como dice el texto de José de Acosta, los funcionarios del imperio encargados de manejar los quipus eran los quipucamayos, que tenían como trabajo construir los quipus, registrar las informaciones e informar de las mismas (es decir, interpretar los quipus) a los gobernantes. Había distintos quipucamayos que se dedicaban a recoger diferentes tipos de informaciones.



Dibujo de un quipucamayo, de hecho, el “contador mayor y tesorero” que informaba directamente al Inca, del libro «Nueva corónica i buen gobierno» (1615), de Felipe Guamán Poma de Ayala, que aparece con los dos instrumentos



Cada aldea, provincia, región tenía sus propios quipucamayos. Los gobernantes utilizaban estas informaciones para el gobierno de aldeas, provincias, regiones o todo el imperio inca. Como escribe el cronista Poma de Ayala “con los cordeles gobernaban todo el reino”.

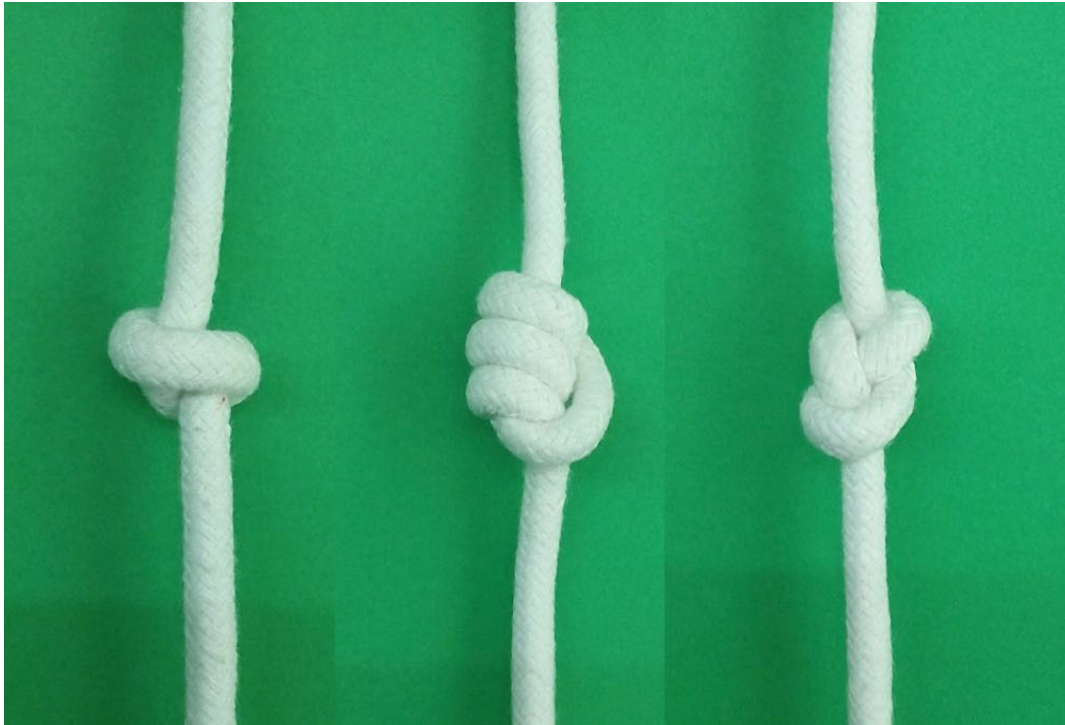


Dibujo “los depósitos del inca”, del libro «Nueva corónica i buen gobierno» (1615), de Felipe Guamán Poma de Ayala, en el que se ve al administrador de los depósitos del inca, con un quipu en las manos, haciendo inventario del contenido de los depósitos ante el décimo Inca Topa Ynga Yupanqui

Los quipus eran cuerdas, normalmente fabricadas con algodón o fibra de camélido (obtenida de las llamas y alpacas), que solían constar de una cuerda principal, que era la columna vertebral del quipu, del que colgaban, anudadas a la cuerda principal, una serie de cuerdas colgantes sobre los que se realizaban los nudos que representaban los

números. De estas cuerdas colgantes podían a su vez colgar otras cuerdas colgantes secundarias o incluso podían existir cuerdas superiores.

¿Cómo se representaba un número, mediante nudos, en cada uno de las cuerdas colgantes? Existían tres tipos de nudos, los nudos simples, los nudos largos y los nudos en forma de ocho.



Ejemplos de un nudo simple, un nudo largo (triple) y un nudo en forma de 8

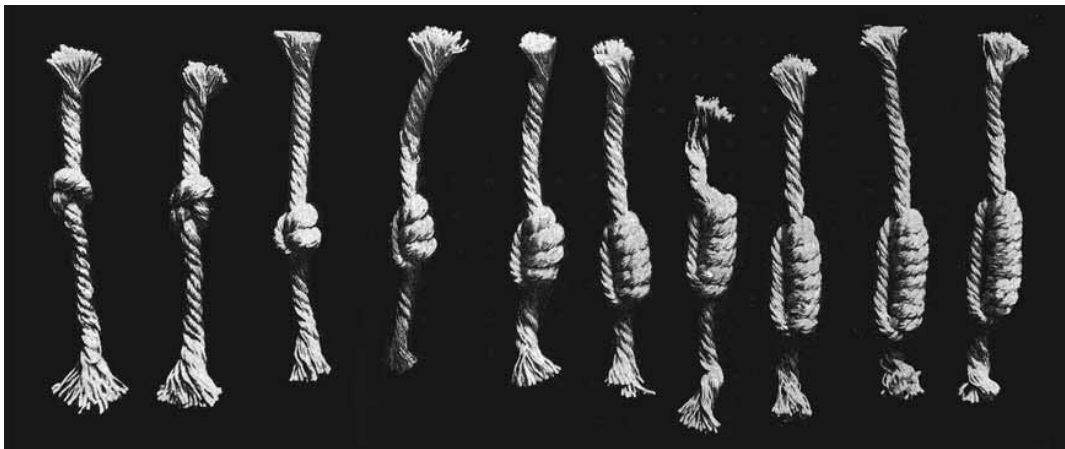


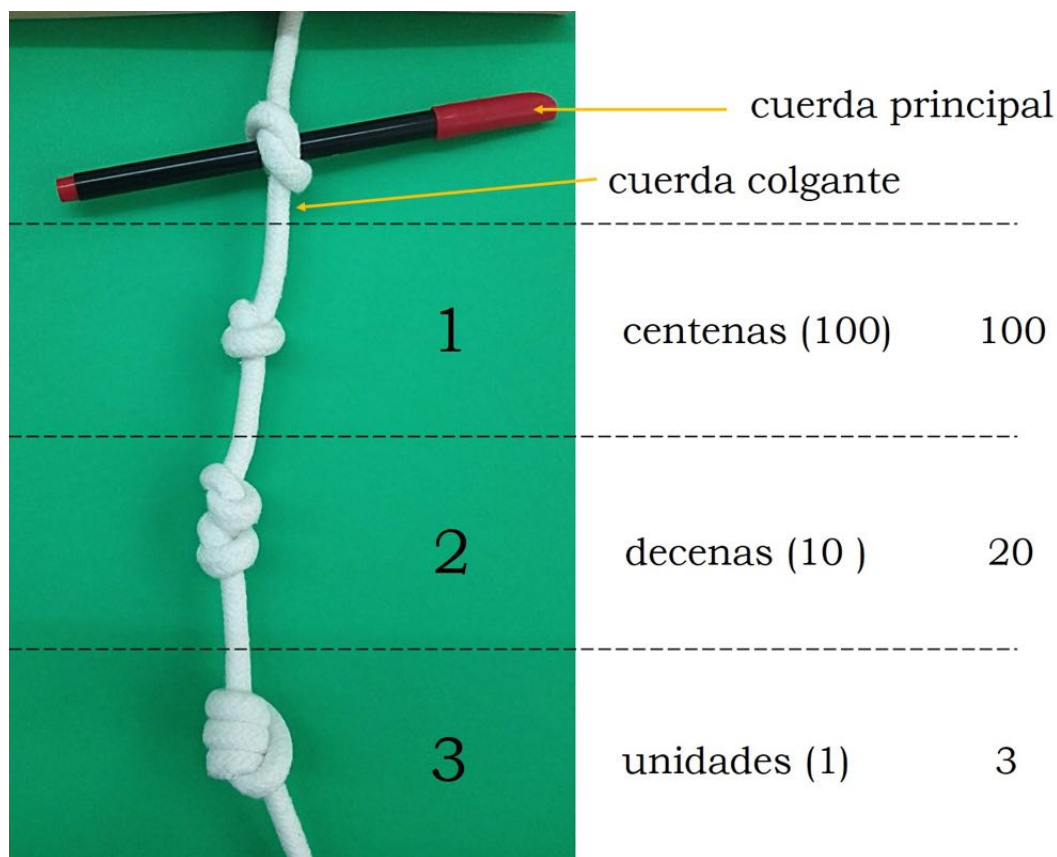
Imagen con una secuencia de nudos que se inicia con dos nudos simples, realizados en las dos direcciones, que representan a 1 y nudos largos de dos a nueve giros, que representan a las cifras del 2 al 9, del artículo «Q'eros: a Study in Survival» –Natural History Magazine 1957–, de John Cohen

El nudo con forma de 8 representa al 1, pero solamente en la que va a ser la zona o posición de las unidades, los nudos largos representan los números del 2 al 9, en la zona de las unidades, y cada uno de los nudos simples representa una unidad en las posiciones de las decenas, centenas, millares, etcétera, de forma que si queremos representar cualquier cifra del 1 al 9 en una de estas zonas se hacen tantos nudos simples como indique la cifra, por ejemplo, 5 nudos para la cifra 5.

En la cuerda colgante en la que queremos representar nuestro número se marcan zonas numéricas equidistantes en función de las necesidades. La zona de las unidades sería la zona más alejada de la cuerda principal, la siguiente zona, hacia la cuerda principal, serían las decenas, la siguiente las centenas y así hasta la cantidad de zonas que se necesiten para representar nuestro número.

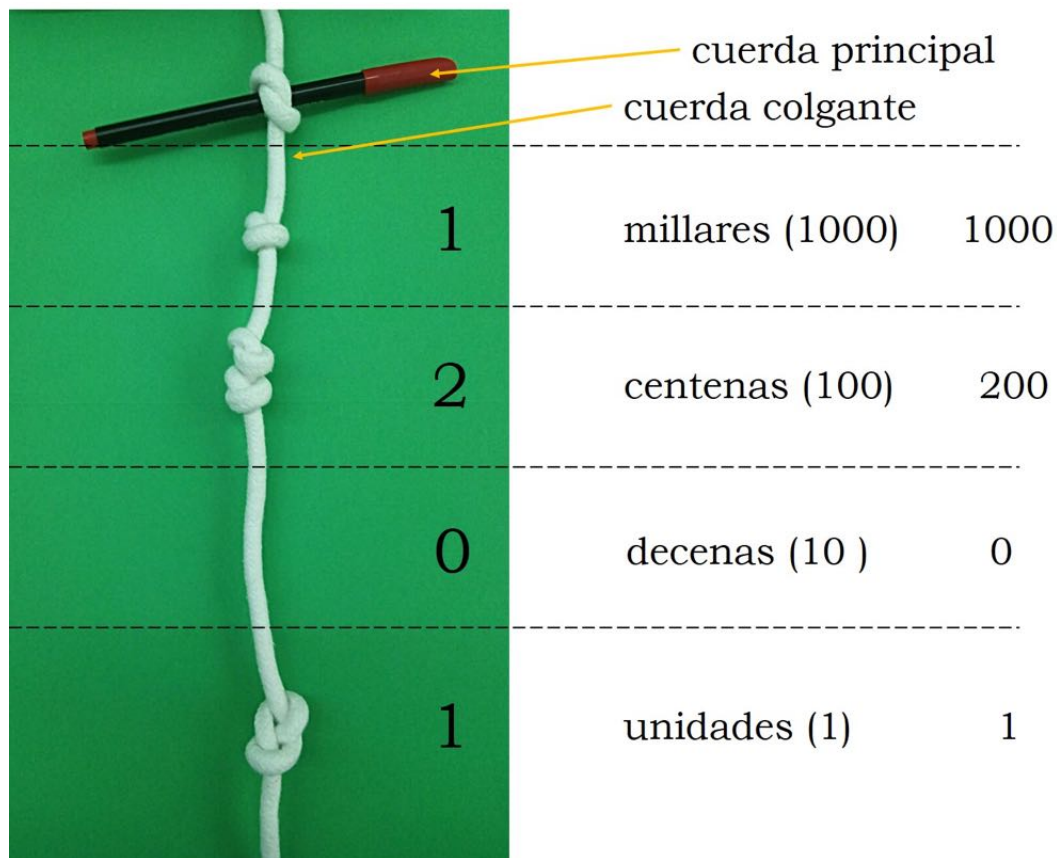
En el siguiente ejemplo de cuerda colgante de un quipu que he simulado, el número representado es el 123, ya que, en la zona más baja, por lo tanto la de las unidades, hay un nudo largo triple, luego nos marca un 3 en las unidades, en la siguiente zona, la de las decenas, tenemos dos nudos simples, luego nos marca un  $2 \times 10 = 20$ , y en la zona más cercana a la cuerda principal, la de las centenas en este caso, hay un nudo simple, luego marca un  $1 \times 100 = 100$ , y el número representado es el  $3 + 20 + 100 = 123$ .





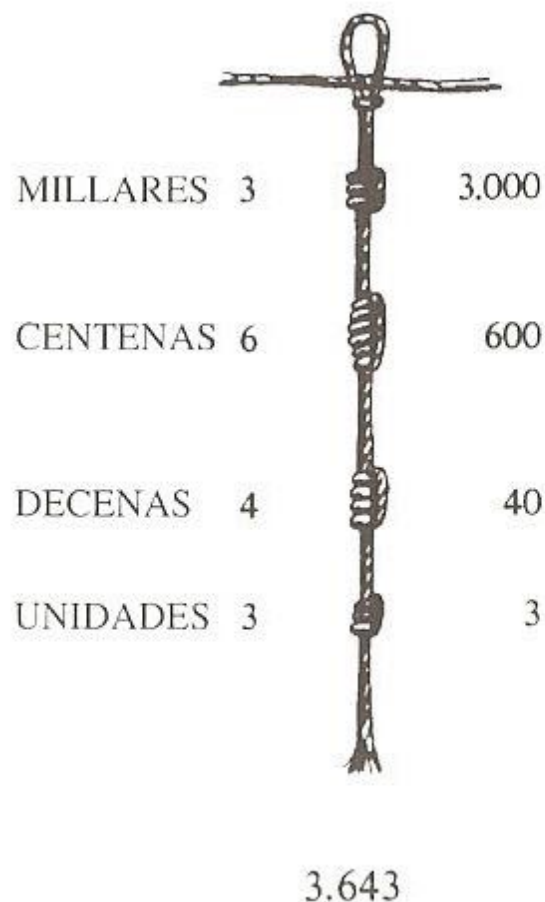
Representación del número 123 en un quipu simulado, con un nudo largo triple en las unidades, dos nudos simples en las decenas y un nudo simple en las centenas

No existía una cifra específica para el cero, pero los incas sí eran capaces de utilizar el vacío en la cuerda para representar que en esa posición no había ningún valor, es decir, se correspondía con el valor cero. Lo cual es esencial para cualquier sistema posicional, como pueda ser este o el indo-arábigo. En el siguiente ejemplo hemos representado el número 1.201, ya que en la zona de las unidades hay un nudo de 8, luego toma el valor 1, en la zona de las decenas no hay nudo, por lo tanto, el valor cero, en la zona de las centenas hay dos nudos simples, luego toma el valor  $2 \times 100 = 200$ , y en la zona de los millares hay un nudo simple, esto es,  $1 \times 1.000 = 1.000$ , luego el número representado en este quipu simulado es el  $1 + 200 + 1.000$ , es decir, el número representado por 1.201 en nuestro sistema de numeración indo-arábigo.



El hueco vacío en la zona de las decenas indica que no hay decenas, y el número representado es el  $1 + 200 + 1.000 = 1.201$

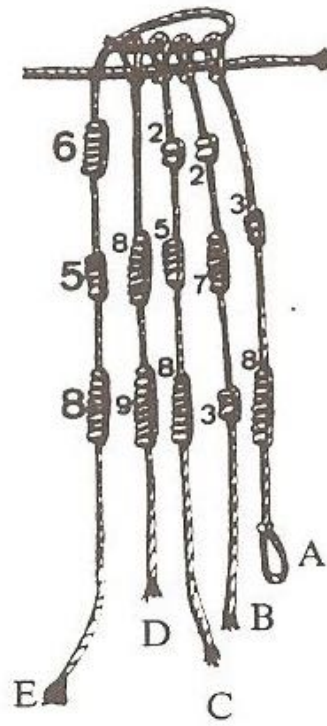
En algunos quipus no solo se utilizan los nudos largos en la posición de las unidades, sino también para las demás posiciones, decenas, centenas, millares, etcétera. Por ejemplo, el número representado en el siguiente dibujo de un quipu, del magnífico libro de Georges Ifrah *Historia universal de las cifras*, es el 3.643, puesto que hay un nudo largo triple en las unidades (3), un nudo largo cuádruple en las decenas (40), un nudo largo séxtuple en las centenas (600) y un nudo largo triple en los millares (3.000).



Representación en una cuerda colgante de un quipu del número 3.643

Un grupo de cuerdas colgantes podía estar unido para representar una serie de cantidades (con el valor que tuviesen estas, número de personas, cabezas de ganado, etcétera) y su suma, como en la imagen siguiente. Las cuerdas A, B, C y D representan los valores, 38, 273, 258 y 89, respectivamente, y la cuerda colgante E, que engancha a las otras, representa la suma de estas cantidades  $658 = 38 + 273 + 258 + 89$ .



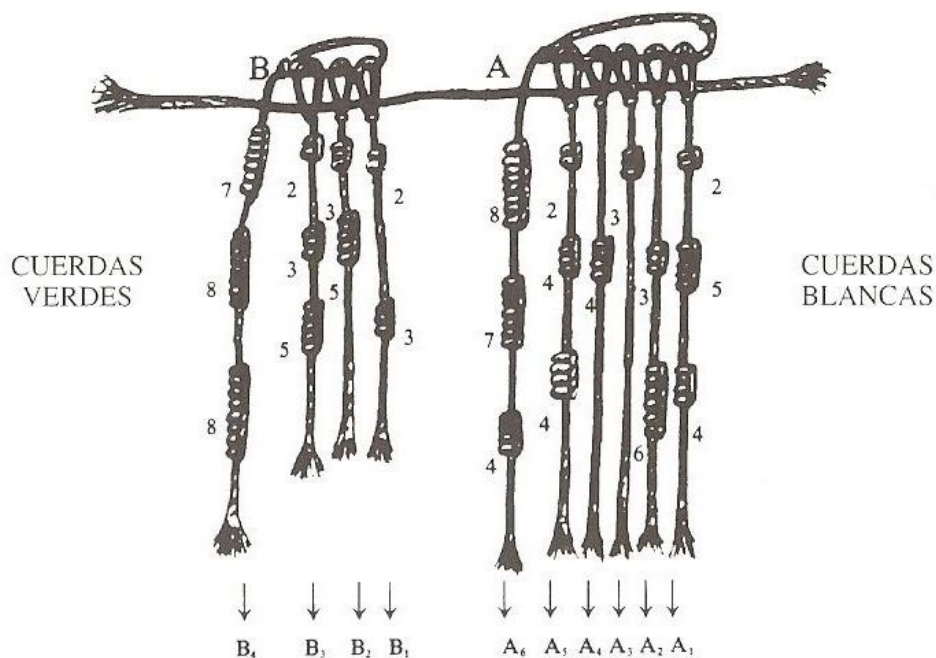


$$A = 38 \quad B = 273 \quad C = 258 \quad D = 89$$

$$E = A + B + C + D = 658$$

Haz de cuerdas colgantes que recogen una serie de cantidades y su suma,  $658 = 38 + 273 + 258 + 89$ . Del libro «Historia Universal de las Cifras»

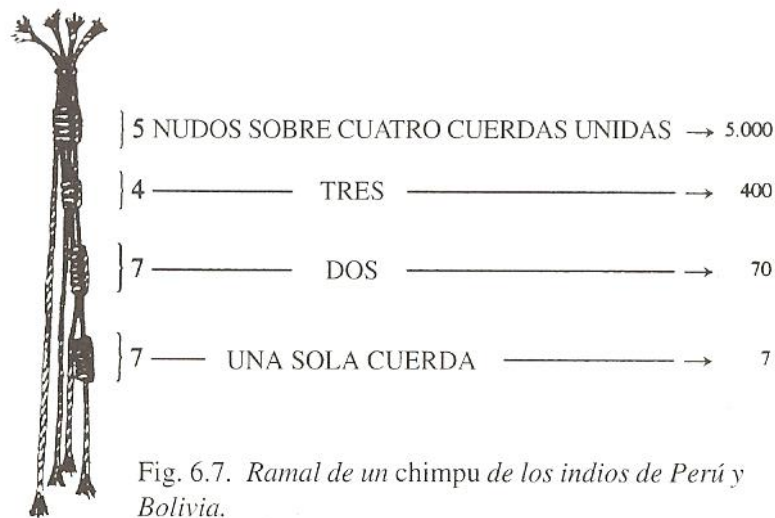
Comenta Georges Ifrah que en el siglo XIX los pastores de las altiplanicies peruanas todavía registraban el número de animales mediante los quipus. Y presenta el siguiente ejemplo. Con cuerdas blancas (derecha en la imagen) se registraba el ganado caprino y ovino, en la primera cuerda las ovejas (254 en el ejemplo), en la segunda los corderos (36), en la tercera las cabras (300), luego los cabritos (40), los carneros (244), etcétera, cuyo total se recogía en la cuerda de enganche (874 cabezas de ganado caprino y ovino). Con las cuerdas verdes registraban el ganado bovino, en la primera cuerda los toros (203), en la segunda vacas lecheras (350), en la tercera vacas estériles (235), etcétera, y en la cuerda de enganche el total (788).



Ejemplo de quipu utilizado por los pastores de las altiplanicies peruanas, en el siglo XIX, para el recuento de ganado caprino y ovino, con cuerdas blancas, y de ganado bovino, con cuerdas verdes. Del libro «Historia Universal de las Cifras»

Como en el ejemplo anterior, de los pastores peruanos, el color de los quipus tenía diferentes significados. Por ejemplo, en el libro *Antigüedades peruanas*, de M. E. Rivero y J. D. de Tschudi, se explica que, por ejemplo, el rojo significaba un soldado o guerra, el amarillo, oro, el blanco, plata o paz, el verde, trigo o maíz, etcétera.

Incluso hoy en día, los indios de Bolivia y Perú siguen utilizando un sistema para registrar números emparentado con el quipu, cuyo nombre es el chimpu. Cada número está representado en un manojo de cuerdas, los nudos atados sobre una sola cuerda son las unidades, los nudos atados sobre dos cuerdas son las decenas, sobre tres cuerdas las centenas, sobre cuatro los millares, y así hasta la potencia de 10 que se necesite para cada número. En el siguiente ejemplo, que representa el número 5.477, los 7 nudos (o nudo largo de grado 7) que está más abajo, y que están sobre una sola cuerda, representan las unidades, los siguientes 7 nudos, que juntan dos cuerdas, son las decenas, después vienen las centenas, que son 4 nudos atados sobre tres cuerdas y, por último, 5 nudos atados sobre las cuatro cuerdas los millares.



Ejemplo de chimpu, descendiente del quipu, de Bolivia y Perú. Del libro «Historia Universal de las Cifras»

El quipu es un sistema de representación de los números basado en los nudos con cuerdas que utilizaron los incas, sin embargo, no es el único sistema de representación con nudos y cuerdas que ha existido. Han existido otros muchos ejemplos desde la antigüedad, ... *“pero esa es otra historia y debe ser contada en otra ocasión”*.

En mi siguiente entrada de la sección *Matemoción* hablaré sobre la yupana o ábaco inca.





La poeta y artista visual chilena Cecilia Vicuña trabaja con el concepto de quipu en sus obras. Un ejemplo es la obra «Quipu womb» –quipu matriz-, de 2017

## Bibliografía

- 1.- Georges Ifrah, *Historia universal de las cifras*, Espasa Calpe, 2002.
- 2.- George Gheverghese Joseph, *La creta del pavo real, Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Pirámide, 1996.
- 3.- Felipe Guamán Poma de Ayala, [Nueva corónica i buen gobierno](#), 1615. Versión online en la Biblioteca Real Danesa
- 4.- Diego Pareja, *Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana*, revista Integración, Departamento de Matemáticas UIS, vol. 4, n. 1, p. 37-55, 1986.
- 5.- José de Acosta, [Historia natural y moral de las Indias](#), 1589. Versión online en la Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes, 1999.

6.- Martín de Murúa, [Historia General del Perú. Origen y descendencia de los incas](#) (1616).

Versión online en Getty Publications Virtual Library

7.- Marta Macho, [El quipu: ¿algo más que un registro numérico?](#), Cuaderno de Cultura Científica, 2015

8.- Gary Urton, catálogo de la exposición [Quipu, Contar anudando en el Imperio Inka](#), Museo Chileno de Arte Precolombino y Universidad de Harvard, 2003.

9.- Mariano Eduardo de Rivero y Ustáriz, Juan Diego de Tschudi, *Antigüedades peruanas*, Viena, 1851.

10.- Página personal de la poeta y artista visual chilena [Cecilia Vicuña](#)

Sobre el autor: *Raúl Ibáñez es profesor del Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU y colaborador de la Cátedra de Cultura Científica*



7 comentarios

Publicado el [16 de mayo, 2018](#) en [Matemoción](#)

[historia de la ciencia](#)   [matemáticas](#)

Suscríbete a nuestro [boletín de noticias diario](#) para recibir artículos y otras actualizaciones.

Suscribirme

# Quipu y yupana, instrumentos matemáticos incas (II)

En mi anterior entrada en el *Cuaderno de Cultura Científica*, “[Quipu y yupana, instrumentos matemáticos incas \(I\)](#)”, estuvimos hablando del sistema de numeración inca, que es un sistema de numeración decimal y posicional, como también lo es el sistema de numeración indo-arábigo que utilizamos de forma generalizada en la actualidad, pero cuyas cifras básicas son nudos que se realizan sobre cuerdas que cuelgan de una cuerda principal en los quipus.





Quipu inca, American Museum of National History (Nueva York), División de Arqueología

Los quipus servían para representar los números, relacionados con los diferentes usos de estos instrumentos matemáticos y sociales, sin embargo, no servían para realizar operaciones aritméticas como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Como mucho podían registrar los resultados de una operación aritmética, como mostramos en la anterior entrada con la suma de cuatro cantidades y su resultado,  $658 = 38 + 273 + 258 + 89$ .

Para realizar las operaciones aritméticas utilizaban una especie de ábaco, que el cronista José de Acosta (1540-1600) menciona en su texto *Historia Natural y Moral de las Indias*, como “quipus de granos de maíz”.

“... pues verles otra suerte de quipos, que usan de granos de maíz, es cosa que encanta; porque una cuenta muy embarazosa, en que tendrá un muy buen contador que hacer por pluma y tinta, para ver a como les cabe entre tantos, tanto de contribución, sacando tanto de acullá y añadiendo tanto de acá, con otras cien retartalillas, tomarán estos indios sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí, trocarán tres de acullá, y, en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente sin errar un tilde, y mucho mejor se saben ellos

*poner en cuenta y razón de lo que cabe a cada uno de pagar o dar, que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado. Si esto no es ingenio y si estos hombres son bestias, júzguelo quien quisiere, que lo que yo juzgo de cierto es que, en aquello que se aplican, nos hacen grandes ventajas.”*

El jesuita José de Acosta nos describe la destreza con la cual los indios realizaban sus operaciones aritméticas con este instrumento de contabilidad inca, el “quipu de granos de maíz”, que hoy se conoce con el nombre de “yupana” (que procede del término quechua “yupay” que significa contar) o, simplemente, “ábaco inca”.

Sin embargo, en el texto de José de Acosta no se describe cómo es ese dispositivo para realizar operaciones aritméticas, ni cómo funciona. Otro tanto pasa en el texto *Comentarios reales de los Incas* (1609) del escritor e historiador Gómez Suárez de Figueroa (1539-1616), apodado el Inca Garcilaso de la Vega, que también se maravilla con el manejo que tenían del ábaco al decir que “*hacían las cuentas con piedrezuelas y las sacaban tan ajustadas y verdaderas...*”. En dicho texto también menciona que los indios sabían mucho de geometría y de aritmética.



Yupana de piedra tallada (1400 – 1532 d.C.), del Museo Nacional de Arqueología, Antropología e Historia de Perú.

Fotografía de Daniel Giannoni



Pero respecto al instrumento para realizar esos cálculos, el ábaco inca o yupana, solo es mínimamente descrito en dos fuentes de la época. La primera es la *Historia del Reino de Quito y crónica de la provincia de la compañía* (1789), del sacerdote jesuita Juan de Velasco (1727-1792), quien se refiere a “*ciertos archivos o depósitos hechos de madera, de piedra o de barro, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas de distintos tamaños, colores y figuras angulares*”. Se correspondería con una serie de artefactos encontrados en excavaciones arqueológicas, como el que aparece en la imagen anterior, y que se conocen como “yupanas arqueológicas”.

La otra fuente sobre la yupana es la imagen del quipucamayó que aparece en el texto *Nueva corónica i buen gobierno* (1615), del cronista Felipe Guamán Poma de Ayala, dibujado junto a los dos instrumentos matemáticos incas, el quipu y la yupana.



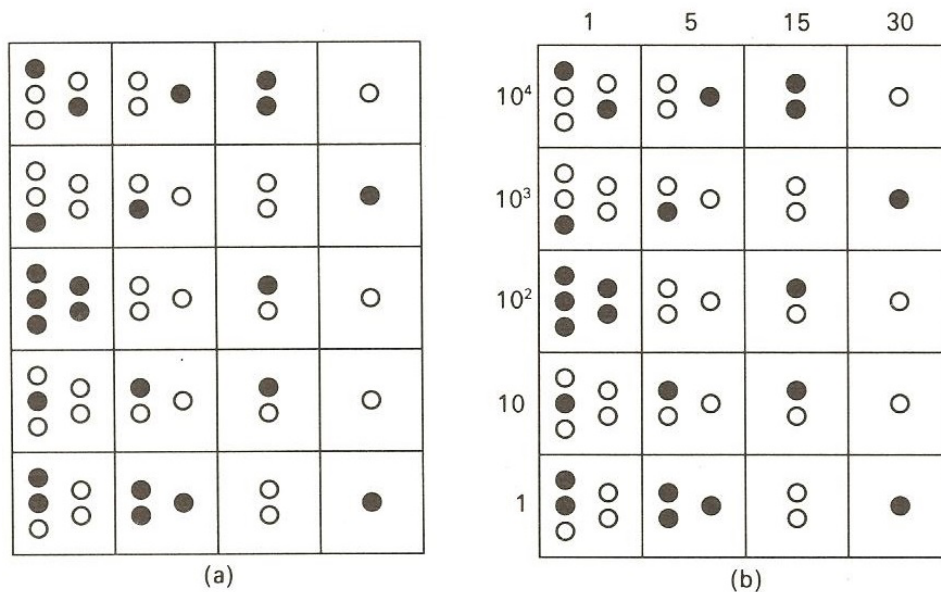
Dibujo de un quipucamayó, de hecho, el “contador mayor y tesorero” que informaba directamente al Inca, del libro «Nueva corónica i buen gobierno» (1615), de Felipe Guamán Poma de Ayala, que aparece con los dos instrumentos

Esta imagen es la única “especie de explicación” que existe sobre el ábaco inca y su funcionamiento. A partir de la misma se ha intentado reconstruir su funcionamiento, pero debido a la falta de información que supone esa única imagen, existen muchas teorías que intentan explicarlo. Veremos algunas de ellas.

En la mayoría de intentos de explicar el funcionamiento de la yupana de Poma de Ayala se considera que, de forma similar a los quipus, el sistema de numeración que está detrás de la yupana es un sistema de numeración posicional decimal. Cada una de las filas se correspondería con una de las potencias de diez, las posiciones de la representación del número, es decir, las unidades (1), decenas (10), centenas (100), unidades de millar (1.000) y decenas de millar (10.000).

La interpretación más antigua se debe al antropólogo sueco Henry Wassen (1908–1996), que aparece en su artículo *The ancient peruvian abacus* (1931). En su interpretación de la ilustración de Poma de Ayala los círculos blancos representarían huecos del ábaco en los que colocar los maíces o piedrecitas, de forma que los círculos negros de la imagen representarían huecos en los que ya se han colocado los maíces. Además, Wassen asigna a cada una de las columnas, de izquierda a derecha, los valores 1, 5, 15, 30. Es decir, cada maíz en la primera columna de la izquierda tendría el valor de 1, dentro de la posición correspondiente en función de la fila, cada maíz de la segunda columna tendría el valor 5, el valor 15 en la tercera y 30 en la última.





(a) imagen de la Yupana de Poma de Ayala e (b) interpretación de Henry Wassen. Imagen de «La cresta del pavo real»

De esta forma, la yupana representada por Poma de Ayala estaría representando al número 408.257. En la primera fila, la de las unidades, tendríamos 2 maíces en la primera columna ( $2 \times 1$ ), más tres en la segunda ( $3 \times 5$ ), ninguno en la tercera ( $0 \times 15$ ) y un maíz en la cuarta columna ( $1 \times 30$ ), en total,  $2 + 15 + 30 = 47$ . De la misma forma se realizaría el cálculo para las demás filas, obteniéndose el resultado mencionado,

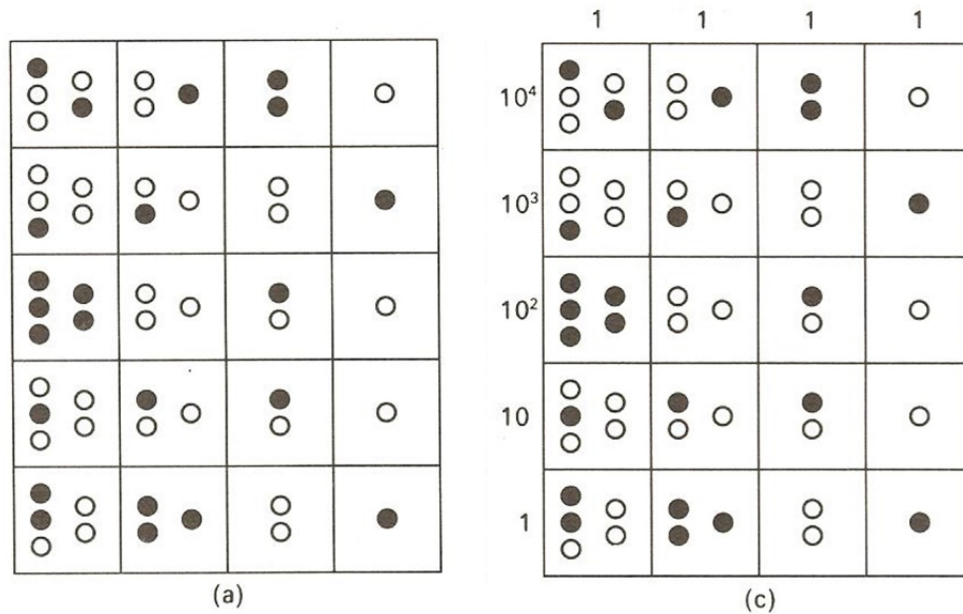
$$47 + 21 \times 10 + 20 \times 100 + 36 \times 1.000 + 37 \times 10.000 = 408.257.$$

Una de las cuestiones que llaman la atención de esta interpretación es que hay números que se pueden representar de varias formas. Por ejemplo, el número 47 mencionado antes también se podría obtener como (2, 0, 1, 1), es decir, 2 maíces en la primera columna, ninguna en la segunda, 1 en la tercera y 1 en la cuarta, frente a la representación anterior (2, 3, 0, 1). Aunque esto bien podría tener la intención de dejar espacios para manejar los maíces en el propio proceso de la operación aritmética.

Aunque una de las mayores críticas a esta interpretación de la yupana, motivo por el cual se quedaría rápidamente desfasada, es la complejidad de la misma.

George G. Joseph en su libro *La cresta del pavo real* realizó una interpretación similar,

pero más sencilla, y en su opinión más plausible que la de Wassen, de la yupana de Poma de Ayala. Para Joseph los maíces o piedrecillas de cada columna tendrían siempre el valor de una unidad (1), pero en la primera columna solo se podrían colocar 5 maíces, es decir, habría 5 huecos, en la segunda 3 maíces, en la tercera 2 y en la última 1.



(a) imagen de la Yupana de Poma de Ayala e (c) interpretación de George G. Joseph. Imagen de «La cresta del pavo real»

De esta forma, el valor representado en la ilustración del ábaco inca de Poma de Ayala sería 53.636, puesto que sería

$$6 + 3 \times 10 + 6 \times 100 + 3 \times 1.000 + 5 \times 10.000 = 53.636.$$

Una observación rápida de esta interpretación de la ilustración de *Nueva corónica i buen gobierno*, me hace preguntarme que de ser esta la interpretación correcta, cuál es el motivo por el cual los maíces (círculos negros en la imagen) están colocados en esas posiciones y no en otras. Por ejemplo, tanto en la primera fila como en la tercera hay 6 maíces en cada una de ellas que representan el 6 en cada una de las posiciones, pero están colocadas en diferentes posiciones, mientras que, si el objetivo es solamente representar a los números, sería más lógico y en orden, de izquierda a derecha, relle-

nando huecos.

Una posible explicación estaría en el hecho de que la yupana no es simplemente para representar números, sino para realizar operaciones aritméticas, y Poma de Ayala podría estar representando el resultado de una operación aritmética, por ejemplo, una multiplicación, de forma que los maíces habrían quedado en la posición consecuencia de los movimientos de la operación aritmética.

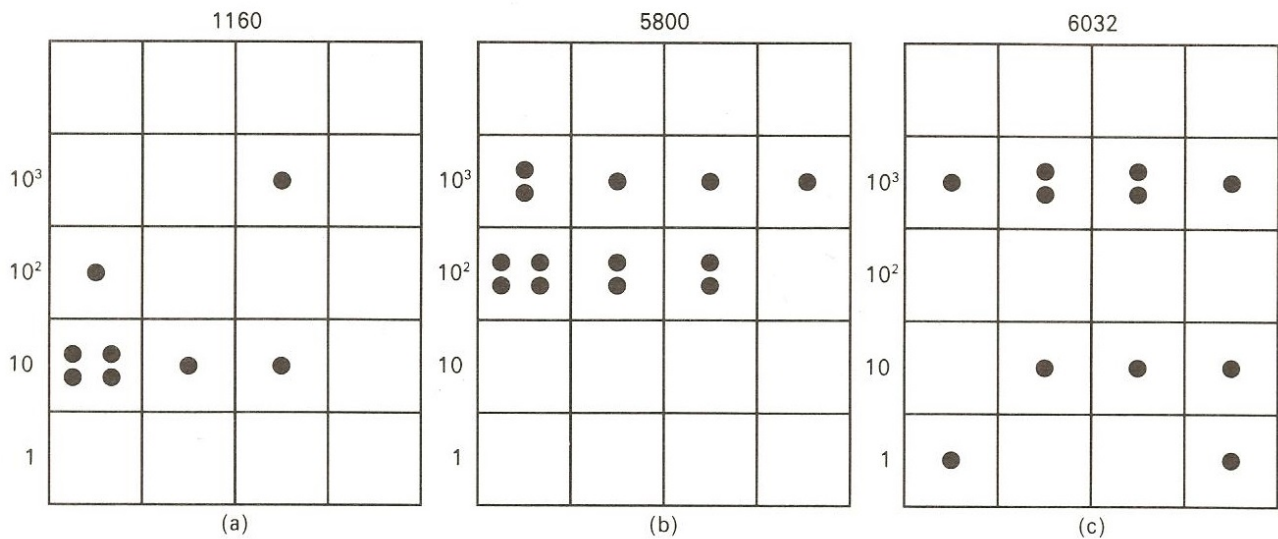
George G. Joseph se aventura a intentar explicar cómo serían las operaciones aritméticas con la yupana, según su interpretación de la misma. Como él mismo comenta, la adición y la sustracción no plantearían muchos problemas, y la forma de realizarse sería más o menos sencilla.

Pero realiza la siguiente conjetura sobre el mecanismo de multiplicación con el ábaco inca. Supongamos que se quieren multiplicar los números 116 y 52. Teniendo en cuenta que 52 es igual a  $5 \times 10$ , primero se desplazaría una fila hacia arriba la representación del número 116 con maíces, es decir, se obtendría el número 1.160 ( $10 \times 116$ ). Ahora se sumaría 1.160 a sí misma 5 veces ( $5 \times 1.160$ ), obteniendo 5.800. Y finalmente se añadiría dos veces 116 al resultado anterior, obteniéndose el valor buscado, 6.032, como se muestra en la imagen de abajo.

El método es esencialmente utilizar la idea de multiplicación sobre una numeración posicional, ya que

$$116 \times 52 = 116 \times (5 \times 10 + 2) = 116 \times 10 \times 5 + 116 \times 2,$$

de forma análoga a como se realiza en otros procedimientos de multiplicación para sistemas posicionales.



Tres pasos del posible procedimiento de multiplicación utilizando la yupana de Poma de Ayala, según la interpretación de George G. Joseph en «La cresta del pavo real»

El historiador italiano radicado en Perú, Carlo Radicati di Primeglio (1914-1990), propone también una interpretación en la que cada maíz simboliza una unidad, como en el caso de Joseph, pero en su opinión se podían poner hasta nueve maíces en cada recuadro, y no 5, 3, 2 y 1, como sugiere la imagen del texto de Poma de Ayala. A partir de esa suposición construye toda una serie de procedimientos para sumar, restar, multiplicar y dividir, que pueden verse en su texto *El sistema contable de los Incas, Yupana y Quipu* (1976).

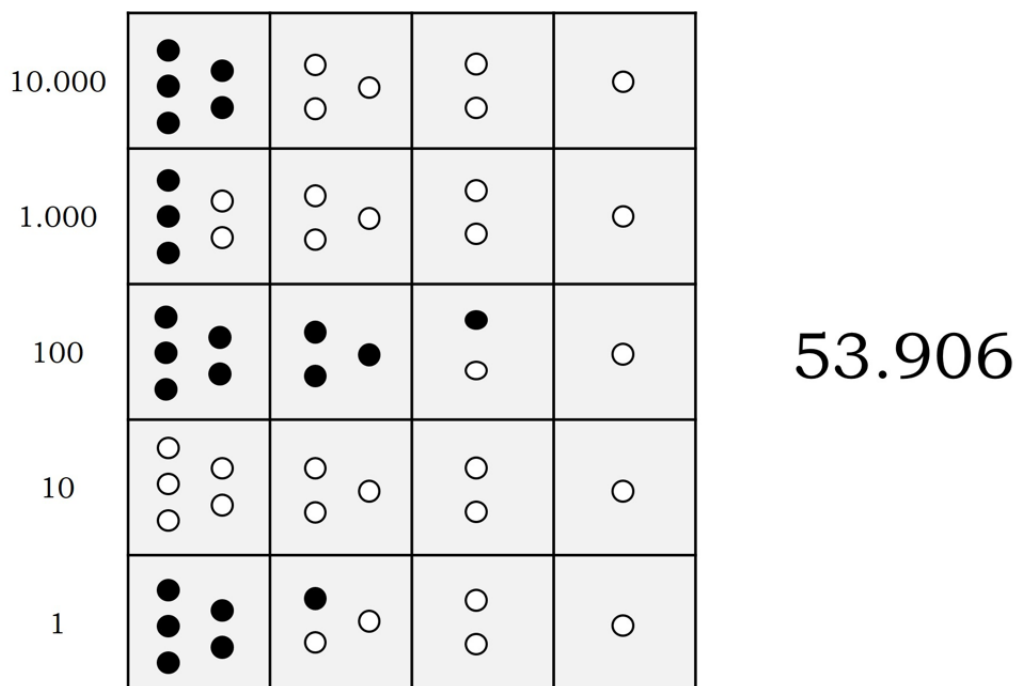
Para terminar la entrada de hoy del Cuaderno de Cultura Científica veamos la última de las interpretaciones, que podríamos clasificar como clásicas, tanto por el momento en que son formuladas, como por el hecho de que mantienen la suposición de un sistema de numeración de la yupana es decimal y posicional. Es la propuesta del ingeniero textil británico William Burns Glynn (1923-2014), quien cuando llegó a Perú quedó fascinado por el arte textil peruano y por los quipus, y es quien propuso el nombre de “yupana” para el ábaco inca.

La propuesta, en cuanto a la representación de los números dentro del ábaco, es similar a la propuesta por George G. Joseph, con la diferencia de que solo son válidas para la representación de los números las tres primeras columnas (con 5, 3 y 2 huecos para piedras), mientras que la última columna sería la columna de la “memoria”, y que se-



ría un elemento fundamental para los métodos de cálculo.

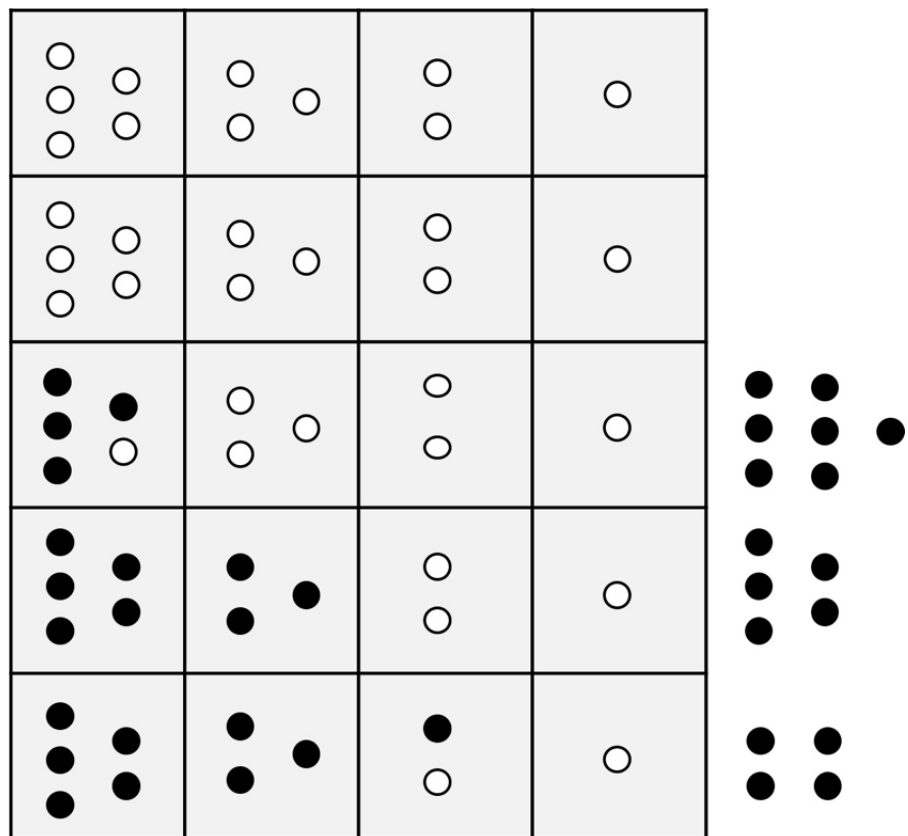
Por lo tanto, en cada fila puede haber hasta 10 piedras ( $5 + 3 + 2$ ), y cuando se tienen las 10 piedras, se pueden sustituir por una de memoria mientras se está computando, lo cual equivale a una piedra en la siguiente fila (hacia arriba). Por ejemplo, en la siguiente imagen se representa el número 53.906, según el modelo de Glynn.



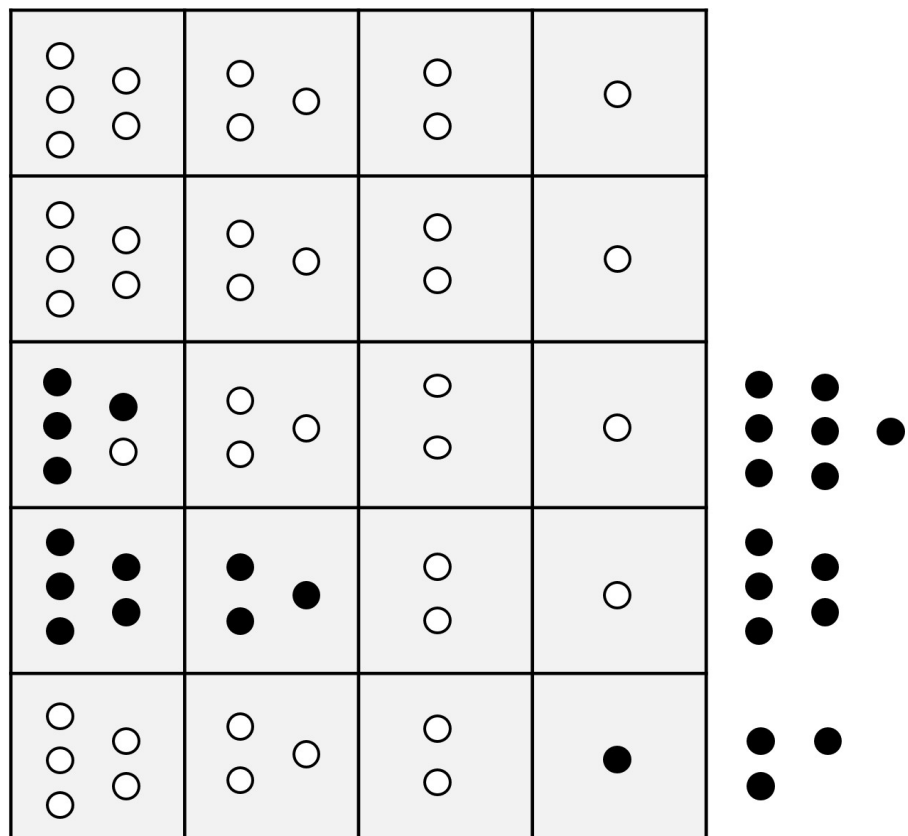
Representación del número 53.906, según la interpretación de Glynn

A partir de la interpretación de William Burns Glynn de la yupana, este propone los posibles métodos para realizar las operaciones aritméticas que podrían utilizar en el imperio inca. Veamos el sencillo proceso de suma, que esencialmente es el mismo que en cualquier otro ábaco.

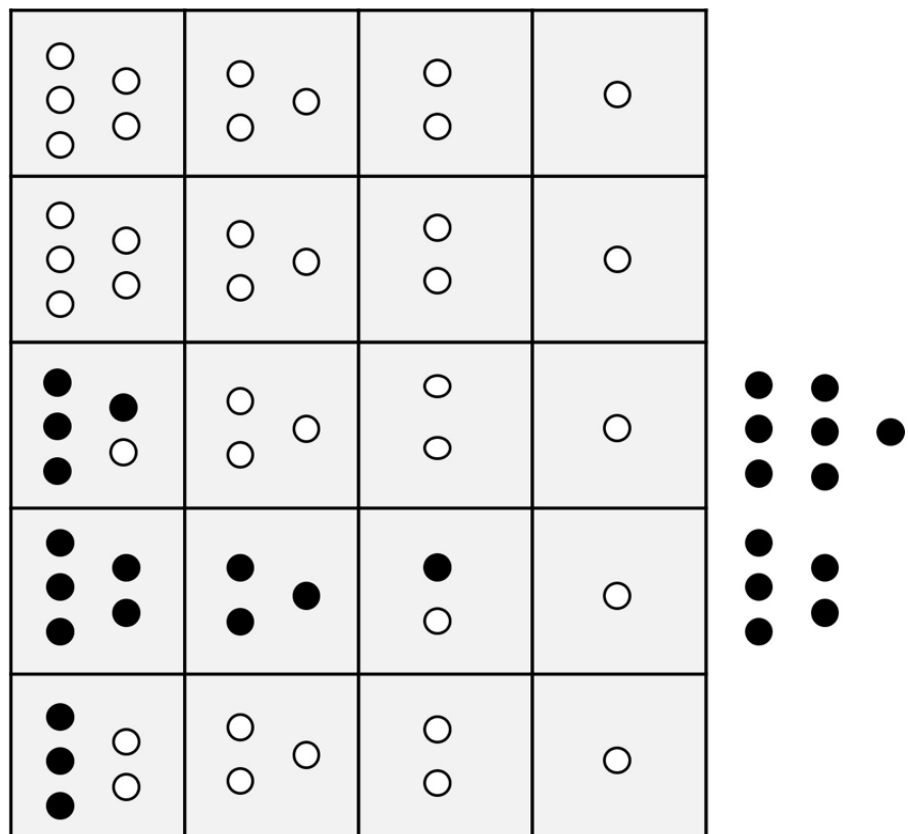
Supongamos que queremos sumar 489 y 754. En primer lugar, se colocan las piedras en la yupana representando uno de los números, por ejemplo, el 489, y se colocan las fichas que representarían el otro número fuera de la yupana, al lado de la memoria, como se muestra en la imagen.



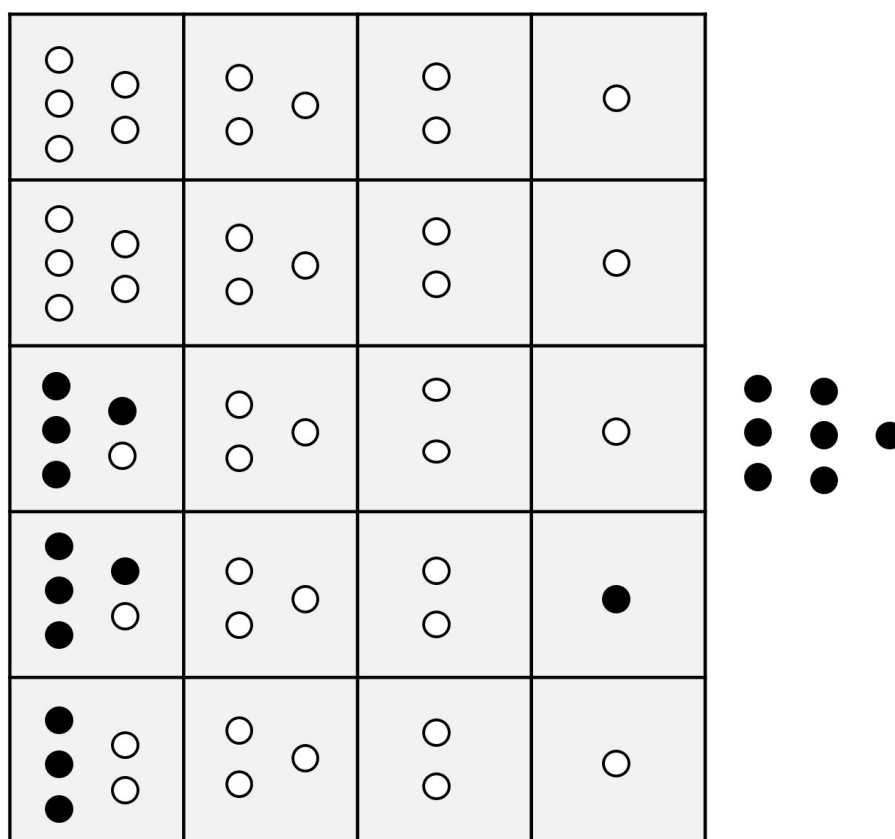
A continuación, se empiezan a meter piedras de las unidades que están en el lateral dentro de la yupana hasta completar las 10 ( $5 + 3 + 2$ ), en este caso solo una y quedando tres aún en el lateral. Una vez completadas las diez se recogen y se pone una en la parte de la memoria, quedando como en la siguiente imagen.



Como ya quedan huecos libres en las unidades de la yupana, se colocan las piedras que aún quedan en el lateral, que son tres, y después, la piedra de la memoria se pasa a la siguiente fila, en este caso, a la de las decenas. El resultado es el siguiente.



Una vez que hemos terminado con las piedras laterales de las unidades, se realiza la misma operación para las decenas. Solo queda un hueco libre en la segunda fila, la de las decenas, luego se coloca una de las piedras laterales de las decenas y como se ha completado la fila, se quitan las 10 piedras de esa segunda fila y se pone, en su lugar, una piedra de memoria. Además, han quedado libres los huecos, por lo que se colocan las piedras restantes del lateral de las decenas, que, en este caso, son 4. El resultado es el siguiente.



Como antes, la piedra que está en la memoria (en la parte de las decenas) se traslada a la siguiente fila de la yupana, la de las centenas. Y de nuevo, se incorporan las piedras del lateral, que en este caso son 7, a la zona de la yupana, y cuando se complete la fila se quitan las 10 piedras y se coloca una en la memoria, dejando sitio para continuar colocando las piedras del lateral. Y no nos olvidemos de subir la piedra de la memoria, a la siguiente fila, en este caso, la de las unidades de millar (como se muestra en la siguiente imagen). Como ya no hay más piedras en el lateral para añadir se ha concluido la suma y el número que queda representado es el resultado,  $489 + 754 = 1.243$ .

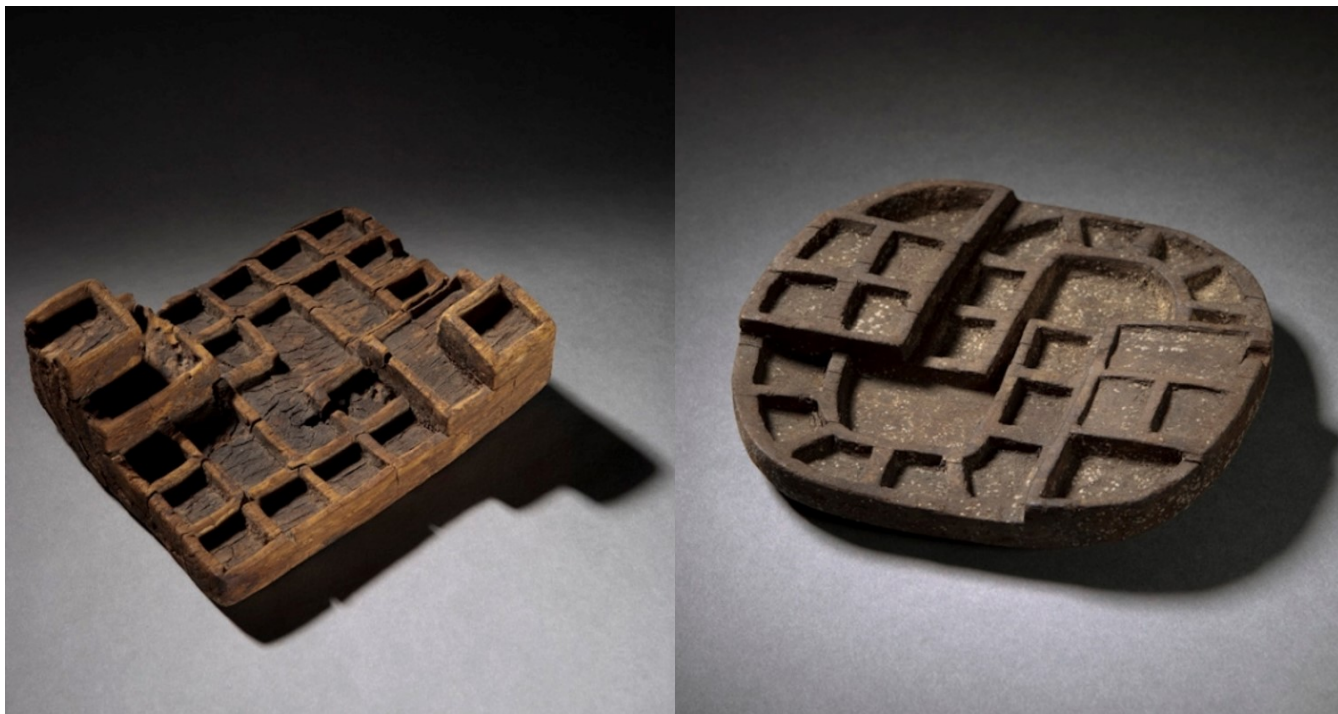


○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○	○
● ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○	○
● ○ ● ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○	○
● ● ● ○ ● ○	○ ○ ○ ○	○ ○	○
● ○ ● ○ ● ○	○ ○ ○ ○	○ ○	○

$$\begin{array}{r}
 489 \\
 + 754 \\
 \hline
 1.243
 \end{array}$$

La interpretación de Glynn de la yupana de Poma de Ayala ha alcanzado cierta popularidad y se está utilizando en la enseñanza, como una nueva herramienta didáctica.

Existen más interpretaciones del ábaco inca que aparece en la ilustración de la *Nueva corónica i buen gobierno* de Felipe Guamán Poma de Ayala, algunas abandonan la condición de decimal del sistema de numeración y otros la condición de ser un sistema posicional. Pero de estas otras interpretaciones más modernas hablaremos en otra ocasión.



Dos yupanas del Perú (siglos XV-XVI), que se encuentran en el museo Raccolte extraeuropee del Castello Sforzesco, de Milán

## Bibliografía

- 1.- Raúl Ibáñez, [Quipu y yupana, instrumentos matemáticos incas \(I\)](#), Cuaderno de Cultura Científica, Mayo, 2018
- 2.- Carlos Radicati de Primeglio, *El sistema contable de los Incas, Yupana y Quipu*, Librería Studium, 1976.
- 3.- Carlos Radicati de Primeglio, [Estudios sobre los quipus](#), UNMSM, Fondo Editorial; COFIDE; Istituto Italiano di Cultura, 2006.
- 4.- Diego Pareja, *Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana*, revista Integración, Departamento de Matemáticas UIS, vol. 4, n. 1, p. 37-55, 1986.
- 5.- Felipe Guamán Poma de Ayala, [Nueva corónica i buen gobierno](#), 1615. Versión online en la Biblioteca Real Danesa
- 6.- José de Acosta, [Historia natural y moral de las Indias](#), 1589. Versión online en la Bi-

biblioteca Virtual Miguel de Cervantes, 1999.

7.- George Gheverghese Joseph, *La creta del pavo real, Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Pirámide, 1996.

8.- Henry Wassen, *The ancient Peruvian abacus*, Comparative Ethnological Studies 9, p.



9.- William Burns Glynn, *La Tabla de Cálculo de los Incas*, Lima, 1981.

Sobre el autor: Raúl Ibáñez es profesor del Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU y colaborador de la Cátedra de Cultura Científica



9 comentarios

Publicado el **30 de mayo, 2018** en **Matemoción**

historia de la ciencia    matemáticas

Suscríbete a nuestro boletín de noticias diario para recibir artículos y otras actualizaciones.

Suscribirme

---

ÚLTIMOS ARTÍCULOS